

Idealan raspored n točaka na sferi

IZET KALABA¹

1. Uvod

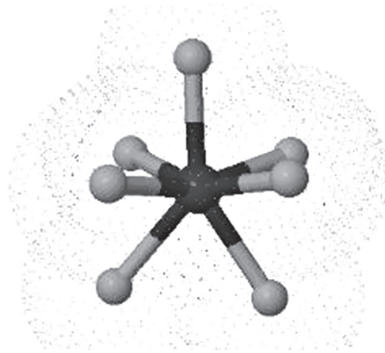
U ovom članku razmatramo raspored n točaka na sferi, čiji je zbroj svih međusobnih udaljenosti maksimalan. Takav raspored točaka skupa S_n na sferi nazvat ćemo *idealnim*. Iz tog maksimuma odredit ćemo prosječnu međusobnu udaljenost točaka skupa i to nazvati *normom* skupa S_n , u oznaci $|S_n|$. Na kraju, izračunat ćemo normu sfere, $|S_\infty|$. Do većine zaključaka došlo se uz pomoć računala, a ne strogo matematički.

Ne umanjujući općenitost, sva razmatranja radimo na jediničnoj sferi. Za veći broj n koristit ćemo računalnu potporu i vizualizaciju programskog jezika BASIC. Za mali broj n izračun je jednostavan, a raspored točaka manje-više očekivan. I tu smo koristiti linije koda kako bi čitatelji, manje vični programiranju, s lakoćom pratili program s više linija koda koji traži idealan raspored točaka pri većim n . Čitatelj može temu članka pratiti i bez poznavanja programa i njegova iščitavanja.

Potreba traženja idealnog rasporeda točaka na sferi javlja se pri promatranju različitih modela jedne te iste molekule, konkretno jodova fluorovodika IF_7 . Jedni autori navode model peterostrane bipiramide, sl. 1.a, [2], a drugi autori [3] model na sl. 1.b:



Slika 1.a Oblik 1-5-1



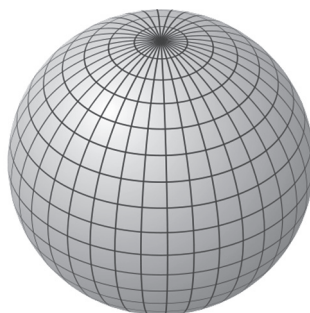
Slika 1.b Oblik 1-4-2

Budući da se u molekularnoj geometriji oblik molekule ili iona temelji na elektrostatskom odbijanju elektrona, izračunat ćemo koji oblik na jediničnoj sferi ima veći zbroj udaljenosti između svih 7 atoma F. Za to ćemo koristiti računalo i program

¹Izet Kalaba, Srednja škola fra Andrije Kačića Miošića, Ploče

u osobnoj izvedbi. I dok kemičar pri određivanju oblika molekule uzima u obzir i ostala stereokemijska pravila VSEPR teorije, nas će zanimati samo spomenuto pravilo odbijanja elektrona koje je zapravo najvažnije.

Matematičar uvijek generalizira problem, dajući mu određenu apstrakciju, tako da se može prijeći na molekulu tipa AS_n , gdje je za središnji atom A vezano n atoma S . Čak možemo izostaviti središnji atom A i prijeći na novu molekulu tipa S_n i pustiti da n teži u beskonačno, dakle do S_∞ , gdje S nije oznaka za sumpor već za skup točaka. Razmatranja prenosimo u matematički prostor, a temu definiramo kao matematički problem. Računanja su, pak, najvećim dijelom rađena numerički, pomoću računala, gdje program razmješta n točaka u sjecišta paralela i meridijana na sferi, crpeći sve moguće varijacije razmještaja. Program bi se mogao optimizirati tako da se ne traže sve varijacije razmještaja, nego kombinacije, što je kod većeg n dijelom i učinjeno.



Slika 2.

Program izvršava računanja na sljedeći način: na početku, svih n točaka smješteno je u sjevernom polu, zatim se n -ta (zadnja) točka spusti po nultom meridijanu za 10° , napravi cijeli krug udesno po toj paraleli, potom se nultim meridijanom spusti za sljedećih 10° , opet obiđe cijeli krug po novoj paraleli i sve tako dok ne dođe u južni pol. Tada se vraća u sjeverni pol, a $n-1$ (predzadnja) točka spusti se po nultom meridijanu za 10° , te prethodna n -ta točka ponovi sva svoja kretanja dok obje ne dođu u južni pol. Time je i predzadnja točka obišla cijelu sferu kao i zadnja. Između svakog koraka predzadnje točke po nultom meridijanu i svim paralelama, zadnja točka prebriše cijelu sferu (diskontinuirano – koracima po zadanih 10°).

Postupak se ponavlja dok sve razmatrane točke, osim prve A_1 , ne dođu u južni pol. Jedino druga točka A_2 nije prebrisala sferu već se spustila u južni pol po nultom meridijanu. U svakom novom koraku bilo koje točke, program računa zbroj svih međusobnih udaljenosti točaka, u oznaci m . Program bilježi najveće m , označava ga s Max i iščitava koordinate točaka za tu vrijednost. Na kraju članka u *Prilogu* za $n = 3$ grafom su predočene sve vrijednosti prosječnih udaljenosti dok dvije točke šetaju sferom, A_3 i A_2 , a točka A_1 fiksirana je u sjevernom polu. Ovo je prirodan algoritam, ali se za veći broj točaka njihovo kretanje mora racionalizirati; nema potrebe da sve prebrišu sferu, već im se da da prebrišu dio sfere, npr. neke točke zadržavaju se samo

u sjevernoj polusferi, uključujući i ekvatorijalnu kružnicu. Kada se u tom prostoru nađe *Max*, onda se taj prostor napadne sitnijim koracima kako bi se *Max* povećao. Opasno je odmah krenuti krupnijim koracima pretrage kako bi se program ubrzao, jer bi se pri krupnim koracima mogao preskočiti idealan raspored točaka.

