Algebarski koncepti u nastavi matematike

Ljerka Jukić Matić[1], Vesna Tutnjević[2]

Uvod

Uvođenje algebre u nastavu matematike počinje u višim razredima osnovnih škola, a posebno je istaknuto u prvoj godini srednjoškolskog obrazovanja. Na početku učenja algebre učenici moraju proći kroz značajne konceptualne prilagodbe jer iako aritmetika i algebra dijele određene oznake i simbole, oni često u algebri promijene svoje značenje [7]. Mnogi učenici završavaju osnovnu školu uz vrlo ograničeno znanje o matematičkim strukturama i aritmetičkim operacijama kao općim postupcima, što je zapravo temelj za uvođenje algebre u prvom razredu srednje škole. Ukoliko se algebra interpretira samo kao manipulacija simbolima, ona postaje problematičan dio matematike za većinu učenika. Algebra se tada doživljava kao apstraktan i besmislen dio matematike, bez ikakve povezanosti sa svakodnevnim životom. Takav stav narušava pozitivnu klimu u razredu i utječe na uspjeh učenika u učenju. Algebru učenicima treba predstaviti kao dio matematike koji ima svrhu i primjenu u svakodnevnom životu, gdje postupci učenika imaju svoje značenje, a nisu samo puko manipuliranje simbolima.

S druge strane, učitelji matematike trebaju imati jasniju sliku o tome što sve predstavlja algebra. Mnoge studije iz područja matematičkog obrazovanja pokazuju da budući učitelji matematike i učitelji praktičari imaju poteškoća s osnovnim algebarskim konceptima kao što su znak jednakosti i varijabla. Mnogi učitelji često ne mogu predvidjeti i identificirati pogreške u razumijevanju tih koncepata kod učenika te nisu u stanju objasniti što algebra obuhvaća [10]. Također, studije pokazuju kako budući učitelji matematike ne razlikuju koncept varijable od koncepta nepoznanice, što dovodi do miješanja pojednostavljivanja algebarskih izraza s rješavanjem jednadžbi. No, učitelji trebaju moći predvidjeti algebarske pogreške koje učenici čine te pronaći moguće izvore njihovog nastanka. Što učitelj ima bolje znanje o algebarskim konceptima, to može lakše pomoći učenicima da prevladaju nastale poteškoće [2].

[1]Ljerka Jukić Matić, viši asistent, Odjel za matematiku, Sveučilište J. J. Strossmayera, Osijek
[2]Vesna Tutnjević, student, Odjel za matematiku, Sveučilište J. J. Strossmayera, Osijek

Poucak 55.indd 31 21.10.2013. 14:43:41

Osnovne algebarske ideje

Algebarsko mišljenje ili algebarsko zaključivanje prevladava u svim dijelovima matematike i nužno je za upotrebu matematike u svakodnevnom životu. Unutar matematičkog obrazovanja nema jedinstvene definicije kojom bi se opisalo što je algebarsko mišljenje. Zapravo, algebarsko mišljenje nije pojam koji obuhvaća jednu ideju, nego se sastoji se od razumijevanja simboličkog formalnog jezika i različitih vrsta mišljenja [5]. Stoga u okviru algebarskog mišljenja možemo istaknuti sljedeće vrste zaključivanja:

1. Stvaranje generalizacija iz aritmetike i uzoraka iz svih dijelova matematike
2. Smislena upotreba simboličkog jezika
3. Proučavanje struktura među brojevima
4. Proučavanje uzoraka i funkcija
5. Proces matematičkog modeliranja

Zapravo vidimo da algebarsko mišljenje ili algebarsko zaključivanje uključuje stvaranje generalizacija na osnovi iskustva računanja i manipulacije brojevima, formaliziranje tih ideja pomoću simbola, te upotrebu funkcija, a sve je to također uključeno u proces modeliranja.

Mnoge škole u SAD-u odlučile su uvesti algebru u najranijim godinama osnovnoškolskog obrazovanja. Algebarske aktivnosti uvode se već u vrtićkoj dobi, a djeca se s algebarskim pojmovima upoznaju već u trećem razredu osnovne škole. Pobornici uvođenja algebre u nižim razredima osnovne škole smatraju kako aritmetika i algebra nisu toliko različita područja, s obzirom na to da dublje razumijevanje aritmetike zahtijeva znanje o određenim matematičkim generalizacijama, a manja djeca razvijaju upravo takve generalizacije algebarskih pojmova, baš kao adolescenti ili odrasle osobe. Konkretno, u pristupu koji su usvojili Schliemann i suradnici [9] na algebru se gleda kao na generaliziranu aritmetiku brojeva i veličina. Ovaj pristup razvija sposobnost odmaka u razmišljanju o vezama između konkretnih brojeva i veličina prema vezama među skupovima brojeva i veličina, od izračunavanja numeričkog odgovora do opisivanja veza među varijablama.

