Duljina puta od *n* segmenata

LJILJANA ARAMBAŠIĆ[1] I RAJNA RAJIĆ[2]

Sažetak. U ovome radu promatramo putove između dviju točaka ravnine A i B koji se sastoje od n segmenata. Ako se pri kretanju po takvom putu udaljenost do krajnje točke konstantno smanjuje, tada je duljina toga puta najviše $\sqrt{n}\,|AB|$, pri čemu je $|AB|$ udaljenost između točaka A i B.

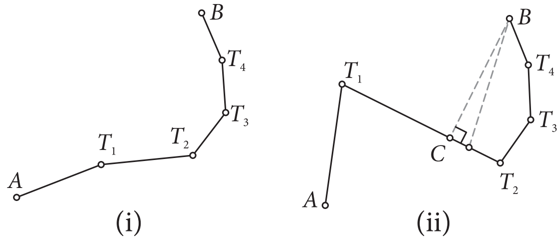
Kada govorimo o putu između dviju točaka, vrlo vjerojatno ćemo prvo pomisliti na dužinu koja spaja te točke. Ipak, u realnome svijetu, tj. pri rješavanju nekih praktičnih problema, dužina između dvije točke nije uvijek najbolji izbor. Primjerice, putovi kojima bi se brodovi ili zrakoplovi mogli kretati između polazišta i odredišta ne bi bili pravci, nego npr. kružnice čija su središta u središtu Zemlje. Ili recimo, idemo li od jedne do druge kućne adrese nekoga mjesta, često moramo proći nekoliko ulica, pa se naše kretanje ne izvodi po jednome pravcu, nego po nekoj krivulji, npr. izlomljenoj liniji koja spaja polazište s odredištem.

Mi ćemo u ovome članku promatrati upravo putove u obliku izlomljenih linija od n segmenata. Zanima nas koliko maksimalno dug takav put može biti. Naravno, ako je $n \geq 2$ i ako ne postavimo nikakav dodatni uvjet na izlomljenu liniju, tada njena duljina može biti proizvoljno velika. Zato ćemo promatrati putove u obliku izlomljenih linija koji imaju svojstvo da se, krenuvši od početne točke, „zračna" udaljenost do krajnje točke stalno smanjuje.

Pokazuje se da maksimalna duljina takvoga puta ovisi o broju segmenata n koji čine taj put, točnije, jednaka je umnošku „zračne" udaljenosti krajnjih točaka i $\sqrt{n}$.

Definirajmo sada pojmove precizno. Neka su A i B dvije točke ravnine. Za zadani $n \in \mathbf{N}$ promatramo sve putove od A do B koji se sastoje od n segmenata i koji zadovoljavaju uvjet da se, krenuvši od točke A, udaljenost do točke B stalno smanjuje. Na slici 1. prikazana su dva puta od $n = 5$ segmenata. Krećemo li od točke A do točke B po putu prikazanom na slici 1. (i), udaljenost od A do B konstantno se smanjuje, dok put prikazan na slici 1. (ii) nema svojstvo konstantnog približavanja točki B jer se na dijelu od C do T_2 udaljenost do odredišta povećava.

---
[1]Ljiljana Arambašić, PMF-MO, Zagreb
[2]Rajna Rajić, RGN, Zagreb



Slika 1.

Neka je $n \in \mathbf{N}$ i γ_n put od A do B sastavljen od n segmenata, dakle

$$\gamma_n = \begin{cases} \overline{AB}, & n = 1; \\ \overline{AT_1} \cup \overline{T_1T_2} \cup \ldots \cup \overline{T_{n-1}B}, & n \geq 2. \end{cases}$$

Njegovu duljinu označavat ćemo s $\ell(\gamma_n)$. Pokazat ćemo da, ako γ_n ima svojstvo konstantnog približavanja točki B, vrijedi

$$\ell(\gamma_n) \leq \sqrt{n}\,|AB|,$$

gdje je $|AB|$ udaljenost između točaka A i B.

