Pravilo trojno

Ljubica Baćić[1], Vojislav Đuračković[2]

1. Uvod

Pravilo trojno je metoda gospodarskog računa koja ima veliku primjenu u trgovini i ekonomiji. Već u 7. razredu osnovne škole učenici se prvi put susreću s ovom metodom, u sklopu nastavne cjeline „Proporcionalnost i obrnuta proporcionalnost". Tada im je ponajveći problem odrediti jesu li veličine proporcionalne ili obrnuto proporcionalne, što je ujedno izazov i za učitelje matematike pri obradi ovih nastavnih sadržaja. Izazov je veći ako uzmemo u obzir da želimo konceptualno učenikovo znanje, a ne proceduralno. Proceduralno znanje je sposobnost slijeđenja niza sekvencijalnih koraka u rješavanju matematičkog zadatka. Praksa je pokazala da učenici proceduru zapamte nakon što su riješili dovoljan broj zadataka, ali pritom uopće ne znaju zašto to rade upravo na takav način.

Zašto se određeni zadatak radi upravo na takav način? Može li se zadatak riješiti na neki drugi način? Koja je metoda pri rješavanju tog zadatka efikasnija? Niz je to pitanja koja vode k stvaranju konceptualnog znanja kod učenika. Poticati logičko mišljenje i zaključivanje, prikazivati matematičke sadržaje na različite načine doprinijet će formiranju konceptualnog znanja.

U nastavku želimo ukazati kako je radi brzine i rutine, a s druge strane razumijevanja matematičkih koncepta, potrebno uspostaviti svojevrsnu ravnotežu između proceduralnog i konceptualnog mišljenja.

Stoga se pitamo treba li riješiti zadatak primjenom pravila trojnog ili koeficijenta proporcionalnosti? Možda metoda pravila trojnog ima zorniji i jasniji pristup, dok računanje koeficijenta proporcionalnosti tjera na razmišljanje što on zapravo predstavlja. Kod pravila trojnog učenici rješavaju proporciju, dok uz pomoć koeficijenta proporcionalnosti dvaput rješavaju linearnu jednadžbu s jednom nepoznanicom.

Zamjerka na pravilo trojno je pristup koji naglašava slijeđenje niza sekvencijalnih koraka koji vode k rješenju zadatka. Imajte na umu kako izbor metode neće zaobići pitanje jesu li dane veličine proporcionalne ili obrnuto proporcionalne. Treba istaknuti i prednost složenog pravila trojnog koje nudi kraći i jednostavniji način rješavanja zadataka.

[1]Ljubica Baćić, OŠ Nikole Andrića, Vukovar, ljubica.bacic@skole.hr
[2]Vojislav Đuračković, OŠ Negoslavci, Negoslavci, vojislav.djurackovic@gmail.com

2. Jednostavno pravilo trojno

Pravilo trojno je *jednostavno* ako veličina x zavisi samo od jedne jedine druge veličine. Pri tome veličine mogu biti proporcionalne ili obrnuto proporcionalne. Za proporcionalne veličine vrijedi: *Koliko se puta poveća (smanji) jedna veličina, toliko se puta poveća (smanji) druga veličina*. Npr. visina bora proporcionalna je duljini sjene, proteklo vrijeme proporcionalno je prijeđenoj udaljenosti uz uvjet da se brzina ne mijenja... Pritom strelice postavljamo u istom smjeru.

Za obrnuto proporcionalne veličine vrijedi: *Koliko se puta poveća (smanji) jedna veličina, toliko se puta smanji (poveća) druga veličina*. Npr. broj radnika obrnuto je proporcionalan vremenu kopanja kanala, prosječna brzina obrnuto je proporcionalna proteklom vremenu... U tom slučaju strelice postavljamo u suprotnom smjeru. Analizirajmo na sljedećim primjerima prednosti i nedostatke primjene pravila trojnog.

Primjer 1. *Bor visok 12 m baca sjenu duljine 16 m. Koliko je visok bor koji baca sjenu duljine 24 m?*

Rješenje: Nepoznatu visinu bora označimo s x. Koliko je puta bor viši, toliko je puta dulja njegova sjena. Duljina sjene proporcionalna je visini bora koji baca tu sjenu.

visina bora (m)	duljina sjene (m)
12 ↑	16 ↑
x	24

$$x : 12 = 24 : 16$$
$$16 \cdot x = 12 \cdot 24$$
$$x = \frac{12 \cdot 24}{16}$$
$$x = 18$$

Bor koji baca sjenu duljine 24 m ima visinu 18 m.

