

Geometrija u svijetu 3D modeliranja

NIKOLINA KOVAČEVIĆ¹, EMA JURKIN²

1. Motivacija

Brojna istraživanja na međunarodnoj razini i izvješća o stvarnoj školskoj praksi pokazuju da ulaskom u 21. stoljeće geometrija ponovno zauzima jednu od temeljnih pozicija u matematičkim kurikulumima nakon niza godina u kojima su ovi sadržaji bili marginalizirani, [6], [7], [8], [15], [20], [23]. Primjerice, K. Jones i T. Fujita ističu, između ostalog u [8], kako je razvijanje dobrih modela školskih geometrijskih kurikula i dalje jedna od najvažnijih zadataka u dizajniranju kurikula matematičkog područja.

Posebno zanimljivi materijali objedinjeni su u [15] kao rezultat ICMI studije. Predočene su okvirne smjernice koje bi trebale olakšati poučavanje geometrijskih sadržaja u novom tisućljeću. U studiji su objavljeni brojni radovi usmjereni na teorijski, praktični i kognitivni aspekt geometrijskog obrazovanja, naglašavajući pritom dvojaku ulogu geometrije u obrazovnom procesu. S jedne strane, geometriju možemo promatrati kao jedan od najintuitivnijih i najrealističnijih alata za razumijevanje, opisivanje i interakciju s prostorom koji nas okružuje, dok s druge strane geometrija, kao znanstvena disciplina, počiva na opsežnom procesu formalizacije koji već više od 2000 godina u sebi integrira visoku razinu strogosti, apstrakcije i generalizacije.

Jedan od temeljnih faktora koji su omogućili ponovni procvat geometrije zasigurno je sve veća implementacija računala u razne sfere ljudskog života, pa i u onu obrazovnu. Svojevrsni geometrijski „bum“ na svjetskoj razini javlja se već krajem 90-ih godina, ali, kao što znamo, niz opravdanih razloga u Hrvatskoj uvjetovao je nešto sporije praćenje ovih međunarodnih trendova. D. Glasnović Gracin istaknula je u [9] i [10] kako još uvijek u zadacima iz hrvatskih udžbeničkih kompleta prevladavaju zahtjevi operiranja, dok su u manjini zadaci koji traže argumentiranje i refleksiju o geometrijskim konceptima.

¹Nikolina Kovačević, Sveučilište u Zagrebu, Rudarsko-geološko-naftni fakultet, Zavod za matematiku, informatiku i nacrtanu geometriju, Zagreb

²Ema Jurkin, Sveučilište u Zagrebu, Rudarsko-geološko-naftni fakultet, Zavod za matematiku, informatiku i nacrtanu geometriju, Zagreb

2. Uvod

Problematika poučavanja geometrijskih sadržaja igra važnu ulogu u svim obrazovnim područjima, od osnovnoškolskoga pa sve do visokoga obrazovanja. Razvoj geometrijskih koncepata i logičkog zaključivanja ima istaknutu ulogu u usvajanju temeljnih generičkih kompetencija magistra inženjera tehničkih, ali i prirodnih područja. Motivaciju za ovaj rad autorice pronalaze u aktualizaciji suvremene problematike geometrijskog obrazovanja jedne grane primijenjene matematike poznatije pod nazivom nacrtna ili deskriptivna geometrija. Ova znanstvena grana bavi se grafičkim predočavanjem i istraživanjem prostornih geometrijskih figura te njihovim međusobnim odnosima. Između ostalog, usmjerena je i na razvijanje vizualizacije i interpretacije prostorne situacije na temelju grafičkih 2D prikaza objekata te rješavanje prostornih problema konstruktivno-geometrijskim putem, [16], [21], [22], [23].

Nacrtna geometrija javlja se kao interdisciplinarni predmet koji svoju primjenjivost pronalazi u raznim tehničkim i prirodnim područjima, ali metode koje koristi direktno se vežu uz područje matematike. Sve veća implementacija računala posljednjih godina omogućuje njezin daljnji razvoj i unutar računalnih znanosti, što uvjetuje brojne promjene - kako u metodičkom, tako i u sadržajnom pogledu. Kako najnoviji kurikulum unutar matematičkog područja implementira predmetne strukture iz područja matematike i nacrtna geometrije, u radu će se ukratko istaknuti neke od promjena vezane uz nacrtnu geometriju, a osvrnut ćemo se i na istraživanje *Geometrija na tehničkim fakultetima u Hrvatskoj*, provedeno tijekom 2011. godine. U istraživanju je, uz autorice ovog rada, sudjelovala i prof. dr. sc. Željka Milin-Šipuš s Matematičkog odsjeka Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu, kojoj ovom prilikom posebno zahvaljujemo.