U dokazu ćemo koristiti dobro poznatu relaciju

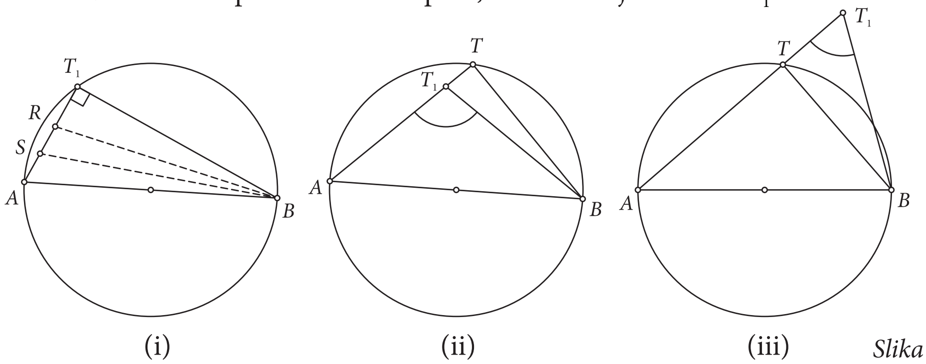
$$a_1b_1 + a_2b_2 \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}, \quad a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbf{R}, \tag{1}$$

koja je poseban slučaj Cauchy-Schwarz-Bunjakovski nejednakosti, a lako se provjeri direktnim raspisivanjem. Pritom se jednakost u (1) postiže ako i samo ako je $a_1 : b_1 = a_2 : b_2$.

Slučaj $n = 1$ je trivijalan jer je tada $\gamma_1 = \overline{AB}$ i zato je $\ell(\gamma_1) = \sqrt{1}\,|AB|$. U sljedećoj lemi tvrdnju dokazujemo za $n = 2$.

Lema 1 *Put* $\gamma_2 = \overline{AT_1} \cup \overline{T_1B}$ *ima svojstvo da se udaljenost do ciljne točke B stalno smanjuje točno onda kada je* $\angle AT_1B \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$. *Nadalje, tada vrijedi* $\ell(\gamma_2) \leq \sqrt{2}\,|AB|$.

Dokaz. Na slici 2. prikazana su tri puta, ovisno o mjeri kuta AT_1B.



Slika 2.

Razmotrimo svaki slučaj posebno.

(i) Neka je $\angle AT_1B = \frac{\pi}{2}$. Tada se kretanjem od točke A do točke T_1 po putu prikazanom na slici 2. (i) udaljenost do točke B stalno smanjuje. Naime, ako su S i R dvije proizvoljne točke na putu $\overline{AT_1}$ takve da je $|RT_1| \le |ST_1|$, tada je prema Pitagorinom poučku

$$|RB|^2 = |RT_1|^2 + |T_1B|^2 \le |ST_1|^2 + |T_1B|^2 = |SB|^2,$$

odakle vidimo da se kretanjem od S do R udaljenost do B stalno smanjuje. Nadalje, uvrštavanjem $a_1 = a_2 = 1, b_1 = |AT_1|, b_2 = |T_1B|$ u (1), te primjenom Pitagorinog poučka, dobivamo

$$|AT_1| + |T_1B| \le \sqrt{2}\sqrt{|AT_1|^2 + |T_1B|^2} = \sqrt{2}\,|AB|. \qquad (2)$$

(ii) Neka je $\angle AT_1B$ tupi kut. Kao i u slučaju (i), zaključujemo da se kretanjem od točke A do točke T_1 po putu prikazanom na slici 2. (ii), udaljenost do točke B stalno smanjuje. Na pravcu AT_1 odaberemo točku T tako da je $\angle ATB = \frac{\pi}{2}$. Prema Talesovom poučku znamo da je točka T upravo točka gdje se sijeku pravac AT_1 i kružnica promjera $\overline{AB}$. Sada put $\overline{AT} \cup \overline{TB}$ spada u slučaj (i) i zato je