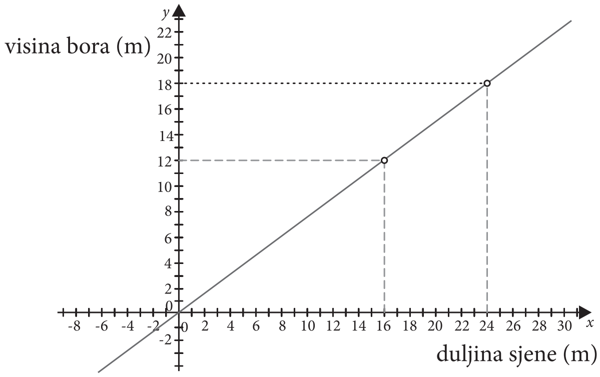
Drugi pristup rješavanju ovog zadatka bio bi primjenom koeficijenta proporcionalnosti koji odgovara količniku proporcionalnih veličina. Uz oznake y za visinu bora i x za duljinu sjene, koeficijent proporcionalnosti $k = y : x$ lako možemo izračunati iz početnih uvjeta.

$$y = k \cdot x$$
$$k = \frac{y}{x}$$
$$k = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} = 0.75$$

Koeficijent proporcionalnosti govori nam kolika duljina sjene odgovara boru visine 1 m. Učenici trebaju usvojiti da je koeficijent proporcionalnosti konstantni omjer, te da se uvrštavanjem poznatih veličina u dani omjer lako izračuna nepoznata veličina.

$$y = k \cdot x$$
$$y = 0.75 \cdot 24$$
$$y = 18$$

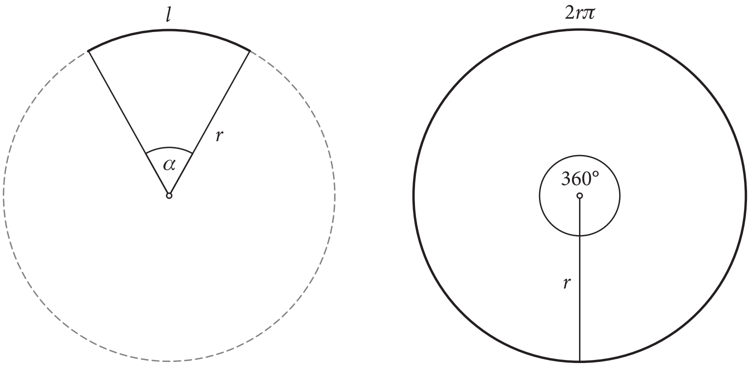
Grafički prikaz ovih proporcionalnih veličina proširuje logičko i matematičko mišljenje o odnosima danih veličina te pridonosi konceptualnom promišljanju. Na osi x bilježit ćemo duljinu sjene, a na osi y visinu bora. Crtajući odgovarajuće paralele s osi x i osi y očitavamo tražene vrijednosti. Učenicima bi trebalo naglasiti kako pravac koji odgovara grafičkom prikazu proporcionalnosti $y = k \times x$, $k > 0$, u koordinatnom sustavu u ravnini sadrži ishodište. Grafički prikaz proporcionalnosti bi po strani trebao ostaviti proceduralno rješavanje zadatka. Naime, pravac je određen dvjema točkama, ishodištem i točkom iz uvjeta zadatka (vidi Sliku 1).



Slika 1. Grafički prikaz proporcionalnosti.

Problemi koje je poželjno predvidjeti kriju se već u slučaju kada su veličine obrnuto proporcionalne. Pravilom trojnim rutinski pristupamo problemu. Ako pak zadatak pokušamo riješiti koeficijentom obrnute proporcionalnosti, moramo imati na umu da on odgovara umnošku zadanih veličina. Zbog složenosti se grafički prikaz obrnute proporcionalnosti ne obrađuje u osnovnoj školi.

Nešto kasnije, također u osnovnoj školi, i to u sklopu nastavne cjeline „Kružnica i krug", uči se, između ostalog, o duljini kružnice i kružnog luka. Učenici najprije usvoje formulu prema kojoj se računa duljina kružnice, tj. opseg kruga, a zatim primjenom proporcionalnosti izvode formulu za duljinu kružnog luka. Naime, duljina kružnog luka i veličina njemu pridruženog središnjeg kuta proporcionalne su veličine (vidi Sliku 2). Kako formulu želimo zapisati u generaliziranom obliku, pravilo trojno je obećavajući pristup. Niti pristup izvođenju formule primjenom koeficijenta proporcionalnosti, niti grafički prikaz proporcionalnosti neće učiniti izvod lakšim, čak naprotiv.



