IZ NASTAVNE PRAKSE

Neke primjene Rolleovog teorema i Lagrangeovog teorema srednje vrijednosti

LJILJANA ARAMBAŠIĆ[1] I ANĐA VALENT[2]

Sažetak. U ovom radu prezentiramo nekoliko različitih tipova zadataka koje rješavamo koristeći Rolleov teorem i Lagrangeov teorem srednje vrijednosti.

1. Uvod

Među osnovne teoreme diferencijalnog računa svakako spadaju Rolleov teorem i Lagrangeov teorem srednje vrijednosti. Ovi teoremi uče se nakon usvajanja pojma derivacije funkcije, imaju jasne i lako razumljive geometrijske i fizikalne interpretacije, a njihove pretpostavke najčešće je vrlo lako provjeriti. Ovo su neki od razloga zašto se u literaturi mogu naći zadaci različitih tipova čija se rješenja zasnivaju na ovim teoremima. Mi smo izdvojili one koji su nam se činili najzanimljivijima, a pritom smo kombinirali „teorijske" i „računske" zadatke. Teorijski zadaci obično se smatraju težima od računskih i najčešće su na testovima upravo takvi zadaci najslabije riješeni, ali su obje kategorije jednako važne za kvalitetno usvajanje obrađenog gradiva. Nadamo se da ovaj članak, osim studentima i nastavnicima, može biti koristan i učenicima srednjih škola koji su usvojili pojam derivacije.

Navedimo sada ove teoreme i njihove interpretacije.

Rolleov teorem. *Neka je* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *neprekidna funkcija koja je diferencijabilna na* (a,b). *Ako je* $f(a)=f(b)=0$, *tada postoji* $c\in(a,b)$ *takav da je* $f'(c)=0$.

Lagrangeov teorem srednje vrijednosti. *Neka je* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *neprekidna funkcija koja je diferencijabilna na* (a,b). *Tada postoji* $c\in(a,b)$ *takav da je*

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

[1]Ljiljana Arambašić, PMF – Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu
[2]Anđa Valent, PMF – Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu

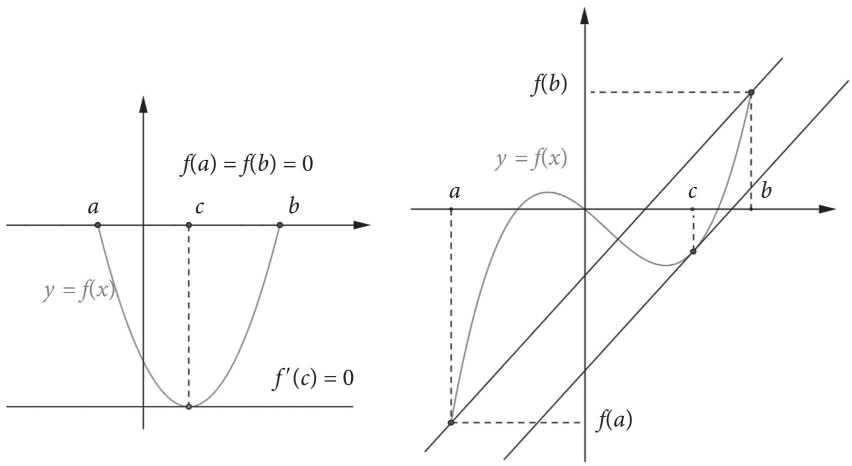
Poucak 55.indd 47 21.10.2013. 14:43:47

Geometrijska interpretacija Rolleovog teorema je sljedeća: promatramo li graf neprekidne i diferencijabilne funkcije, tada između svake dvije nultočke funkcije f postoji nultočka funkcije f', odnosno točka u kojoj je tangenta horizontalna. Fizikalna interpretacija je da će, promatramo li loptu bačenu u zrak (koja će zbog djelovanja gravitacije ponovno pasti na tlo), u nekom trenutku brzina lopte biti nula, a to je očito trenutak u kojem lopta dostiže najvišu visinu. Obje su interpretacije intuitivno sasvim logične i jasne, a sam dokaz Rolleovog teorema može se naći u skoro svim udžbenicima matematičke analize (na primjer, [1] i [2]).