Školsku algebru možemo promatrati kao skup generalizacijskih, transformacijskih i općih aktivnosti [6]. Generalizacijske aktivnosti odnose se na oblikovanje izraza i jednadžbi, tj. algebarskih objekata. Objekti u algebarskim jednadžbama i izrazima su varijable i nepoznanice. Transformacijske aktivnosti utemeljene su na pravilima, a odnose se na postupke rješavanja problema koji uključuju uvjete i rješavanje jednadžbi. Velik dio transformacijskih aktivnosti uključuje rad s ekvivalentnim formama i zahtijeva njihovo dobro poznavanje. Opće aktivnosti koriste algebru kao alat pri rješavanju problema u modeliranju, kod uočavanja struktura, pri proučavanju promjena, kod generaliziranja i analiziranja odnosa i veza, te kod objašnjavanja i dokazivanja. Ove aktivnosti ne mogu se odvojiti od generalizacijskih i transforma-

Poucak 55.indd 32 21.10.2013. 14:43:41

cijskih aktivnosti a da se usput ne izgubi smisao učenja algebre. Prema tome, algebarsko mišljenje ovisi o razvoju nekoliko osnovnih ideja, od kojih su najvažnije znak jednakosti i varijabla.

Znak jednakosti i varijable

Znak jednakosti jedan je od najvažnijih simbola, kako u aritmetici tako i u algebri. Međutim, on često nije usvojen na adekvatan način. Iako se učenicima od prvog razreda osnovne škole govori kako on označava da su izrazi s lijeve i desne strane jednaki, njihova iskustva govore im kako on označava računsku operaciju, tj. da treba nešto izračunati. Stoga je od iznimne važnosti naučiti učenike kako znak jednakosti trebaju smatrati relacijskim simbolom, a ne samo operacijskim simbolom, tj. staviti naglasak na ekvivalentnost izraza s lijeve i desne strane, a ne na računanje. Operacijsko doživljavanje znaka jednakosti učenici znaju zadržati čak i u prvim godinama srednjoškolskog obrazovanja. Shvaćanje znaka jednakosti kao relacijskog simbola potrebno je ne samo kako bi učenici znali smisleno postavljati i interpretirati jednadžbe, nego i kako „upravljati" jednadžbama [8]. Iako se poimanje znaka jednakosti od operacijskog do relacijskog simbola mijenja kroz godine učenja matematike, taj proces odvija se sporo, osobito ako se učenike ne usmjeri prema pravom zaključivanju. Zbog toga je potrebno u nastavi matematike odvojiti vrijeme kako bi učenici razvili pravilno razumijevanje znaka jednakosti kao ekvivalencije, što će se svakako odraziti na uspjeh u algebri u kasnijim godinama obrazovanja.

Jedan od načina kojim se može prevladati operacijsko shvaćanje znaka jednakosti u nižim razredima osnovne škole jest pomoću istinitih/lažnih izraza i izraza otvorenog tipa [1]. Istiniti/lažni izrazi otvaraju veliku mogućnost za diskusiju, pogotovo ako se s obje strane znaka jednakosti nalazi neka operacija. Izrazi otvorenog tipa otvaraju put jednadžbama, a oznaka praznog mjesta prethodi uvođenju nepoznanice.

Primjer 1. Istiniti/lažni izrazi i izrazi otvorenog tipa

a)	b)
a. $3 + 5 = 8$	a. $8 = 3 + \_$ ili $\_ = 3 + 5$
b. $8 = 3 + 5$	b. $8 = \_$
c. $8 = 8$	c. $7 - \_ = 6 - 4$
d. $3 + 5 = 4 + 3$	d. $\_ + 5 = 5 + 8$
e. $3 + 5 = 4 + 4$	e. $3 + 5 = \_ + 4$

U primjeru pod a) osim prvog izraza niti jedan od ovih izraza ne prati poznatu shemu gdje su dva broja na lijevoj strani znaka jednakosti, a zatim slijedi odgovor. Postavljanjem pitanja koji su od ovih izraza istiniti ili lažni, učenike se može potaknuti