Slika 2. Duljina kružnog luka i veličina njemu pridruženog središnjeg kuta proporcionalne su veličine

Kružnom luku duljine l pridružen je središnji kut α, a cijeloj kružnici duljine 2r središnji kut od 360° pa vrijedi proporcionalnost:

$$\begin{array}{cc} l \uparrow & \alpha \uparrow \\ 2r\pi \uparrow & 360^\circ \uparrow \\ \hline \end{array}$$

$$l : 2r\pi = \alpha : 360^\circ$$
$$l \cdot 360^\circ = 2r\pi \cdot \alpha$$
$$l = 2r\pi \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$$
$$l = r\pi \cdot \frac{\alpha}{180^\circ}$$

Analogno ovome izvodi se i formula za površinu kružnog isječka.

Mišljenja smo kako je pravilo trojno još više došlo do izražaja primjenom u zadacima okarakteriziranim sa složenim pravilom trojnim. Prije nego li prijeđemo na složeno pravilo trojno, dotaknimo se i fenomena poznatog pod nazivom „iluzija linearnosti" ili „zamka linearnosti". Iluzija linearnosti predstavlja sklonost mišljenju kako su određene veličine linearno ili proporcionalno povezane čak i u situacijama u kojima to nije opravdano (za više informacija o ovom problemu pogledaj [6]). Pogledajmo konkretno na jednom primjeru o čemu se zapravo radi.

Primjer 2. *Velika pizza promjera 30 cm stoji 32 kn. Koliko bi trebala stajati mala pizza iste debljine, ali promjera 15 cm?*

Većini se srednjoškolaca odgovor (16 kn) temelji na zaključku: ako je promjer dvostruko manji, i cijena treba biti dvostruko manja, ne uzimajući u obzir površinu.

Uzimajući u obzir navedeno, dalo bi se zaključiti kako je proceduralno znanje dovelo do ove pogreške. Ipak, mislimo kako ista pogreška nije posljedica primjene pravila trojnog već sveprisutnih linearnih odnosa. U školskom procesu trebalo bi malo više naglasak staviti i na odnose koji su nelinearni.

3. Složeno pravilo trojno

Složeno pravilo trojno obrađuje se u 3. razredu srednje škole, kao i na pojedinim fakultetima u sklopu kolegija „Gospodarska matematika". Njime se nepoznata veličina računa iz 5, 7, 9 ili više poznatih veličina koje su joj proporcionalne ili obrnuto proporcionalne.

Primjer 3. *Kanal dug* 100 *m, dubok* 1 *m i širok* 120 *m iskopalo je* 50 *radnika u* 15 *dana, radeći* 8 *h na dan. Koliko bi radnika trebalo zaposliti kako bi se iskopao kanal dug* 150 *m, dubok* 2 *m i širok* 180 *m u* 20 *dana, ako se dnevno radi po* 9 *h?*

Rješenje: Označimo s x nepoznat broj radnika. Zapišimo odgovarajuće podatke iz zadatka u stupce:

broj radnika	dužina (m)	dubina (m)	širina (m)	dani	sati
50 ↑	100 ↑	1 ↑	120 ↑	15 ↓	8 ↓
x	150	2	180	20	9

$$
\begin{aligned}
x : 50 &= 150 : 100 \\
&= 2 : 1 \\
&= 180 : 120 \\
&= 15 : 20 \\
&= 8 : 9
\end{aligned}
$$

$$x = \frac{50 \cdot 150 \cdot 2 \cdot 180 \cdot 15 \cdot 8}{100 \cdot 1 \cdot 120 \cdot 20 \cdot 9}$$

$$x = 150$$

Drugi način rješavanja ovog zadatka je uočavanjem proporcionalnosti. Trebamo biti pažljivi kako ne bismo upali u već spomenutu „zamku linearnosti". Zanimljivo je pogledati kako se veličine odnose međusobno. Naime, broj radnika proporcionalan je dužini kanala. To zapravo znači da bi se broj radnika povećao za neki faktor $k_1 = \frac{150}{100} = 1.5$ te bi iznosio $x = 50 \times 1.5 = 75$. No, pitanje je možemo li tako zaključivati jer kanal ima oblik kvadra, a volumen kvadra jednak je umnošku dužine, širine i visine kvadra. Dakle, ne smijemo zanemariti ostale zadane veličine. Također, broj radnika proporcionalan je dubini i širini kanala pa su pripadni faktori $k_2 = \frac{2}{1} = 2$ i $k_3 = \frac{180}{120} = 1.5$. Stoga se broj radnika poveća $k_1 \cdot k_2 \cdot k_3$ puta, odnosno

$$x = 50 \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 = 50 \cdot 4.5 = 225$$