Lagrangeov teorem jednostavno se dobije primjenjujući Rolleov teorem na funkciju

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),$$

gdje je f neprekidna funkcija na $[a,b]$ i diferencijabilna na (a,b). Kako je $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ koeficijent smjera pravca kroz točke $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$, a $f'(c)$ koeficijent smjera tangente na graf od f u točki $(c, f(c))$, Lagrangeov teorem kaže da uvijek možemo naći $c \in (a,b)$, tako da je tangenta u c paralelna sekanti kroz krajnje točke promatranog intervala. Fizikalna interpretacija Lagrangeovog teorema je sljedeća: putujemo li od točke A do točke B, tada će u nekom trenutku naša trenutna brzina biti točno jednaka prosječnoj brzini na tom putu. Prema tome, ako smo putovali autocestom Zagreb-Rijeka dugačkom 146.5 km i ako smo na naplatnim kućicama u Zagrebu bili u 12:00, a na naplatnim kućicama u Rijeci u 13:00, tada je naša prosječna brzina bila 146.5 km/h. Prema Lagrangeovom teoremu, u nekom smo trenutku vozili točno 146.5 km/h (i očito prekoračili maksimalnu dopuštenu brzinu).



Geometrijska interpretacija Rolleovog i Lagrangeovog teorema

Poucak 55.indd 48 21.10.2013. 14:43:48

2. Zadaci

Za početak navodimo dva primjera u kojima Rolleov teorem koristimo za rješavanje jednadžbi. Zadaci sličnog tipa mogu se naći npr. u [5].

Zadatak 1. *Odredite sva rješenja jednadžbi:*

(a) $2^{x+1} + 7^x = 2 \cdot 3^x + 5^x$;

(b) $x^n + y^n = (x+y)^n$, *gdje je* $n \in \mathbb{N}$.

Rješenje. (a) Zadanu jednadžbu možemo zapisati i kao

$$\frac{3^x - 2^x}{3-2} = \frac{7^x - 5^x}{7-5}.$$

Neka je $x_0 \in \mathbb{R}$ rješenje gornje jednadžbe. Definiramo li funkciju

$f(t) = t^{x_0}, t \in (0, \infty)$, dobivamo

$$\frac{f(3) - f(2)}{3-2} = \frac{f(7) - f(5)}{7-5}. \tag{1}$$

Primjenom teorema srednje vrijedosti na intervale $[2,3]$ i $[5,7]$ slijedi da postoje $c_1 \in (2,3)$ i $c_2 \in (5,6)$ takvi da su lijeva i desna strana u (1) jednake $f'(c_1)$ i $f'(c_2)$, redom. Dakle,

$$x_0 c_1^{x_0 - 1} = x_0 c_2^{x_0 - 1}.$$

Jedna mogućnost je $x_0 = 0$. Ako $x_0 \neq 0$, tada mora biti $c_1^{x_0-1} = c_2^{x_0-1}$, a kako su c_1 i c_2 iz disjunktnih intervala, oni su različiti i zato slijedi $x_0 = 1$.

Prema tome, jedina moguća rješenja zadane jednadžbe su 0 i 1, a direktnim uvrštavanjem vidimo da to doista i jesu rješenja.

(b) Očita rješenja ove jednadžbe su $(0, \alpha)$ i $(\alpha, 0)$, gdje je $\alpha \in \mathbb{R}$ proizvoljan. Također, ako je n neparan, rješenja su i svi $(\alpha, -\alpha), \alpha \in \mathbb{R}$. Provjerimo ima li ova jednadžba i nekih drugih rješenja.

Odaberemo proizvoljan $y_0 \in \mathbb{R}, y_0 \neq 0$, i definiramo funkciju

$$f(x) = (x + y_0)^n - x^n - y_0^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Kako je x_0 nultočka funkcije f ako i samo ako je (x_0, y_0) rješenje polazne jednadžbe, istražit ćemo nultočke od f. Iz gornje diskusije slijedi da je 0 nultočka od f u slučaju da je n paran, te da su 0 i $-y_0$ nultočke od f kada je n neparan. Pokazat ćemo da f nema drugih nultočaka, odnosno da su sva rješenja zadane jednadžbe ona koja smo već naveli.

Očito je $f'(x) = n(x+y_0)^{n-1} - nx^{n-1}$, pa je $f'(x) = 0$ ako i samo ako je $(x+y_0)^{n-1} = x^{n-1}$.