3. Nacrtna geometrija i računalna znanost

Moderno geometrijsko obrazovanje zasigurno zahtijeva upotrebu računala, [13]. Sistematiziran pregled potencijala primjene računala u nastavi matematike dan je u [9], a brojne primjene u nastavi ne nedostaju u svakodnevnoj hrvatskoj praksi. Očito je da se računalna znanost polako, ali sigurno, integrira ne samo unutar matematike nego i unutar brojnih znanstvenih disciplina, čime postaje jedan od važnih čimbenika u nastavnom procesu.

Zbog svoje interdisciplinarnosti razlikuju se brojne definicije računalne znanosti, a ovom prilikom usmjerit ćemo se na njenu poveznicu s nacrtnom geometrijom istaknutu u jednom od prospekata Japanskog društva za računalnu znanost prema kojoj računalna znanost ne uključuje samo nacrtnu geometriju već i inženjerstvo i arhitektonske crteže, grafiku u umjetnosti i sve druge primjene geometrije i grafike, [23]. Iz ovoga je vidljiva tijesna poveznica između računalne znanosti i nacrtna geometrije koja se u različitim znanstvenim domenama ostvaruje na različite načine. Želeći dublje istražiti ovu poveznicu s nacrtnom geometrijom, autorice, koje posljed-

njih desetak godina sudjeluju u izvođenju nastave na preddiplomskim kolegijima *Nacrtna geometrija* i *Nacrtna geometrija s računalnom grafikom* na Rudarsko-geološko-naftnom fakultetu u Zagrebu, tijekom 2011. godine provele su dvomjesečno istraživanje. U dijelu koji slijedi najprije će se istaknuti neki od rezultata istraživanja, a nakon toga će se izložiti neki od različitih pristupa u poučavanju sadržaja nacrtna geometrije nekad i danas.

3.1. Istraživanje: Geometrija na tehničkim fakultetima u Hrvatskoj

U cilju čvršćeg strukturiranja nastavnog plana i programa pojedinih studijskih programa, te povećanja internacionalne mobilnosti studenata, pokazalo se nužnim uspostaviti odnose na bazi hrvatskih i europskih kurikula s obzirom na istovrsne studijske programe.

Pri istraživanju koje je trajalo tijekom travnja i svibnja 2011. godine podaci su se prikupljali na razne načine, najvećim dijelom putem web-a, analiziranjem dostupnih kurikula i niza članaka vezanih uz razvoj kurikula, vježbanja i razvijanja prostornih sposobnosti te razvoja didaktičkih principa poučavanja nacrtna geometrije, [1]-[23]. Problematika didaktičkih principa poučavanja ove znanstvene discipline raspravila se u krugu domaćeg i međunarodnog znanstvenog i stručnog nastavnog kadra visokog obrazovanja. Istraživanje je obuhvatilo niz preddiplomskih studijskih programa, uglavnom tehničkih područja, u Hrvatskoj i EU.

Cjelokupno istraživanje prezentirano je široj znanstveno-stručnoj zajednici na međunarodnoj razini³, a ovdje ćemo se osvrnuti na samo neke od konačnih zaključaka.

Nove smjernice nacrtna geometrije imaju za cilj razvijanje:

1. sposobnosti vizualizacije,
2. vještine skiciranja i interpretiranja prostornog položaja objekata na temelju danog ravninskog prikaza,
3. sposobnosti komuniciranja usmenim, pismenim i grafičkim putem,
4. računalne kompetencije korištenjem računala kao alata,
5. organizacijske kompetencije kroz prepoznavanje, opisivanje i rješavanje postojećih konstrukcijskih problema,
6. sposobnosti samostalnog rada kroz poticanje individualnog rješavanja konstrukcijskih problema te konačnu prezentaciju rezultata.

Pokazalo se da sve ove sposobnosti nisu isključivo genetski uvjetovane, a pojedina istraživanja sugeriraju da su one rezultat dugotrajnog procesa učenja, [16], [19]. Konstruktivno rješavanje problema, ovisno o njegovoj kompleksnosti, kombinira različite metode temeljene na:

³15. znanstveno-stručni kolokvij za geometriju i grafiku, Tuheljske Toplice, 4.-8. 9. 2011.

1. korištenju klasičnog geometrijskog pribora,
2. prostoručnom skiciranju i / ili korištenje računala s projektorom za prezentacije,
3. korištenju 3D softvera za crtanje i modeliranje (AutoCAD, Rhinoceros, ...).