Broj radnika obrnuto je proporcionalan vremenu u danima i satima. Stoga se broj radnika x_1 smanji $k_4 \cdot k_5$ puta, pri čemu je $k_4 = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}$ i $k_5 = \frac{9}{8}$. Onda imamo

$$x = x_1 \cdot \frac{1}{k_4 \cdot k_5} = 225 \cdot \frac{2}{3} = 150$$

Isti problem može se riješiti i na sljedeći način. Naime, razmatrat ćemo koliko vremena treba da bi jedan radnik obavio cjelokupan posao.

1. 50 radnika radi 15 dana po 8 sati dnevno,
   tj. 50 radnika obavi posao za 15 × 8 = 120 sati.
   1 radnik isti posao obavi za 50 × 120 = 6000 sati.

   Istaknimo kako se posao sastoji u iskopu kanala dimenzija

   100 m × 1 m × 120 m, tj. iskopu kvadra volumena 12 000 m^3 zemlje.

2. Drugi kanal ima dimenzije 150 m × 2 m × 180 m, odnosno potrebno je iskopati kanal također u obliku kvadra, ali volumena 54 000 m^3.

   x radnika radi 20 dana po 9 sati dnevno,
   x radnika obavi posao za 20 × 9 = 180 sati.
   1 radnik taj posao obavi za 180 × *x* sati.

Označimo sa x_1 i x_2 vremena trajanja rada, a sa y_1 i y_2 količine iskopane zemlje. Te su veličine proporcionalne, tj. $y_1 = k \cdot x_1$ i $y_2 = k \cdot x_2$.

$$x_1 = 6000\ \mathrm{h}$$
$$y_1 = 12000\ \mathrm{m}^3$$
$$k = \frac{y_1}{x_1} = \frac{12000}{6000} = 2$$

Koeficijent proporcionalnosti govori nam kako se u jednom satu iskopa 2 m^3 zemlje. Koliko je onda radnika radilo kako bi iskopali 54 000 m^3 zemlje?

$$x_2 = 180 \cdot x$$
$$y_2 = 54000\ \mathrm{m}^3$$
$$k = 2$$

$$x_2 = \frac{y_2}{k} = \frac{54000}{2} = 27000$$
$$180 \cdot x = 27000$$
$$x = 27000 : 180$$
$$x = 150$$

Kao što možete primijetiti, opet smo došli do točnog rješenja. Odabir metode stvar je vlastitog izbora. Primjenom složenog pravila trojnog došli smo do istog rezultata kao i uočavanjem linearnosti medu veličinama, samo na kraći i zorniji način.

4. Zaključak

Na kraju istaknimo kako je matematička kompetencija jedna od ključnih kompetencija za cjeloživotno učenje. S ciljem da obuhvati i ujedini temeljna znanja, vještine i sposobnosti te vrijednosti i stavove, matematika mora ponuditi i proceduru i matematički način mišljenja. Konkretno u našem slučaju, izbor metode pri rješavanju ranije spomenutih zadataka samo je jedan od načina kako uspostaviti korelaciju unutar matematike.

Literatura

1. Z. Šikić, I. Golac-Jakopović, M. Vuković, L. Krnić, *Matematika 7, udžbenik i zbirka zadataka za sedmi razred osnovne škole, prvo polugodište*, Profil, Zagreb, 2007.
2. B. Jagodić, R. Svedrec, *Matematika 7, za izbornu i dodatnu nastavu*, Školske novine, Zagreb, 2000.
3. V. Erceg, S. Varošanec, *Matematika 3, udžbenik i zbirka zadataka za 3. razred ugostiteljsko-turističkih škola*, Element, Zagreb, 2009.
4. B. Relić, *Gospodarska matematika*, Hrvatska zajednica računovođa i financijskih djelatnika, Zagreb, 2002.
5. M. Rajter, *Ispitivanje jačine izraženosti iluzije linearnosti kod učenika srednjih škola*, Disertacija, Filozofski fakultet, Zagreb, 2006.
6. N. Pavlin-Bernardić, V. Vlahović-Štetić, *Iluzija linearnosti*, Poučak, 47(2011.),12-17
7. http://oss.unist.hr/zg/rif/kolegiji/posl_mat/20091020_posmat.pdf
8. http://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/metodika/materijali/mnm3nastavni_sat_matematike.pdf