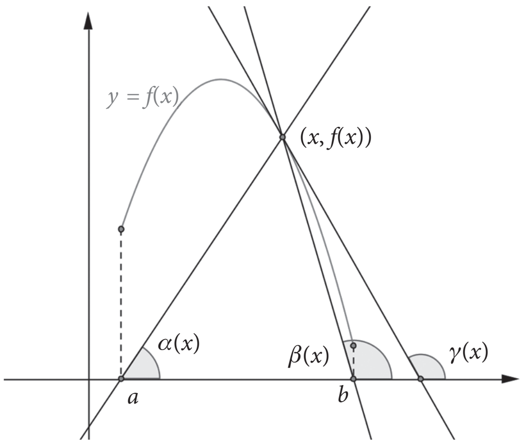
Ako je n paran broj, tada je $(x+y_0)^{n-1} = x^{n-1} \Leftrightarrow x+y_0 = x \Leftrightarrow y_0 = 0$, što je suprotno izboru od y_0 i zato f' nema nultočaka u ovom slučaju. Što se nultočaka od f tiče, jedna nultočka je 0, a ako bi postojala još neka nultočka od f, onda bi između njih, prema Rolleovom teoremu, postojala nultočka od f'. To je suprotno dokazanom, pa zaključujemo da je 0 jedina nultočka od f za $y_0 \neq 0$ i paran n.

Ako je n neparan, tada je $(x+y_0)^{n-1} = x^{n-1} \Leftrightarrow x+y_0 = \pm x \Leftrightarrow x = -\frac{y_0}{2}$ (druga mogućnost opet otpada zbog $y_0 \neq 0$). Prema tome, f' ima točno jednu nultočku. Već znamo da su u ovom slučaju 0 i $-y_0$ dvije različite nultočke od f. Kada bi funkcija f imala barem tri različite nultočke, onda bi, prema Rolleovom teoremu, funkcija f' imala barem dvije različite nultočke, a to znamo da nije. Prema tome, 0 i $-y_0$ jedine su nultočke od f za $y_0 \neq 0$ i neparan n. Time smo pronašli sve nultočke od f, pa i sva rješenja naše jednadžbe.

Za idući zadatak, koji je preuzet iz [6], prvo uvedimo neke pojmove. Neka je f funkcija koja je neprekidna na $[a,b]$ i diferencijabilna na (a,b). Za svaku točku $x \in (a,b)$ promatramo sljedeće pravce: pravac kroz $(a,0)$ i $(x, f(x))$, pravac kroz $(b,0)$ i $(x, f(x))$, te tangentu na f u točki $(x, f(x))$. Kutove koje ti pravci zatvaraju s pozitivnim dijelom x-osi označit ćemo s $\alpha(x)$, $\beta(x)$ i $\gamma(x)$, redom.

Zadatak 2. *Neka je funkcija $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna na $[a,b]$ i diferencijabilna na (a,b). Tada postoji $c \in (a,b)$ takav da je*

$$\operatorname{tg}\alpha(c) + \operatorname{tg}\beta(c) + \operatorname{tg}\gamma(c) = 0.$$



Rješenje. Uvedimo novu funkciju

$$g:[a,b] \to \mathbb{R}, \quad g(x) = f(x)(x-a)(x-b).$$

Poucak 55.indd 50 21.10.2013. 14:43:49

Tada je g neprekidna na $[a,b]$, diferencijabilna na (a,b) i $g(a)=g(b)=0$. Prema tome, postoji $c\in(a,b)$ takav da je $g'(c)=0$, to jest

$$f'(c)(c-a)(c-b)+f(c)(c-b)+f(c)(c-a)=0.$$

Dijeljenjem s $(c-a)(c-b)\neq 0$ dobijemo

$$f'(c)+\frac{f(c)}{c-a}+\frac{f(c)}{c-b}=0.$$

Kako je $f'(c)$ koeficijent smjera tangente na f u točki $(c,f(c))$, to je $f'(c)=\operatorname{tg}\gamma(c)$. Nadalje, $\frac{f(c)}{c-a}$ je koeficijent pravca kroz $(a,0)$ i $(c,f(c))$, a $\frac{f(c)}{c-b}$ je koeficijent pravca kroz $(b,0)$ i $(c,f(c))$, pa je

$$\frac{f(c)}{c-a}=\operatorname{tg}\alpha(c) \quad \text{i} \quad \frac{f(c)}{c-b}=\operatorname{tg}\beta(c).$$

Time je tvrdnja dokazana.

U sljedećem zadatku promatramo niz $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, n\in\mathbb{N}$. Dobro je poznato da je $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$. Dokaz da je ovaj niz konvergentan i da je njegov limes upravo e obično se provodi u nekoliko koraka, kao što je navedeno u sljedećem zadatku. Sami dokazi mogu se provesti na različite načine, a mi, naravno, prezentiramo onaj u kojemu se koristi teorem srednje vrijednosti.