3.2. Različiti pristupi poučavanju nacrtne geometrije i računalne grafike

U prijašnjim godinama, zbog različitosti u ostvarivanju ciljeva pri poučavanju nacrtne geometrije, pojedine zemlje poistovjećivale su nacrtnu geometriju s tehničkom grafikom i tehničkim crtanjem pa se implementacija računala u nastavnom procesu očitovala samo uvođenjem zamjenskog informatičkog predmeta, [14]. U [11] se ističe važna geometrijska komponenta koju nacrtna geometrija dugi niz godina njeguje na hrvatskim područjima po uzoru na austrijske škole.

Provedeno istraživanje pokazalo je da su se u tradicionalnoj međunarodnoj literaturi nacrtne geometrije općenito kombinirale dvije sadržajne kategorije, [23]:

- Prva kategorija uključivala je teoriju projiciranja i neke praktične tehnike projiciranja (npr. centralno projiciranje, koso projiciranje, ortogonalno projiciranje), pokrivajući na taj način različite grafičke 2D reprezentacije 3D objekata. Možemo primijetiti da se iste teorije projiciranja koriste i danas u brojnim 3D-CAD programima, a i u modernoj eri računala prostoručno crtanje još je uvijek zastupljeno.
- Druga kategorija uključivala je rješavanje 3D problema korištenjem njihovih 2D grafičkih reprezentacija. Primjerice, bilo je potrebno odrediti pravu veličinu dane dužine, ravninskog lika ili odrediti presječnu krivulju/poligon danih dvaju tijela. Kako se pojedini problemi ovog tipa danas mogu preciznije i često brže riješiti korištenjem 3D-CAD-a, neke tehnike korištene unutar nacrtne geometrije gube na svojoj prijašnjoj važnosti. Pojedini nastavnici i danas vjeruju kako je nacrtna geometrija zastarjela znanstvena disciplina koja ne može pratiti suvremene potrebe čovječanstva u cjelini. Ključno je pitanje što je za njih nacrtna geometrija jer iako je 3D-CAD softver koristan alat, on svakako nije univerzalni alat kojim se uspješno mogu riješiti svi geometrijski problemi.

Kada je riječ o uspješnom korištenju CAD programa, brojna istraživanja ukazuju da je za uspješnu primjenu 3D-CAD softvera važno razvijeno geometrijsko mišljenje i vizualizacija jer razumijevanje tehnika projiciranja igra važnu ulogu u grafičkom modeliranju objekata, [3], [7], [16]. Nažalost, posljednjih godina svjedoci smo kako se razina kompleksnosti konstruktivnih postupaka na sveučilišnoj razini polako smanjuje prilagođavajući se na taj način nižem geometrijsko-konstruktivnom predznanju studenata.

Razlozi za to su brojni. Jedan od njih možda leži i u pomalo zanemarenoj grani geometrije, projektivnoj geometriji. Istaknuti hrvatski geometričar Vilim Niče, koji je dugi niz godina poučavao nacrtnu geometriju na Prirodoslovno-matematičkom fa-

kultetu u Zagrebu, a i na raznim tehničkim fakultetima, lijepo je istaknuo poveznicu ovih dviju geometrija. Nacrtna geometrija svojim konstruktivnim grafičkim metodama olakšava praćenje prostornih razmatranja projektivne geometrije, dok projektivna geometrija definira, izvodi i razrađuje ravninske i prostorne figure korištene u nacrtnoj geometriji s obzirom na njihove osobine, međusobne odnose i povezanost, [17]. Iako je usmjerena na metrička svojstva figura euklidske geometrije, nacrtna geometrija izlazi iz njenih okvira i zahtijeva šire razumijevanje afinih i projektivnih svojstava objekata. U novijoj literaturi nacrtna geometrije često možemo primijetiti da se nacrtna geometrija poistovjećuje s projektivnom geometrijom, zamjenjujući pritom tradicionalni sintetički pristup (svojestven konstruktivnim postupcima) analitičkim pristupom (temeljenim na primjeni homogenih projektivnih koordinata).

Na razini visokog obrazovanja, suvremeno poučavanje nacrtna geometrije često se kombinira uz poučavanje računalne grafike. Općenito se razlikuju tri pristupa, [23].