$$|AT| + |TB| \le \sqrt{2}\,|AB|.$$

Nadalje, iz nejednakosti trokuta je $|T_1B| \le |T_1T| + |TB|$, odakle je

$$|AT_1| + |T_1B| \le |AT_1| + |T_1T| + |TB| = |AT| + |TB| \le \sqrt{2}\,|AB|.$$

(iii) Pretpostavimo da je $\angle AT_1B$ šiljasti kut. Opet na pravcu AT_1 odaberemo točku T tako da je $\angle ATB$ pravi kut. Točka T je točka na pravcu kroz A i T_1 koja ima svojstvo da je najbliža točki B. Krećući se od A do T, udaljenost do B se smanjuje, a ako se nastavimo kretati po tom pravcu i nakon T, ta će se udaljenost početi povećavati. Zato ovakav put (gdje je $\angle AT_1B$ šiljast) ne zadovoljava postavljene kriterije. ▫

Uočimo da mjera kuta AT_1B određuje položaj točke T_1 u odnosu na kružnicu promjera $\overline{AB}$: ako je $\angle AT_1B$ tupi kut, onda je T_1 unutar kruga omeđenog ovom kružnicom; ako je taj kut šiljast, onda je T_1 izvan tog kruga; a kada je $\angle AT_1B$ pravi kut, onda T_1 pripada kružnici (Talesov poučak). Prema tome, da bi put γ_2 imao svojstvo konstantnog približavanja točki B, mora pripadati (zatvorenom) krugu promjera $\overline{AB}$.

Teorem 2 *Za svaki $n \in \mathbf{N}$, $n \ge 2$, i svaki put $\gamma_n = \overline{AT_1} \cup \overline{T_1T_2} \cup \ldots \cup \overline{T_{n-1}B}$ sa svojstvom konstantnog približavanja točki B vrijedi $\ell(\gamma_n) \le \sqrt{n}\,|AB|$.*

Dokaz. Dokaz provodimo matematičkom indukcijom. Slučaj $n = 2$ razmotrili smo u prethodnoj lemi. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n-1$ i dokažimo je za n.

Označimo $\gamma_{n-1} = \overline{T_1T_2} \cup \overline{T_2T_3} \cup \ldots \cup \overline{T_{n-1}B}$. Kako γ_n ima svojstvo konstantnog približavanja točki B, isto svojstvo očito ima i put γ_{n-1}, pa je prema pretpostavci indukcije $\ell(\gamma_{n-1}) \le \sqrt{n-1}\,|T_1B|$. Tada je

$$\ell(\gamma_n) = |AT_1| + \ell(\gamma_{n-1}) \le |AT_1| + \sqrt{n-1}\,|T_1B|. \tag{3}$$

Uvrštavanjem $a_1 = 1,\ a_2 = \sqrt{n-1},\ b_1 = |AT_1|,\ b_2 = |T_1B|$ u (1) dobivamo

$$|AT_1| + \sqrt{n-1}\,|T_1B| \le \sqrt{n}\sqrt{|AT_1|^2 + |T_1B|^2}, \tag{4}$$

odakle je prema (3)

$$\ell(\gamma_n) \le \sqrt{n}\sqrt{|AT_1|^2 + |T_1B|^2}.$$

Sada je dovoljno dokazati da je $\sqrt{|AT_1|^2 + |T_1B|^2} \le |AB|.$ To slijedi iz kosinusovog poučka jer je

$$|AB|^2 = |AT_1|^2 + |T_1B|^2 - 2|AT_1||T_1B|\cos\angle AT_1B,$$

a kako je $\angle AT_1B \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right],$ to je $\cos\angle AT_1B \le 0$ i zato vrijedi

$$|AT_1|^2 + |T_1B|^2 = |AB|^2 + 2|AT_1||T_1B|\cos\angle AT_1B \le |AB|^2. \tag{5}$$

Time je tvrdnja dokazana. ▫

Konstruirajmo sada putove od A do B koji se sastoje od n segmenata, imaju svojstvo da se, krećući od A do B, udaljenost do B konstantno smanjuje, a duljina im je maksimalna moguća, dakle $\sqrt{n}\,|AB|$.