Zadatak 3. *Neka su zadani nizovi* $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *i* $b_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. *Tada vrijedi:*

(a) niz (a_n) *je rastući;*

(b) niz (b_n) *je padajući;*

(c) za sve $n\in\mathbb{N}$ *vrijedi* $a_n\le e\le b_n$.

Rješenje. Za proizvoljno odabrani n promatramo funkciju $f(x)=x^n$. Prema Lagrangeovom teoremu srednje vrijednosti, za sve $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, postoji $c\in(a,b)$ takav da je

$$\frac{b^n-a^n}{b-a}=nc^{n-1}. \tag{2}$$

Kako je $c<b$, imamo

$$\frac{b^n-a^n}{b-a}\le nb^{n-1}\Rightarrow b^n-a^n\le nb^n-nab^{n-1}.$$

Poucak 55.indd 51 21.10.2013. 14:43:49

Odaberemo li $a=1$ i $b=\left(\frac{n}{n-1}\right)^{\frac{1}{n}}$, dobivamo

$$\frac{n}{n-1}-1\le\frac{n^2}{n-1}-n\left(\frac{n}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{n}},$$

odakle slijedi

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\le\frac{n+1}{n}\Leftrightarrow\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\le 1+\frac{1}{n}.$$

Sada potenciranjem na n dobijemo $a_{n-1}\le a_n$.

Analogno, zbog $c>a$ iz (2) slijedi $b^n-a^n\ge na^{n-1}b-na^n$. Uvrštavanjem $a=\left(\frac{n-2}{n-1}\right)^{\frac{1}{n}}$ i b = 1 te provođenjem računa kao maloprije, dobijemo $b_{n-1}\le b_{n-2}$. Time smo provjerili prve dvije tvrdnje.

Za dokaz treće relacije primjenjujemo Lagrangeov teorem na funkciju $g(x)=\ln x$ na intervalima $\left[1,1+\frac{1}{n}\right], n\in\mathbb{N}$. Tako dobijemo niz brojeva $c_n\in\left(1,1+\frac{1}{n}\right)$ za koje vrijedi

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln 1=\frac{1}{c_n}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right),$$

to jest,

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{nc_n}.$$

Kako je $1<c_n<1+\frac{1}{n}$, to je $\frac{n}{n+1}<\frac{1}{c_n}<1$, i zato

$$\frac{1}{n+1}\le\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\le\frac{1}{n}.$$

Množenjem lijeve nejednakosti s $n+1$ dobijemo

$$1\le\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\Leftrightarrow 1\le\ln b_n\Leftrightarrow e\le b_n,$$

a množenjem desne nejednakosti s n dolazimo do

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\le 1\Leftrightarrow\ln a_n\le 1\Leftrightarrow a_n\le e.$$

Poucak 55.indd 52 21.10.2013. 14:43:54

Time smo dokazali i tvrdnju pod (c).

Sljedeći zadatak primjer je tipičnih zadataka kada se od jedne funkcije koja zadovoljava pretpostavke Rolleovog teorema konstruiraju nove na koje se također može primijeniti isti teorem.

Zadatak 4. *Neka je funkcija* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *neprekidna na* $[a,b]$, *diferencijabilna na* (a,b) *i neka je* $f(a)=f(b)=0$. *Tada vrijedi:*

(a) za svaki $r\in\mathbb{R}$ *postoji* $c\in(a,b)$ *takav da je* $f'(c)=r(f(c))^2$;

(b) za svaki $r\in\mathbb{R}, r\neq 0,$ *postoji* $c\in(a,b)$ *takav da je* $rf'(c)+f(c)=0.$

Rješenje. (a) Kako je f neprekidna, to je dobro definirana funkcija

$F:[a,b]\to\mathbb{R}, F(x)=\int_a^x f(t)dt$. Tada je F primitivna funkcija od f na (a,b), to jest, vrijedi $F'(x)=f(x), x\in(a,b)$. Definiramo

$$g(x)=f(x)e^{-rF(x)},\quad x\in[a,b].$$

Funkcija g zadovoljava pretpostavke Rolleovog teorema, pa postoji $c\in(a,b)$ takav da je $g'(c)=0$. Kako je

$$g'(x)=f'(x)e^{-rF(x)}+f(x)e^{-rF(x)}(-rF'(x))=f'(x)e^{-rF(x)}-r(f(x))^2e^{-rF(x)},$$

slijedi $f'(c)e^{-rF(c)}-r(f(c))^2e^{-rF(c)}=0.$ Odavde dijeljenjem s $e^{-rF(c)}\neq 0$ slijedi $f'(c)=r(f(c))^2.$