- Prvi pristup stavlja naglasak na prvu kategoriju tradicionalne nacrtna geometrije. Poučava se teorija i praktične metode kreiranja grafičkih prikaza, ali se druga kategorija uopće ne poučava. Ovaj pristup u kurikulum uglavnom preferiraju edukatori iz područja strojarstva.
- U drugom pristupu naglasak se stavlja na drugu kategoriju tradicionalne nacrtna geometrije. Nacrtna geometrija poučava se na tradicionalan način, ali se ne poučava kao skup praktičnih tehnika već je primarno usmjerena na razvijanje geometrijskog mišljenja. Drugim riječima, geometrija prostora poučava se kroz nacrtnu geometriju.
- Treći pristup temelji se na uvođenju nove tehnologije za grafičku reprezentaciju kroz kombiniranje računalnog grafičkog programiranja i korištenje komercijalnih CG / CAD softvera.

Aktualni kurikulum većine sastavnica u zemlji i inozemstvu ostvaraju se kombiniranjem spomenutih triju pristupa.

4. Zaključak

Prateći suvremeni europski trend cjeloživotnog obrazovanja, pokazuje se nužnim problematiku razvoja didaktičkih principa i problema odabira geometrijskih sadržaja aktualizirati u svim obrazovnim ciklusima - od osnovnoškolskog, srednjoškolskog, pa sve do visokog obrazovanja. Bolonjski proces potaknuo je niz promjena unutar visokog obrazovanja. Jedan od njih je i sve veći interes gimnazijalaca za tehničke fakultete, čime se dodatno povećavaju razlike u interesu, predznanju i motivaciji studenata koje utječu na uspješno razvijanje ciljeva nacrtna geometrije kao jednog od niza geometrijskih kolegija.

Nedovoljna razvijenost sposobnosti vizualizacije, koja je nužna pri usvajanju gradiva nacrtne geometrije, tek je jedan od problema koji se uočava među brojnim studentima. Sposobnost primjene konstruktivnih procesa u području stereometrije primjenom odgovarajuće metode, pa čak i najjednostavnije kao što je skica, onemogućuje analiziranje složenijih problemskih situacija koje su neizbježne u visokom obrazovanju. Satnica koja je često smanjena prema zahtjevima Bolonjskog procesa ne ide im u prilog jer dosizanje određene razine geometrijskog razmišljanja nužno uključuje uspješno svladavanje prethodne razine, [2], [3], [19].

Dosadašnja iskustva nastavnika nacrtne geometrije pokazala su da se nadopunjavanjem klasičnih geometrijskih sadržaja korištenjem različitih softvera unutar geometrijskih kolegija učenici više uključuju u nastavu, što pridonosi kvalitetnijem izvođenju nastave. Posljednjih godina nastava nacrtne geometrije u Hrvatskoj primarno se razvijala na razini visokog obrazovanja, dok međunarodna praksa, poglavito s austrijskog područja, pokazuje da nacrtna geometrija nudi širok odabir geometrijskih sadržaja usklađenih sa svakodnevnim idejama i interesima učenika već tijekom srednjoškolskog strukovnog i gimnazijskog obrazovanja (primjerice korištenje tzv. Tschupikovih kocaka), [13], [18]. Ova implementacija pojedinih sadržaja nacrtne geometrije na niže obrazovne cikluse omogućuje praćenje svjetskih trendova na razini visokog obrazovanja, čime se osigurava veća konkurentnost naših studenata na globalnom tržištu rada. Nacrtna geometrija na razini visokog obrazovanja često proširuje svoje područje u Austriji (i dijelom u Mađarskoj) te ne pokriva samo teoriju projiciranja nego i tehnike modeliranja za krivulje, plohe i tijela, dajući tako uvid u veliku raznolikost geometrijskih oblika. Ovisno o razvijanju specifičnih kompetencija, ova klasična znanstvena grana integrira i sadržaje analitičke i diferencijalne geometrije.

Ukratko, kroz korištenje tradicionalnih i suvremenih metoda u nastavi nacrtne geometrije učenici razvijaju konstruktivno razmišljanje, kao i potrebu za prepoznavanjem i definiranjem različitih objekata na temelju njihovih geometrijskih parametara. Prezentacija završnih rezultata pomoću odgovarajućih medija potiče njihovo usmeno izražavanje, a kroz analiziranje prostornih problema promoviraju se i algoritamske vještine razmišljanja.

Nacrtna geometrija, kao jedan od tradicionalno „krozkurikulskih” predmeta u hrvatskom obrazovanju, u suvremenom se obrazovanju usmjerenom na razvijanje kompetencija još uvijek sporo razvija u svim obrazovnim ciklusima. Zanimljivo je da i B. Baranović pri prezentiranju rezultata komparativne analize nacionalnih okvirnih kurikula 11 europskih zemalja ističe kako su, za razliku od Hrvatske koja ima centralizirane i međusobno nedovoljno povezane predmetne programe, nacionalni kurikuli analiziranih zemalja integriraniji..., [1].