Za $n = 2,$ to je put $\overline{AT_1} \cup \overline{T_1B}$ takav da je ΔAT_1B jednakokračan pravokutni trokut. Zaista, tada je $|AT_1| = |T_1B| = \frac{\sqrt{2}}{2}|AB|$ i zato je $|AT_1| + |T_1B| = \sqrt{2}\,|AB|$.

Za $n = 3$ postupamo ovako. Neka je T_1 točka na kružnici promjera $\overline{AB}$ koja je od A udaljena za $\frac{\sqrt{3}}{3}|AB|.$ Prema Talesovom je poučku $\angle AT_1B$ pravi kut, te stoga prema Pitagorinom poučku vrijedi

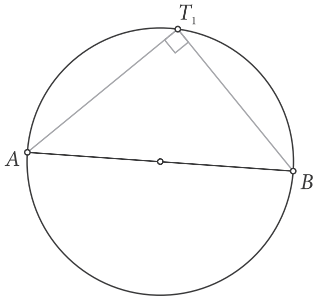
$$|T_1B| = \sqrt{|AB|^2 - |AT_1|^2} = \sqrt{|AB|^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}|AB|\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,|AB|.$$

Točku T_2 odaberemo na kružnici promjera $\overline{T_1B}$ tako da je $|T_1T_2| = \frac{\sqrt{3}}{3}|AB|.$ Kako je $\angle T_1T_2B$ pravi kut, prema Pitagorinom poučku vrijedi

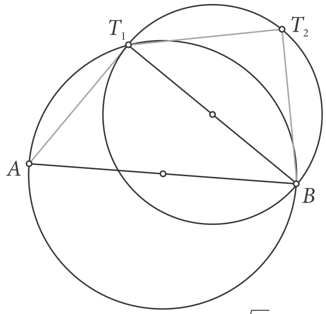
$$|T_2B| = \sqrt{|T_1B|^2 - |T_1T_2|^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}|AB|.$$

Dobili smo put kojemu su svi segmenti duljine $\frac{\sqrt{3}}{3}|AB|,$ pa je duljina cijelog puta $\sqrt{3}\,|AB|$.

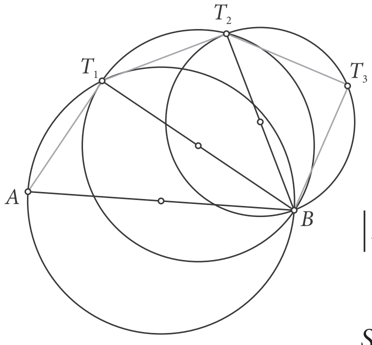
Na slici 3. prikazani su putovi maksimalnih duljina za n = 2, 3 i 4.



$$\left|AT_1\right| = \left|T_1B\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}\left|AB\right|$$



$$\left|AT_1\right| = \left|T_1T_2\right| = \left|T_2B\right| = \frac{\sqrt{3}}{3}\left|AB\right|$$



$$\left|AT_1\right| = \left|T_1T_2\right| = \left|T_2T_3\right| = \left|T_3B\right| = \frac{1}{2}\left|AB\right|$$

Slika 3.

Jednako postupamo i za svaki drugi n. Prvu točku T_1 odaberemo na kružnici promjera $\overline{AB}$ tako da je $|AT_1| = \frac{\sqrt{n}}{n}|AB|$. Tada je

$$|T_1B| = \sqrt{|AB|^2 - |AT_1|^2} = \sqrt{|AB|^2 - \left(\frac{\sqrt{n}}{n}|AB|\right)^2} = \sqrt{\frac{n-1}{n}}\,|AB|.$$