(b) Uvedimo funkciju

$$g(x)=e^{\frac{x}{r}}f(x),\quad x\in[a,b].$$

Tada g zadovoljava iste pretpostavke kao i f, pa na nju možemo primijeniti Rolleov teorem. Postoji, dakle, $c\in(a,b)$ takav da je $g'(c)=0,$ to jest

$$\frac{1}{r}e^{\frac{c}{r}}f(c)+e^{\frac{c}{r}}f'(c)=0.$$

Još ostaje pomnožiti relaciju s $re^{-\frac{c}{r}}$.

U posljednja dva zadatka Rolleov teorem koristimo za računanje nultočki polinoma.

Poucak 55.indd 53 21.10.2013. 14:44:13

Zadatak 5. *(a) Pokažite da polinom* $p(x)=2x^7+13x^5+12x-17$ *ima točno jednu realnu nultočku.*

(b) Neka je p *polinom stupnja* $n\geq 2$ *s realnim koeficijentima*

$$p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_1x+a_0, \quad a_n\neq 0.$$

Dokažite da, ako je $a_{n-1}^2-\frac{2n}{n-1}a_na_{n-2}<0$, *onda* p *ima najviše* $n-2$ *različitih realnih nultočki.*

Rješenje. (a) Prvo uočimo da je $p(0)=-17<0$ i $p(1)=10>0.$ Kako je p neprekidna funkcija, to postoji $x_0\in(0,1)$ takav da je $p(x_0)=0,$ dakle, p ima barem jednu realnu nultočku. Ako bi postojala još neka realna nultočka x_1 od p, tada bi, prema Rolleovom teoremu, postojala točka c između x_0 i x_1 takva da je $p'(c)=0.$ No, kako je $p'(x)=14x^6+60x^4+12>0$ za sve $x\in\mathbb{R},$ takav c ne postoji. Prema tome, p ima točno jednu realnu nultočku.

(b) Dokaz provodimo matematičkom indukcijom po n. Označimo

$$D(p)=a_{n-1}^2-\frac{2n}{n-1}a_na_{n-2}.$$

Ako je $n=2$, tada je $p(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$, pa je $D(p)=a_1^2-4a_2a_0$ upravo diskriminanta kvadratne jednadžbe. Kada je $D(p)<0$, tada kvadratna jednadžba nema realnih rješenja, tj. ima $n-2=0$ realnih rješenja. Time je tvrdnja dokazana za $n=2$.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za polinome stupnja najviše $n-1$ i dokažimo je za polinome stupnja n. Neka je p polinom stupnja n takav da je

$$D(p)=a_{n-1}^2-\frac{2n}{n-1}a_na_{n-2}<0.$$

Tada je

$$p'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+(n-2)a_{n-2}x^{n-3}+\ldots+2a_2x+a_1$$

i

$$\begin{aligned}D(p')&=((n-1)a_{n-1})^2-\frac{2(n-1)}{n-2}na_n(n-2)a_{n-2}\\&=(n-1)^2a_{n-1}^2-2n(n-1)a_na_{n-2}\\&=(n-1)^2D(p)<0.\end{aligned}$$

Poucak 55.indd 54 21.10.2013. 14:44:27

Kako je p' polinom stupnja $n-1$, na njega možemo primijeniti pretpostavku indukcije; dakle, p' ima najviše $((n-1)-2)=n-3$ različitih realnih nultočki.

Pretpostavimo sada da p ima barem $n-1$ različitih realnih nultočki i označimo ih s $x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}$. Primijenimo li Rolleov teorem na intervale $[x_1,x_2],[x_2,x_3],\ldots,[x_{n-2},x_{n-1}]$, dobit ćemo točke $c_i\in(x_i,x_{i-1}),i=1,\ldots,n-2,$ tako da je $p'(c_i)=0,i=1,\ldots,n-2.$ Točke c_i su iz disjunktnih intervala, pa p' ima $n-2$ različite realne nultočke, što ne može biti jer smo već utvrdili da p' ima najviše $n-3$ različitih realnih nultočaka. Time smo pokazali da p ima najviše $n-2$ različite realne nultočke.