2. Počnimo od skupa S_4

Najprije, dvije točke na sferi najudaljenije su ako su dijametralno suprotne. Tri točke međusobno su najudaljenije ako su u vrhovima jednakostraničnog trokuta na najvećoj kružnici sfere. Uvijek ćemo za prvu točku skupa S_n uzeti točku A_1 s koordinatama $(0, 0, 1)$ i nazvati je *sjeverni pol*. Za drugu točku A_2 uzimamo koordinate $(x_2, 0, z_2)$, nulti meridijan, zbog bolje orijentacije i vizualizacije te bržeg rada programa. Skup od 4 točke na sferi proizvoljno raspoređene možemo označiti s C_4 , a ako ih razmatramo nekoliko, onda s C_4^1, C_4^2 itd., ali samo onaj raspored 4 točke koji ima najveći zbroj međusobnih udaljenosti dobiva oznaku S_4 . $|S_4|$ je oznaka za prosječnu međusobnu udaljenost točaka skupa S_4 , općenito:

$$|S_n| = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n |A_i A_j|}{n(n-1)/2}$$

Slijedi program koji će rasporediti četiri točke na sferi s maksimalnim zbrojem svih međusobnih udaljenosti. Radimo sa sfernim koordinatama.

```
Max = 0: Pi = asn(1)*2: n=18

for a2=0 to Pi step Pi/n
  b2=0
  x2=sin(a2)*cos(b2):y2=sin(a2)*sin(b2):z2=cos(a2)
  d1=sqr((0-x2)^2+(0-y2)^2+(1-z2)^2)

  for a3=0 to Pi step Pi/n
    for b3=0 to Pi step Pi/n
      x3=sin(a3)*cos(b3):y3=sin(a3)*sin(b3):z3=cos(a3)
      d2=sqr((0-x3)^2+(0-y3)^2+(1-z3)^2)
      d3=sqr((x3-x2)^2+(y3-y2)^2+(z3-z2)^2)

      for a4=0 to Pi step Pi/n
        for b4=0 to 2*Pi step Pi/n
          x4=sin(a4)*cos(b4):y4=sin(a4)*sin(b4):z4=cos(a4)
          d4=sqr((0-x4)^2+(0-y4)^2+(1-z4)^2)
          d5=sqr((x2-x4)^2+(y2-y4)^2+(z2-z4)^2)
          d6=sqr((x3-x4)^2+(y3-y4)^2+(z3-z4)^2)
```

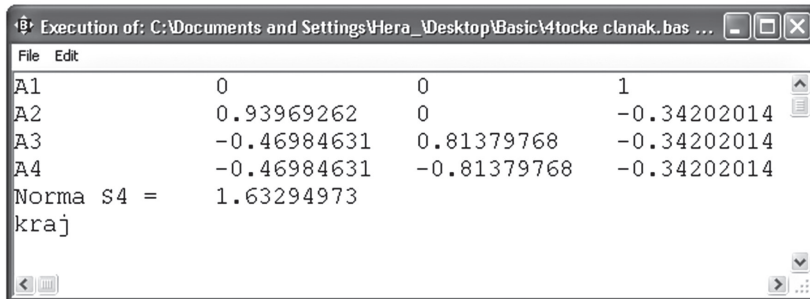
```

m=d1+d2+d3+d4+d5+d6
if m>Max then Max=m:x200=x2:y200=y2:z200=z2:x300=x3:y300=y3:z300=z3:x4
00=x4:y400=y4:z400=z4
next:next:next:next:next

print "A1", 0, 0, 1
print "A2", x200, y200, z200
print "A3", x300, y300, z300
print "A4", x400, y400, z400
print "Norma S4 = ", Max/6
print "kraj"

```

Program je točke rasporedio ovako:



```

Execution of: C:\Documents and Settings\Hera\Desktop\Basic\4tocke clanak.bas ...
File Edit
A1          0          0          1
A2          0.93969262  0         -0.34202014
A3         -0.46984631  0.81379768 -0.34202014
A4         -0.46984631 -0.81379768 -0.34202014
Norma S4 =  1.63294973
kraj

```

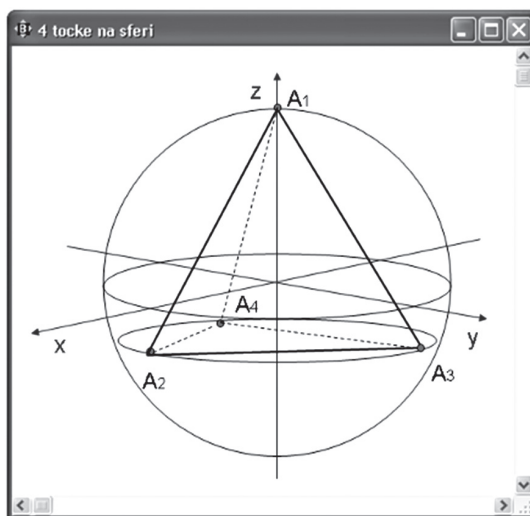
Slika 3.