Poucak 55.indd 33 21.10.2013. 14:43:41

da preispitaju svoje pretpostavke o znaku jednakosti. Izrazi u primjeru pod b) mogu se učenicima dati nakon diskusije o istinitim/lažnim izrazima. Ponekad učenici ovdje pokušavaju izračunati točan odgovor. No, smisao zadatka nije u računanju, već u relacijskom povezivanju. Primjerice, učenik u podzadatku c. ne bi trebao odgovoriti računajući razliku 6-4 koja iznosi 2, te oduzimati od broja 7 da dobije 2. Umjesto toga učenik bi trebao promatrati ekvivalentnost izraza na sljedeći način: 7 je veće za 1 od 6 koji se nalazi s desne strane znaka jednakosti, pa moramo oduzeti 1 na lijevoj strani da bismo dobili jednake izraze. 1 više od 4 jest 5, pa na prazno mjesto dolazi upravo broj 5.

Shvaćanje varijable kao nepoznanice izvor je mnogih poteškoća s kojima se susreću učenici viših razreda osnovne škole, a takvo krivo shvaćanje zna se prenijeti i u srednjoškolske klupe. Koncept varijable bitno se razlikuje od koncepta nepoznanice. Dok je nepoznanica broj koji ne varira, varijable su algebarski alat pomoću kojeg se izražavaju poopćenja u matematici, i možemo ih poimati kao vrijednost koja se mijenja. Schliemann i suradnici [9] smatraju da ove poteškoće kod učenja algebre nastaju iz višegodišnjeg učenja aritmetike, a razlozi poteškoća su trostruki:

1. Upotreba ograničenih aritmetičkih problema riječima s fokusom na probleme zamjene, probleme uspoređivanja te na probleme u kojem nedostaje odgovarajući pribrojnik (npr. 1. Ivan ima nekoliko naljepnica. Kupio je još tri 3 naljepnice. Sada ih ima osam. Koliko je naljepnica Ivan imao na početku? 2. Na jahanje je krenulo osam jahača, ali imaju samo tri konja. Koliko jahača neće dobiti konja? 3. Sanja ima sedam plavih i nekoliko smeđih majica. Sveukupno ima jedanaest majica. Koliko smeđih majica ima Sanja?).
2. Upotreba notacije kao sredstva za bilježenje izračuna umjesto opisivanja onoga što je poznato u problemu.
3. Fokusiranje na izračunavanje određenih vrijednosti umjesto na pronalaženje veza medu problemima.

Most između aritmetičkog i algebarskog načina razmišljanja može se ostvariti upotrebom kvazi-varijabli [3]. Kvazi-varijable pojavljuju se u „brojevnim izrazima" ili „nizu brojevnih izraza" koji ukazuju na osnovnu matematičku vezu koja ostaje istinita bez obzira na brojeve koji se pojavljuju u izrazu. Brojevni izraz $60 - 27 + 27 = 60$ pripada klasi algebarskih jednadžbi tipa $a - b + b = a$, što je istinito za bilo koje vrijednosti a i b. Rad s kvazi-varijablama pomaže učenicima kod identificiranja i razmatranja algebarskih generalizacija, čak i prije nego što se upoznaju s formalnom algebarskom notacijom. Učenici se usredotočuju na razvijanje koncepta varijable umjesto na koncept nepoznanice.

U srednjoškolskom obrazovanju često se koriste izrazi koji označavaju veze među vrijednostima varijabli, a koji se temelje na algebarskoj generalizaciji. U sljedećem primjeru prikazan je zadatak iz geometrije u kojemu je dobro ilustrirano korištenje kvazi-varijabli.

Poucak 55.indd 34 21.10.2013. 14:43:41

Primjer 2. Upotreba kvazi-varijabli

Zajednički promjeri polukrugova.

a) Nacrtajte polukrug promjera 60 mm. Podijelite promjer na tri jednaka dijela. Iznad svakog dijela konstruirajte polukrug tako da se tri polukruga dodiruju, te da promjer svakog polukruga bude jednak jednoj trećini promjera velikog polukruga.

- Zapišite izraz kojim biste usporedili duljinu luka velikog polukruga sa zbrojem duljina lukova malih polukrugova.
- Promjer velikog polukruga na isti način podijelite na četiri dijela i iznad svakog konstruirajte polukrug. Zapišite brojevni izraz koji bi prikazao ukupnu duljinu sva četiri kružna luka.
- Ako bismo imali deset malih polukrugova, zapišite brojevni izraz koji bi prikazao ukupnu duljinu kružnih lukova svih deset polukrugova.
- Pogledajte izraze koje ste zapisali. Vlastitim riječima opišite što primjećujete.

b) Sada ponovite postupak s promjerom po vlastitom izboru za veliki polukrug. Uspoređujući rezultate s drugim učenicima, opišite što primjećujete.