Za razliku od tradicionalne nastave nacrtne geometrije koja je koristila gotovo isključivo olovku, ravnalo i šestar, suvremena nastava nacrtne geometrije podržava, uz olovku, i različite računalne medije za rješavanje prostornih problema. Upotreba

računala u nastavi omogućuje u okviru ovog predmeta i stjecanje novih znanja o aktualnim informacijskim tehnologijama kroz upoznavanje s osnovnim principima korištenja CAD programa (AutoCAD, Rhinoceros...)

Literatura

1. B. Baranović: Europska iskustva i nacionalni kurikulum za obvezno obrazovanje u Hrvatskoj (Uvod u raspravu o rezultatima istraživanja), Metodika 15, 294-305 (2008.)
2. A. Braconne - Michoux: Relations between geometrical paradigms and van Hiele levels, Proceedings of CERME7, Working group: Geometry Teaching and Learning (2011.)
3. A. Čižmešija, R. Svedrec, N. Radović, T. Soucie: Geometrijsko mišljenje i prostorni zor u nastavi matematike u nižim razredima osnovne škole, Zbornik radova 4. kongresa nastavnika matematike RH, 143-162 (2010.)
4. R. Duval: Cognitive functioning and the understanding of mathematical process of proof. En P.Boero (Ed.) Theorems in School. From History, Epistemology and Cognition to Classroom Practice (pp. 137-162). Rotterdam, Netherland: Sense Publishers
5. R. Duval: The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics, Educational studies in mathematics, 61(1-2), 103-131 (2006.)
6. L. D. English: Setting an agenda for international research in mathematics education, Handbook of International Research in Mathematics Education, Second Edition (2008.)
7. European Society for Research in Mathematics Education:
http://ermeweb.free.fr/CERME3/Groups/TG7/TG7_introduction_cerme3.html
8. T. Fujita & K. Jones: Opportunities for the development of geometrical reasoning in current textbooks in the UK and Japan, Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics 22(3), (2002.)
9. D. Glasnović Gracin: Računalo u nastavi matematike; Teorijska podloga i metodičke smjernice 1, Miš 46, 10-15 (2008.)
10. D. Glasnović Gracin: Računalo u nastavi matematike; Teorijska podloga i metodičke smjernice 2, Miš 47, 81-87 (2008.)
11. K. Horvatić-Baldasar, S. Hozjan: Nastava nacrtne geometrije na Sveučilištu u Zagrebu, Glasnik matematički, prilozi 45 (65), 613-639 (2010.)

12. V. Kadum & dr.: Nastavni sadržaji, jezik i vještine, te kognitivni razvoj učenika kao činitelji matematičkog odgajanja i obrazovanja, *Metodički obzori* 2, 25-41 (2007.)
13. H. Kaufmann (disertacija): *Geometry Eduactiona with Augmented Reality*, <http://publik.tuwien.ac.at/files/PubDat138490.pdf> (2004.)
14. S. Lawrence: *History of Descriptive Geometry in England*, Proc. of the First Inter. Congress on Construction History, Madrid, 1269-1282 (2003.)
15. C. Mammana, V. Villani, (Eds.): *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century: An ICMI Study*, Kluwer Academic Publishers (1999.)
16. R. Nagy - Kondor: *Spatial Ability, Descriptive Geometry and Dynamic Geometry Systems*, *Annales Mathematicae et Informaticae* 37, 199-210 (2010.)
17. V. Niče: *Deskriptivna geometrija, Školska knjiga*, Zagreb (1967.)
18. Oesterreichisches Schulportal:
<http://www.schule.at/portale/raumgeometrie-gz-dg-cad/>
19. D. A. Romano: *Matematika, Metodika matematike i Matematičko obrazovanje - tri bliska a tako različita domena, Istraživanje matematičkog obrazovanja*, Vol. II (2), 3-10 (2010.)
20. W. H. Schmidt, H. C. Wang & C. C. McKnight: *Curriculum coherence: an examination of US mathematics and science content standard from an international perspective*, *J. curriculum studies*, Vol. 37(5), str. 525-559, (2005.)
21. H. Stachel: *Descriptive geometry in today's engineering curriculum*, <http://dmg.tuwien.ac.at/stachel/zagreb.pdf>
22. M. Stavrić, A. Wiltsche, H. Schmek: *New Dimension in Geometrical Education*, *KoG*, Vol. 9 (1), 45-54 (2005.)
23. K. Suzuki: *Activities of the Japan Society for Graphic Science - Research and Education*, *Journal for Geometry and Graphics*, 6, No. 2, 221-229 (2002)