Prema z -aplikatama vidimo da su tri točke na paralelnoj ravnini ispod ekvatorijalne ravnine, prema y -ordinatama i x -apscisama može se izračunati da je taj trokut jednakostraničan (mada je to mogao izračunati i program). Dakle, točke su vrhovi pravilne trostrane piramide. U sfernim koordinatama kutovi an i bn pretraživali su sferu po koracima (step Pi/n) od 10° . Pretraživanjem sfere sitnijim koracima (povećavajući n u programu) ta bi pravilna trostrana piramida prešla u jednakobridnu, u pravilni tetraedar.

Ako bismo matematički (a ne numerički kao što radi program) izračunali duljinu brida tetraedra upisanog u jediničnu sferu, dobili bismo

$$a = \frac{2 \cdot \sqrt{6}}{3} \approx 1.63299316,$$

pa zaključujemo da je naš program i s koracima po 10 stupnjeva sasvim zadovoljavajuće odredio raspored četiri točke na sferi, norma S_4 . Dodavajući u prethodni program naredbe za crtanje, dobili bismo nacrt, tlocrt i bokocrt konveksnog poliedra, čiji su vrhovi razmatrane točke. Složenijim programom može se simulirati objekt u prostoru. Taj bi program bio preglomazan, no rezultat bi bio otprilike sljedeći:



Slika 4.

Ako pomislimo da su prethodna razmatranja trivijalna, onda pokušajmo zamisliti 9 ili 13 točaka u idealnom rasporedu na sferi. Tada ćemo se prethodnoj metodi vratiti s obnovljenim oduševljenjem. Jedino što nas može usporiti u ovim razmatranjima je brzina rada samog programa.

Do sada imamo ovaj niz:

$|S_2|$, $|S_3|$, $|S_4|$... ili 2.00, 1.73, 1.63 ..., zaokruženo na dvije decimale.

Na kraju članka pokazat ćemo da je $\lim_{n \rightarrow \infty} |S_n| = \frac{4}{3} \approx 1.33$, što ćemo nazvati normom jedinične sfere.

3. Skup S_5

Kako rasporediti pet točaka na sferi tako da budu međusobno najudaljenije ili, preciznije, da im međusobna prosječna udaljenost bude maksimalna? Odgovor na to pitanje dat će nam malo prošireni prethodni program za traženje pete točke:

```
for a5=0 to Pi step Pi/n
  for b5=0 to 2*Pi step Pi/n
    x5=sin(a5)*cos(b5):y5=sin(a5)*sin(b5):z5=cos(a5)
    d7=sqr((0-x5)^2+(0-y5)^2+(1-z5)^2)
    d8=sqr((x2-x5)^2+(y2-y5)^2+(z2-z5)^2)
    d9=sqr((x3-x5)^2+(y3-y5)^2+(z3-z5)^2)
    d10=sqr((x4-x5)^2+(y4-y5)^2+(z4-z5)^2)
```

i nešto promijenjeni završni dio:

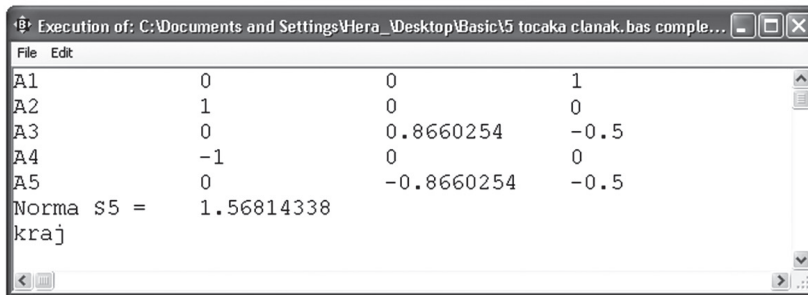
```

m=d1+d2+d3+d4+d5+d6+d7+d8+d9+d10
if m>Max then Max=m:x200=x2:y200=y2:z200=z2:x300=x3:y300=y3:z300=z3:x4
00=x4:y400=y4:z400=z4:x500=x5:y500=y5:z500=z5
next:next:next:next:next:next:next

print "A1", 0, 0, 1
print "A2", x200, y200, z200
print "A3", x300, y300, z300
print "A4", x400, y400, z400
print "A5", x500, y500, z500
print "Norma S5 = ", Max/10
print "kraj"

```

Program je pet točaka rasporedio u vrhove trostrane bipiramide:



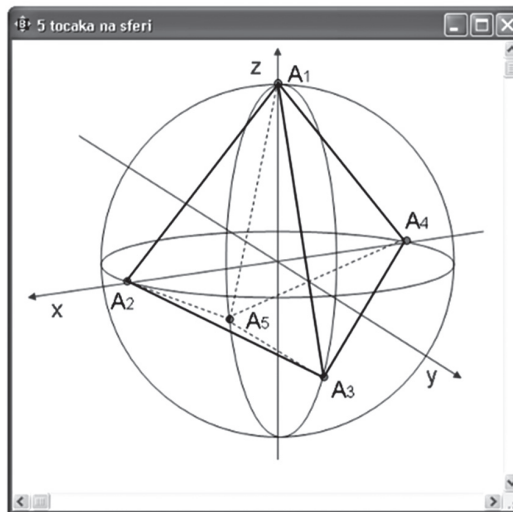
```

Execution of: C:\Documents and Settings\Hera\Desktop\Basic\5 tocaka clanak.bas comple...
File Edit
A1      0      0      1
A2      1      0      0
A3      0      0.8660254  -0.5
A4     -1      0      0
A5      0     -0.8660254  -0.5
Norma s5 = 1.56814338
kraj

```

Slika 5.