U primjeru pod a) od učenika se očekuje da promotre niz izraza koje su zapisali te da primijete da je, bez obzira na broj jednakih malih polukrugova, suma duljina njihovih lukova jednaka duljini luka velikog polukruga. Ove veze među kvazi-varijablama omogućuju učenicima razumijevanje općenite veze u izrazu $\frac{60}{n}\times 3.14 : 2 \times n = 94.2$, gdje je n broj jednakih malih polukrugova. Trenutni cilj nastavne jedinice nije da učenici nauče formalno zapisati ovakav izraz, već da budu u mogućnosti opisati vezu vlastitim riječima. U drugom dijelu zadatka, promatrajući druge slučajeve za duljinu promjera velikog polukruga, učenike se potiče da shvate kako veza vrijedi za bilo koje jednake polukrugove.

Ovakvim pristupom varijable se mogu uvesti i prije nego što se učenici upoznaju s formalnom algebarskom notacijom. Mnoge situacije u aritmetici, pa i geometriji, plodno su tlo za upotrebu kvazi-varijabli kako bi učenici produbili razumijevanje algebarskog načina razmišljanja, te kako bi im se kasnije olakšao prijelaz s rada s nepoznanicama na rad s varijablama. Ipak, naglasak bi ovdje trebao biti na pronalaženju veza, a ne na računanju.

Uloga tehnologije

Računalni algebarski sustavi otkrili su potencijal potpuno drugačijeg poučavanja i učenja algebre, ali i matematike općenito, no u kojem će se smjeru i kojoj formi razvijati ovaj oblik poučavanja i učenja - još uvijek ostaje nepoznato.

Poucak 55.indd 35 21.10.2013. 14:43:41

Iz algebarske perspektive, mišljenje koje se razvija upotrebom računalnih algebarskih sustava u srednjoškolskom obrazovanju od iznimne je važnosti, bez obzira koristi li se tehnologijsko sredstvo u razredu kao primarno sredstvo ili kao nadopuna drugim pomagalima.

Upotreba tehnologije poput računalnih algebarskih sustava (CASova), kao što je *Mathematica* ili *Geogebra*, učenicima je omogućila pronalazak točnih rješenja algebarskih jednadžbi, uključujući i one jednadžbe koje sadrže parametre. Iako je uvriježeno mišljenje kako takve tehnologije podcjenjuju ulogu učitelja, potrebno je posjedovati algebarsko znanje kako bismo odlučili koje su tehnike prikladne i kako bismo unosili izraze u onom obliku koji računalo zna prepoznati i može manipulirati njime. Osim toga, potrebno je nadgledati postupak rješavanja kako bismo uočili moguće pogreške te interpretirati izlazne vrijednosti tj. rješenja na uobičajen način. Štoviše, tehnologija je potrebna za razvoj algebarskog uvida.

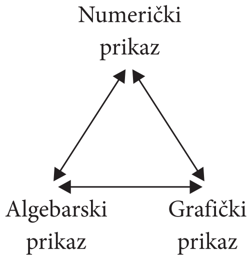
Algebarski uvid sastoji se od dvije komponente - algebarskog očekivanja i sposobnosti povezivanja prikaza [4]. Algebarsko očekivanje je proces mišljenja koji se događa kada iskusni matematičar promišlja o očekivanom rezultatu nekog algebarskog procesa. Vještina algebarskog očekivanja omogućit će učenicima da među rezultatima koje ponudi računalni sustav uoče pogreške, prepoznaju ekvivalentne izraze, te pronađu smisao u dugačkim i kompliciranim rezultatima. Algebarsko očekivanje uključuje:

1. Prepoznavanje općih pojmova (npr. značenje operatora, oznake parametara, imena varijabli, prednost računskih operacija itd.) i osnovnih svojstava (npr. nekomutativnost računske operacije dijeljenja)
2. Prepoznavanje strukture (npr. objekta, grupe komponenata, faktore)
3. Prepoznavanje ključnih značajki (npr. oblik, dominantni izraz, povezivanje oblika s tipom rješenja).