Tvrdnja iz sljedećeg zadataka je propozicija 3 iz [3].

Zadatak 6. *(a) Neka je p ne-nul polinom s realnim koeficijentima, koji ima točno m ne-nul koeficijenata. Dokažite da p ima najviše $m-1$ različitih pozitivnih i najviše $m-1$ različitih negativnih nultočki. Posebno, ako p ima (odnosno, nema) nulu kao nultočku, onda ima najviše $2(m-1)$ (odnosno, $2(m-1)+1$) različitih realnih nultočki.*

(b) Pokažite da polinom

$$p(x)=x^{2013^{2013}}-2013x+2013$$

ima najviše 4 različite realne nultočke.

Rješenje. Pokažimo najprije kako se (b) vidi direktno iz (a). Polinom p ima $m=3$ ne-nul koeficijenta. Iz (a) slijedi da p ima najviše 2 različite pozitivne i najviše 2 različite negativne nultočke. Kako 0 očito nije nultočka od p, slijedi da p ima najviše 4 različite realne nultočke.

Sada prijeđimo na dokaz (a) tvrdnje. Primijetimo najprije da je dovoljno pokazati tvrdnju o broju pozitivnih nultočki, jer ako definiramo polinom q kao $q(x):=p(-x)$, tada on ima jednak broj ne-nul koeficijenata kao i p, a negativne nultočke od p su pozitivne nultočke od q.

Dokaz provodimo indukcijom po m. Za $m=1$, p je oblika $p(x)=ax^k$ ($a\neq 0$), to jest p je ili ne-nul konstanta i tada nema nultočki, ili p ima samo nulu kao nultočku. Time smo provjerili bazu indukcije jer je $m-1=0$, a p nema pozitivnih ni negativnih nultočki.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve polinome s točno m ne-nul koeficijenata i da je p proizvoljni polinom s točno $m+1$ ne-nul koeficijenata. Zapišimo p u obliku

$$p(x)=a_1x^{n_1}+a_2x^{n_2}+\ldots+a_{m+1}x^{n_{m+1}},$$

Poucak 55.indd 55 21.10.2013. 14:44:30

pri čemu vrijedi $0 \le n_1 < n_2 \ldots < n_{m+1}$ i $a_i \neq 0$ za $i = 1, \ldots, m+1$. Izlučimo li x^{n_1}, p možemo zapisati u obliku $p(x) = x^{n_1} q(x)$, gdje je

$$q(x) = a_1 + a_2 x^{n_2 - n_1} + \ldots + a_{m+1} x^{n_{m+1} - n_1}.$$

Svaka pozitivna nultočka od p je pozitivna nultočka i od q, i obratno. Derivacija

$$q'(x) = (n_2 - n_1) a_2 x^{n_2 - n_1 - 1} + \ldots + (n_{m+1} - n_1) a_{m+1} x^{n_{m+1} - n_1 - 1}$$

je polinom s m ne-nul koeficijenata. Prema pretpostavci indukcije, q' ima najviše $m-1$ različitih pozitivnih nultočaka. Prema Rolleovom teoremu, između svake dvije (pozitivne) nultočke od q leži jedna (pozitivna) nultočka od q', pa q, a onda i p, ima najviše m različitih pozitivnih nultočki. Time je tvrdnja dokazana.

Literatura

1. B. Guljaš, *Matematička analiza I i II, predavanja*, http://web.math.pmf.unizg.hr/~guljas/skripte/MATANALuR.pdf
2. S. Kurepa, *Matematička analiza 2*, Školska knjiga 1997., Zagreb.
3. C. Rousseau, *Rolle's theorem: from a simple theorem to an extremely powerful tool*, http://wikis.zum.de/dmuw/images/a/ad/Rolle_Khovanskii.pdf
4. N. Schaumberger, *More Applications of the Mean Value Theorem*, The College Mathematics Journal, Vol. 16, No. 5 (Nov., 1985.), pp. 397–398.
5. R. Smith, *Rolle over Lagrange-Another Shot at the Mean Value Theorem*, The College Mathematics Journal, Vol. 17, No. 5 (Nov., 1986.), pp. 403–406.
6. J. Tong, *A Property Possessed by Every Differentiable Function*, The College Mathematics Journal, Vol. 35, No. 3 (May, 2004.), pp. 216–217.

Poucak 55.indd 56 21.10.2013. 14:44:33