Vrhovi piramida su A_2 i A_4 , a zajednička baza jednakokraničan trokut $A_1A_3A_5$.

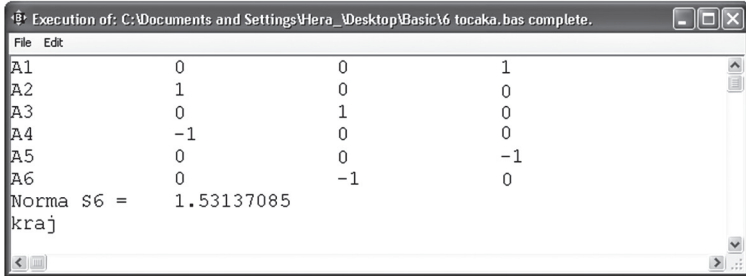


Slika 6.

Promatrana norma bipiramide je $|S_5| = 1.57$ zaokružena na dvije decimale. To je četvrti član prethodno spomenutog niza koji, primjećujemo, pada. Niz je i ograničen nulom jer je udaljenost vrhova uvijek pozitivna. No, gomilište niza $|S_n|$ nije nula.

4. Skup S_6

Slijedi raspored šest točaka na sferi s razmatranim svojstvom. Kao i u prethodnom primjeru, program treba dopuniti novim linijama koda za traženje nove točke i modificirati završni dio. Pokrenemo program i rezultat je sljedeći:



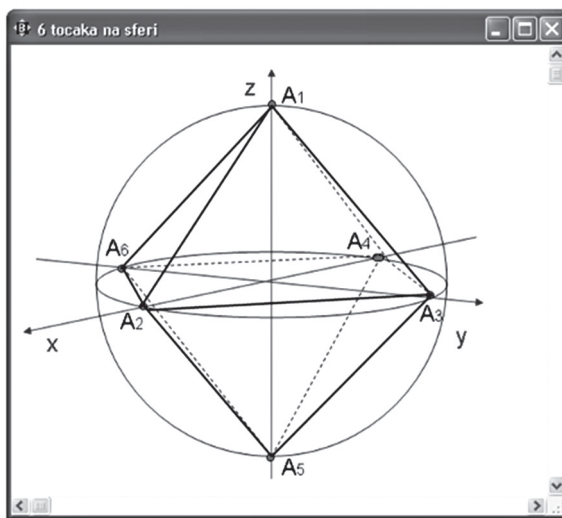
```

Execution of: C:\Documents and Settings\Hera\Desktop\Basic6 tocaka.bas complete.
File Edit
A1      0      0      1
A2      1      0      0
A3      0      1      0
A4     -1      0      0
A5      0      0     -1
A6      0     -1      0
Norma S6 = 1.53137085
kraj

```

Slika 7.

Dobili smo vrhove pravilnog oktaedra (sl. 8.) ili, šire, vrhove četverostrane bipiramide.

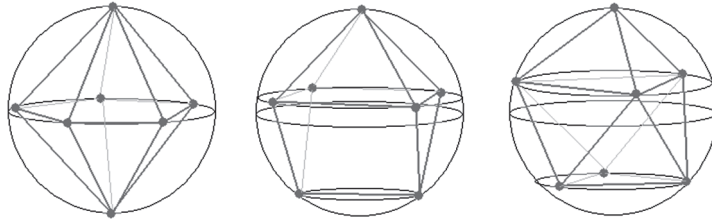


Slika 8.

No, bipiramide uskoro neće moći izdržati pritisak sve većeg broja točaka. Zamislimo skup S_{102} , 102 točke na sferi. Nezamislivo je da program rasporedi 100 točaka na ekvatorijalnoj kružnici sfere, a ostale dvije u sjevernom i južnom polu. Bilo bi to čisto traćenje, gubljenje slobodne plohe sfere.

5. Skup S_7

Ne postoji pravilan poliedar sa 7 vrhova, a i da postoji (opaska: matematičar sebi dopušta razmatranja koja su točna a nisu istinita, poput postojanja praznih teorema), to nije jamstvo da bi točke bile raspoređene u njegovim vrhovima Naime, uskoro ćemo vidjeti da 8 točaka neće biti raspoređeno u vrhovima kocke. Modeli bipiramida na dulje staze ne obećavaju i uskoro će biti napušteni, zato prije pokretanja programa pokušajmo pretpostaviti kako bi 7 točaka moglo biti raspoređeno na sferi.



Slika 9.