Jezik koji koristi tehnologija prirodno ovisi o pojmu varijable i funkcije. No, pojam varijable i funkcije u današnjem je svijetu tehnologije puno složeniji i bogatiji nego onaj koji nalazimo u udžbenicima ili znanju današnjih učenika. Potraga za vrijednostima varijabli koje zadovoljavaju jednadžbu više ne mora biti primaran cilj nastave algebre. U svijetu tehnologije, i funkcije i varijable poprimaju novo značenje jer se više ne promatraju kao apstraktni izrazi nego se koriste i za istraživanje problema iz realnog života.

Funkcije su slojevite i ne mogu se u potpunosti razumjeti pomoću samo jednog prikaza. Pronaći vezu među prikazima funkcije ključno je za razumijevanje osnovnih pojmova.

Poucak 55.indd 36 21.10.2013. 14:43:41



Slika 1. Načini prikaza funkcije i veze koje se trebaju razviti među njima

Ako je algebarsko očekivanje kao rezultat simboličkog prikaza povezano s grafičkim i numeričkim prikazom, prirodno se stvara veći algebarski uvid. Ova mogućnost povezivanja prikaza u okruženju računalnih sustava ima dva značenja. Prvo, ona uključuje povezivanje simboličkog s grafičkim prikazom (npr. povezivanje zadane forme s oblikom grafa ili povezivanje ključnih značajki s mogućim položajem grafa, sjecišta s drugom krivuljom ili položaja asimptota). Drugo značenje odnosi se na povezivanje simboličkog s numeričkim prikazom (npr. povezivanje brojevnih uzoraka s formom, ili povezivanje ključnih značajki s prikladnim prirastom u tablicama i slično). Algebarski uvid omogućuje učiteljima da odrede tip algebarskog razlučivanja koji učenici trebaju razviti koristeći računalne sustave u učenju algebre.

Računalni programi i druga tehnološka pomagala za crtanje grafova funkcija omogućuju učenicima razumijevanje veza te razvijanje bogatih konceptualnih shema, no učenici ipak ponekad ne uspiju povezati navedene koncepte. Kada govorimo o pristupu poučavanja kroz ove mnogostruke veze u uvođenju pojma funkcije, često se ističe kako učenici trebaju izvršavati zadatke, a učitelji prezentirati primjere pomoću kojih je moguće uočiti veze među prikazima funkcije. Međutim, čak i uz najbolje osmišljene zadatke, uvijek postoji potreba da učitelj prati rješavanje zadataka i pomaže učenicima u radu.

Literatura:

1. Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003.). *Thinking mathematically*: Integrating arithmetic and algebra in elementary school. Portsmouth, NH. Knuth

2. Carpenter, T.P., Fennema, E., Peterson, P. L., & Carey, D. A. (1988.). Teachers' pedagogical content knowledge of students' problem solving in elementary arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, *19*(5), 385-401

3. Fujii, T. & Stephens, M. (2001.). Fostering an understanding of algebraic generalisation through numerical expressions: The role of quasi-variables. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent & J. Vincent (eds), *The future of the teaching and learning of algebra: Proceedings of the 12th ICMI Study Conference* (Vol. 1, pp. 258–64). Melbourne: University of Melbourne.

Poucak 55.indd 37 21.10.2013. 14:43:42

4. Goose, V., Stillman, G., & Vale, C. (2008.). *Teaching Secondary school mathematics*, Allen and Unwin, Australia

5. Kaput. J. J. (1999.). Teaching and learning a new algebra. In Elizabeth Fennema and Thomas Romberg (Eds.). *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133–155). Mahwah, NJ: Erlbaum, 1999.

6. Kieran, C. (2004.). The core of algebra: Reflections on its main activities. In K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (eds), *The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI Study* (pp. 21–33). Norwell, MA: Kluwer.

7. Kieran, C. (2006.). Research on the learning and teaching of algebra. In A. Gutiérrez & P. Boero (eds), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 11–49). Rotterdam: Sense Publishers.

8. Knuth, E.J., Alibali, M.W., McNeil, N.M., Weinberg, A. & Stephens, A.C. (2005.). Middle school students' understanding of core algebraic concepts: Equivalence & variable. *ZDM* , *37*(1), 68–76.

9. Schliemann, A.D., Carraher, D.W. & Brizuela, B.M. (2007.). *Bringing out the algebraic character of arithmetic:From children's ideas to classroom practice*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

10. Tanisli, D., & Kose, N. Y. (2013.). Pre-Service Mathematic Teachers' Knowledge of Students about the Algebraic Concepts, *Australian Journal of Teacher Education*, *38*(2), 1-20

Poucak 55.indd 38 21.10.2013. 14:43:42