Prvi model nazovimo 1–5–1, peterostrana bipiramida, drugi 1–4–2, treći 1–3–3. Iako se broj 7 može rastaviti na još načina u obliku zbroja, intuitivno osjećamo da ovakvi raspoređi točaka imaju najveću šansu. Drugi model sastoji se od četverostrane piramide s bazom nešto iznad ekvatorijalne ravnine i donjeg dijela koji jednostavno nazovimo *klin*. Donji dio nije prizma jer bočni trokuti nisu paralelni, a zajednička strana obaju dijelova nije kvadrat nego pravokutnik. Do tih zaključaka dolazi se kada se od svih modela oblika 1–4–2 traži onaj koji ima maksimalnu prosječnu udaljenost između vrhova. I još, donji brid paralelan je s kraćom stranicom spomenutog pravokutnika. Da je paralelan s njegovom dijagonalom, taj bi model prešao u 1–5–1 jer bi pet točaka bilo komplanarno, a ostale dvije pomakle bi se u polove sfere, kao da postoji neka sila između točaka koja ih međusobno udaljuje, tražeći minimum otpora. Zato i udaljenost između dviju točaka ovdje tretiramo kao dužinu, a ne kao manji luk najveće njihove kružnice na sferi (geodezijska udaljenost). Odatle ideja da bi ova razmatranja mogla biti zanimljiva ne samo matematičaru, nego i nekim drugim profilima, bilo prirodnih, bilo društvenih znanosti. No, matematika ima tu zadaću otkrivanja prostorno-količinskih odnosa, ona mora utirati put ostalim znanostima. Stalno dolazimo do starog zaključka da je matematika kraljica i ropkinja svih znanosti; kraljica jer se svojom univerzalnošću, čistoćom i ljepotom uzdiže iznad ostalih, a ropkinja jer služi svima ostalima.

Treći, pak, model ima broj strana kao i prvi. Uglavnom, poliedri bolje ispunjavaju sferu ako pri istom n imaju međusobno udaljenije vrhove, veći broj strana te, konačno, veći volumen. U ovom članku razmatramo prvo svojstvo.

Vrijeme je da pokrenemo program dopunjen linijama koda za traženje sedme točke. Rezultat je sljedeći:


```

Execution of: C:\Documents and Settings\Hera\Desktop\Basic\7 tocaka.bas complete.
File Edit
A1          0          0          1
A2          1          0          0
A3          0.30901699  0.95105652  0
A4         -0.80901699  0.58778525  0
A5         -0.80901699 -0.58778525  0
A6          0.30901699 -0.95105652  0
A7          0          0         -1
Norma S7 =  1.50145492
kraj
    
```

Slika 10.

Pobjednik je 1–5–1, ali to je zadnja bipiramida s razmatranim svojstvom. Podsjetimo se našeg niza $|S_n|$ koji, po izračunima računala, konvergira kada $n \rightarrow \infty$. Članove niza zaokružili smo na dvije decimale:

2.00, 1.73, 1.63, 1.57, 1.53, 1.50 ...,

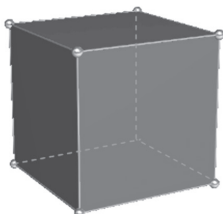
tako da istovremeno razmatramo dvije teme: konvergenciju niza i tematski raspored točaka.

6. Skup S_8

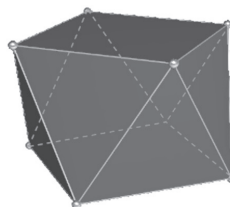
Za $n = 8$ točke nisu vrhovi kocke upisane sferi, kako bi se na prvi pogled moglo pretpostaviti, nego je taj skup zanimljiviji, što je tek uvod za mnoge druge vrijednosti n .

Program će odlučiti o rasporedu točaka, no krenimo od 8 vrhova kocke. Kocka upisana jediničnoj sferi ima duljinu prostorne dijagonale $D = 2$, brid $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$, te plošnu dijagonalu $d = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Zbroj svih međusobnih udaljenosti vrhova kocke podijelimo s njihovim brojem 28 i dobit ćemo prosječnu udaljenost 1.48044016. No, to nije norma skupa S_8 jer se 8 točaka može drugačije rasporediti s većom prosječnom udaljenošću.

Zarotirajmo četiri gornja vrha kocke za 45° oko pravca koji prolazi središtem njihova kvadrata i okomit je na njega, pa spojimo s ostala četiri vrha tako da nastane četverostrana antiprizma koja, za razliku od kocke s vrhovima, bridovima i stranama tipa 8, 12, 6, ima tip 8, 16, 10, sl. 11.b:



Slika 11.a



Slika 11.b

Zbroj svih međusobnih udaljenosti vrhova četverostrane antiprizme podijelimo s njihovim brojem 28 i dobit ćemo prosječnu udaljenost 1.48114764. Ona je nešto veća nego kod kocke. Ako računalnim programom potražimo maksimalnu prosječnu udaljenost, dobit ćemo da je taj maksimum za antiprizmu, upisanu jediničnoj sferi, 1.48118182, a visina joj je nešto manja od visine kocke. Prije nego što prikazemo taj rezultat našeg programa, zapitajmo se trebamo li vjerovati računalu ili sve moramo provjeriti „ručno”. Umjesto odgovora na to pitanje, ja bih ustvrdio sljedeće: računala mogu daleko više nego što nam danas pružaju. Iako će ih uskoro biti više nego ljudi, iako su preuzela nadzor nad mnogim odgovornim i manje odgovornim procesima, ipak njihov rezultat neke matematičke tvrdnje provjeravamo ručno. Teoretski, rekao bi matematičar Turing (1912.–1954.), moguće je konstruirati stroj čiji bi izračuni za nas bili neupitne vrijednosti [1]. Bio bi to pravi stroj. Nažalost, danas u matematici za neke neistražene probleme uglavnom koristimo samo sirovu snagu računala, *brute force*:

```

File Edit
A1      0.822565      0      0.5686711
A2     -0.822565      0      0.5686711
A3      0      0.822565      0.5686711
A4      0      -0.822565      0.5686711
A5     0.58164129   0.58164129  -0.5686711
A6    -0.58164129  -0.58164129  -0.5686711
A7    -0.58164129   0.58164129  -0.5686711
A8     0.58164129  -0.58164129  -0.5686711
Norma S8 = 1.48118182
kraj

```

Slika 12.

Iz koordinata možemo iščitati da je računalo rasporedilo 8 točaka u vrhove četverostrane antiprizme. Upravo tako je 8 atoma selena Se ili sumpora S razmješteno u molekulama Se_8 , odnosno S_8 , sl. 13.:



Slika 13.

Atomi spomenutih molekula imaju još po dva para nevezanih (slobodnih) elektrona, što dodatno udaljuje susjedne atome, tako da „antiprizma” na sl. 13. ima nešto manju visinu od naše antiprizme dobivene izračunom, no bitno je da je oblik antiprizme. To je još jedan primjer kako se teorija potvrđuje praksom, a praksa osmišljava teorijom.

7. Norma jedinične sfere $|S_\infty|$

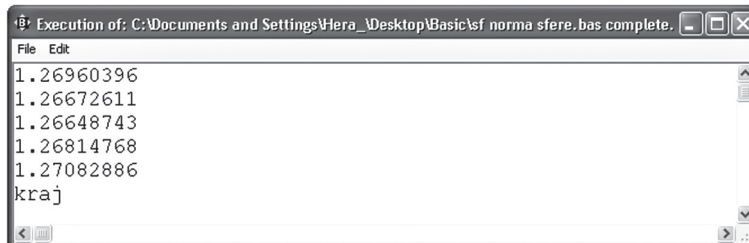
Kolika je prosječna međusobna udaljenost svih točaka sfere? To ćemo odgonetnuti na dva načina: pomoću programa i matematički, ili induktivno i deduktivno, ili pokusom i teorijom.

Prvi put kad sam se susreo s programiranjem, početkom osamdesetih kao student teorijske matematike, linije koda nisu mi puno značile. Što su kolegiji bili apstraktniji, to su mi bili draži, a sve što je imalo primjenu (a mnogo toga imalo je primjenu), bilo mi je manje inspirativno. Danas, pak, mislim da bi trebalo izbrisati granicu između numeričke i teorijske matematike (ovaj članak prilog je tomu). Treba je izbrisati da ne postoji jer se one međusobno ne suprotstavljaju, ne osporavaju. Naprotiv, isprepliću se. Brojevi i ideje neprestano se miješaju.

Sljedeći program koji nasumce bira 100 000 točaka na sferi, računa njihove udaljenosti od točke $A_1(0, 0, 1)$ i, konačno, traži prosječnu udaljenost:

```
m=0
for n=1 to 100000
a=3.141592654*rnd(1)
b=2*3.141592654*rnd(1)
x=sin(a)*cos(b)
y=sin(a)*sin(b)
z=cos(a)
d=sqr((0-x)^2+(0-y)^2+(1-z)^2)
m=d+m
next
Max=m/100000
print Max
```

Ponovimo pokus pet puta. Rezultati su sljedeći:



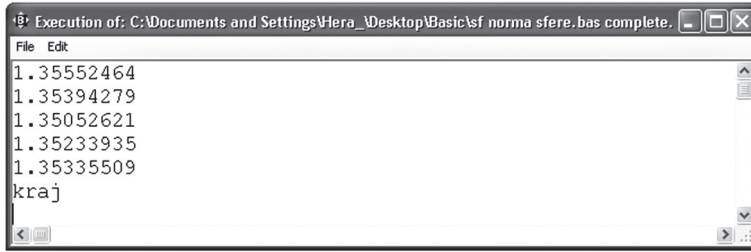
```
1.26960396
1.26672611
1.26648743
1.26814768
1.27082886
kraj
```

Slika 14.

Pokus je uvijek dobar, ali treba pripaziti da neka varijabla ne odvuče rezultat u pogrešnom smjeru. Ovdje to nije slučaj s funkcijom pseudoslučajnih brojeva RND,

jer neki autori smatraju da ona ima „slučajniju” razdiobu od stvarno slučajnih brojeva. Problem je u sfernim koordinatama koje favoriziraju točke bliže polovima na štetu ekvatorijalnih točaka, a sjeverni pol A_1 u prosjeku je udaljen od točaka blizu polova za jediničnu duljinu. Zato ćemo za točku A_1 privremeno uzeti ekvatorijalnu točku $A'_1(1, 0, 0)$ jer je njezina prosječna udaljenost od točaka blizu polova $\sqrt{2}$. Naime, sferne koordinate generiraju više točaka u blizini polova.

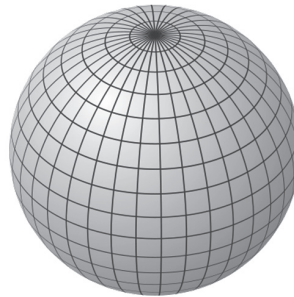
Opet ponovimo pokus pet puta. Rezultat je drukčiji:



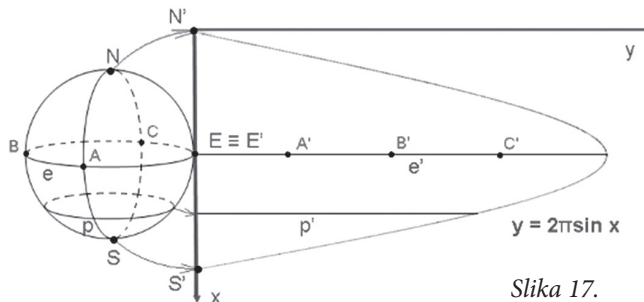
Slika 15.

I vizualno sljedeća slika govori zašto:

Slika 16. Točke u sjecištima meridijana i paralela nisu ravnomjerno raspoređene na sferi



Sada slijedi matematička analiza. Preslikajmo sferu u ravninu na sljedeći način: postavimo tangencijalnu ravninu u jednoj ekvatorijalnoj točki E sfere, sl. 17. Ona je na slici oborena u ravninu lista papira. Odmotajmo meridijan NES na dužinu $N'E'S'$ duljine π jer je sfera jediničnog radijusa. Zatim sve paralele p s početnim točkama na tom meridijanu odmotajmo u ravninu okomito na sliku meridijana, $N'E'S'$. Krajevi tih paralela su na krivulji $y = 2\pi \sin x$.



Slika 17.

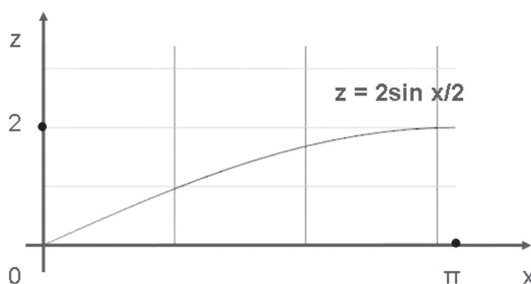
Kako se radi o ekviarealnom preslikavanju, to je površina sfere 4π jednaka površini slike sfere:

$$P = \int_0^{\pi} 2\pi \sin x dx = 4\pi$$

Nadalje, udaljenost d sjevernog pola N od svake točke jedne paralele p sfere je

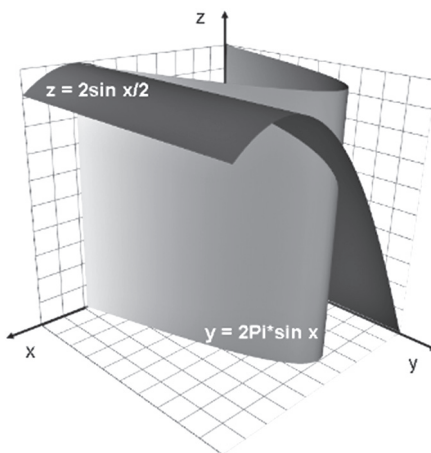
$$d = 2 \sin \frac{x}{2}$$

gdje je x središnji kut tetive d , odnosno duljina luka nad tetivom d , počevši od točke N , sl. 18:



Slika 18.

Konačno, u prostoru:



Slika 19.

„Zbroj” duljina svih paralela zapravo je površina sfere 4π . Volumen između dva dijelova ploha na sl. 19., te xy i xz ravnina, „zbroj” je svih duljina d , našeg m iz programa s početka članka pomoću kojeg smo računali Max, a potom normu:

$$V = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi \sin x} 2 \sin \frac{x}{2} dy dx = \frac{16\pi}{3}$$

Prosječna udaljenost je:

$$D = \frac{V}{P} = \frac{16\pi}{3} = \frac{4}{3}$$

To bi mogla biti naznaka da je norma sfere 1.33333....., odnosno

$$D = |S_\infty|,$$

što bi automatski bio i limes početnog niza u članku.

Točka A_1 je u prosjeku, od slučajno izabраних 100 000 točaka na sferi, udaljena $4/3$ (neznatno više), točka A_2 također je od istih tih točaka, uključujući i A_1 , udaljena prosječno $4/3$, pa zaključujemo da je prosjek svih međusobnih udaljenosti $4/3$. No, je li tih 100 001 točka u idealnom razmještaju ili se mogu malo pomaknuti kako bi se povećao taj prosjek $4/3$? Naime, na početku članka uzeli smo mali broj točaka, optimizirali ih i onda tražili prosjek ili normu, dok smo ovu 100 001 točku birali slučajno. Ako je $|S_{100001}|$ značajno veća od $4/3$, onda te točke iz skupa S_{100001} nisu jednoliko ili, bolje reći, slučajno raspoređene na sferi, nego su te točke grupirane u određene pojaseve, vrpce ili nešto slično.

8. Prilog

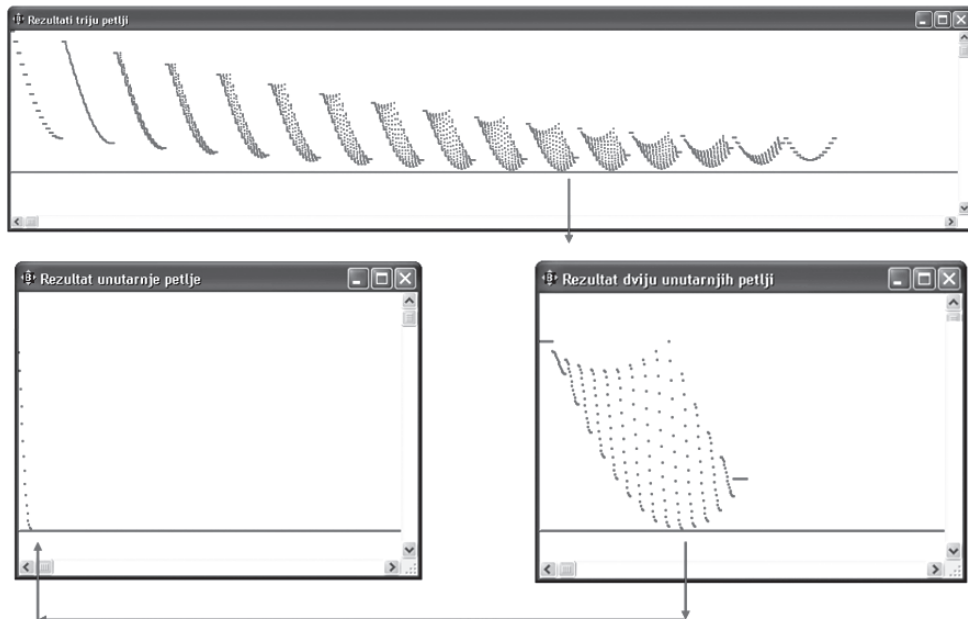
Graf triju petlji

Slijedi program (sl. 20.) u svom prirodnom okruženju, radnom sučelju, koji iscrtava graf rezultata triju petlji koje traže idealan raspored triju točaka. Kako petlje pretražuju sferu koracima po 12 stupnjeva, to svaka petlja u zatvorenom intervalu $[0^\circ - 180^\circ]$ ima 16 koraka. Na sl. 21. gore prikazano je 16 rezultata vanjske petlje (jasno izdvojene cjeline). Ako izdvojimo jedanaesti rezultat u kojemu m doseže maksimum, na istoj slici desno dolje vidimo rezultate svih 16 koraka srednje petlje. Dolje lijevo je jedanaesti rezultat prethodne srednje petlje. Na njoj je svih 16 rezultata (točaka) unutarnje petlje. Ukupno je na lijevom grafu prikazano $16^3 = 4096$ točaka. Samo jedna točka dira pravac $y = \sqrt{3}$ jer je $|S_3| = \sqrt{3}$.

```

Just BASIC v1.01 - C:\Documents and Settings\Vera\Desktop\Basic\graf triju petlji.bas
File Edit Run Setup Help
WindowWidth=1200:WindowHeight=280
k=0:Max = 0: Pi = asn(1)*2: n=15
open "Rezultati triju petlji" for graphics as #g
print #g, "down"
for a2=0 to Pi step Pi/n
b2=0
x2=sin(a2)*cos(b2):y2=sin(a2)*sin(b2):z2=cos(a2)
d1=sqr((0-x2)^2+(0-y2)^2+(1-z2)^2)
for a3=0 to Pi step Pi/n
for b3=0 to Pi step Pi/n
x3=sin(a3)*cos(b3):y3=sin(a3)*sin(b3):z3=cos(a3)
d2=sqr((0-x3)^2+(0-y3)^2+(1-z3)^2)
d3=sqr((x3-x2)^2+(y3-y2)^2+(z3-z2)^2)
m=100*(d1+d2+d3)/3
k=k+0.25
xp = k:yp = m:zk = k:yk = m+1]
#g "color red; size 2"
print #g, "line "; xp; " "; yp; " "; zk; " "; yk
print #g, "line "; 0; " "; 176; " "; 1800; " "; 176
next:b3:next:a3:next:a2:next
wait
close #g
end
Ready!
    
```

Slika 20.



Slika 21.

Uobičajeno je da koordinatno ishodište $(0, 0)$ bude u gornjem lijevom kutu, pozitivni dio x -osi desno ravno, a pozitivni dio y -osi dolje okomito, tako da pravac na sl. 21. ima jednadžbu $y = \sqrt{3}$.

9. Umjesto zaključka

Do mnogih tvrdnji došlo se pomoću računala, a ne strogo matematički. Nadalje, tema je otvorila više novih pitanja nego što je dala odgovora. Kako glasi formula pomoću koje se može odrediti idealan raspored točaka na sferi u smislu: 4 točke raspored 2–2 (tetraedar je 2–2 ili 1–3 gledano po katovima od sjevernog prema južnom polu), 6 točaka 3–3 (oktaedar je 3–3 ili 1–4–1), 8 točaka 4–4 (antiprizma) itd.? Može li se za neparne n : 3, 5, 7, 9... napisati rekurzivna formula koja daje rasporede 1–1–1, 1–3–1, 1–5–1, 3–3–3 itd.? Je li taj raspored točaka jednoznačan do na sukladnost poliedara u prostoru čiji su vrhovi te točke?

U ovome članku razmatran je idealan raspored u smislu maksimalne udaljenosti. No, mogao se razmatrati raspored točaka tako da nastali konveksni poliedar čiji su to vrhovi ima maksimalan volumen ili pak oplošje. Na koncu, kakav je raspored točaka na drugim tijelima ili likovima, npr. krugu? Sva ta teorijska razmatranja u praksi daju kasne, no bogate plodove.

10. Literatura

1. Charles Van Doren, *Povijest znanja*, Mozaik knjiga, Zagreb, 2005.
2. I. Filipović, S. Lipanović, *Opća i anorganska kemija*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.
3. www.3dchem.com
4. www.justbasic.com