Dalje postupamo na isti način: biramo T_2 na kružnici promjera $\overline{T_1B}$ tako da je $|T_1T_2| = \frac{\sqrt{n}}{n}|AB|$. Tada je

$$|T_2B| = \sqrt{|T_1B|^2 - |T_1T_2|^2} = \sqrt{\frac{n-2}{n}}\,|AB|.$$

Nastavljajući na isti način, u k-tom koraku biramo točku T_k na kružnici promjera $|T_{k-1}B|$ tako da je $|T_{k-1}T_k| = \frac{\sqrt{n}}{n}|AB|$. Tada je $\Delta T_{k-1}T_kB$ pravokutni trokut. Stoga je $\left|T_kB\right| = \sqrt{\frac{n-k}{k}}\left|AB\right|$. Postupak završava nakon $n-1$ koraka jer dobijemo T_{n-1} tako da je $|T_{n-2}T_{n-1}| = \frac{\sqrt{n}}{n}|AB|$ i $|T_{n-1}B| = \sqrt{\frac{1}{n}}\,|AB| = \frac{\sqrt{n}}{n}|AB|$. Tada je duljina cijelog puta γ_n jednaka $\ell(\gamma_n) = \sqrt{n}\,|AB|$.

Precizan bi se dokaz proveo matematičkom indukcijom.

Putovi γ_n maksimalne duljine koje smo konstruirali sastoje se od jednako dugih segmenata. Pokažimo još da se svi putovi γ_n od A do B, koji imaju svojstvo konstantnog približavanja točki B i čija duljina iznosi maksimalnih $\sqrt{n}\,|AB|$, sastoje od n segmenata jednakih duljina, te da se stoga svi mogu konstruirati na način koji smo opisali.

Teorem 3. *Ako je γ_n put od A do B duljine $\sqrt{n}\,|AB|$, tada svi njegovi segmenti imaju duljinu $\frac{\sqrt{n}}{n}|AB|$.*

Dokaz. Dokaz provodimo indukcijom po $n \geq 2$. Promotrimo dvosegmentni put $\gamma_2 = \overline{AT_1} \cup \overline{T_1B}$ maksimalne moguće duljine. Pogleda li se dokaz leme 1, jasno je da γ_2 može imati maksimalnu duljinu samo ako nastupi slučaj (i), tj. ako točka T_1 leži na kružnici promjera $\overline{AB}$. Nadalje, da bi duljina puta bila $\sqrt{2}\,|AB|$, moramo imati jednakost u (2), dakle

$$|AT_1| + |T_1B| = \sqrt{2(|AT_1|^2 + |T_1B|^2)}.$$

To znači da vrijedi jednakost u (1), pa mora biti $1 : |AT_1| = 1 : |T_1B|$. Prema tome, $|AT_1| = |T_1B| = \frac{\sqrt{2}}{2}|AB|$. Time je provjerena baza indukcije.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za put od $n-1$ segmenata i dokažimo je za put od n segmenata.

Pogledajmo dokaz teorema 2. Da bi γ_n bio put maksimalne duljine, u nejednakostima (3), (4) i (5) moraju se postići jednakosti. Jednakost u (3) postiže se kada je $\ell(\gamma_{n-1}) = \sqrt{n-1}\,|T_1B|$, što znači da je γ_{n-1} put između T_1 i B maksimalne duljine, a kako se sastoji od $n-1$ segmenata, na njega možemo primijeniti pretpostavku indukcije. Prema tome, vrijedi

$$|T_1T_2| = |T_2T_3| = \cdots = |T_{n-1}B| = \frac{\sqrt{n-1}}{n-1}|T_1B|.$$

Jednakost u (4) znači jednakost u (1), a to nastupa kada je $1 : |AT_1| = \sqrt{n-1} : |T_1B|$, to jest, $|T_1B| = \sqrt{n-1}\,|AT_1|$. Jednakost u (5) nastupa kada je $\cos\angle AT_1B = 0$, odnosno kada je $\angle AT_1B$ pravi kut. Sada je

$$|AB| = \sqrt{|AT_1|^2 + |T_1B|^2} = \sqrt{|AT_1|^2 + (\sqrt{n-1}\,|AT_1|)^2} = \sqrt{n}\,|AT_1|,$$

odakle slijedi $|AT_1| = \frac{\sqrt{n}}{n}|AB|$. Time smo dobili

$$|AT_1| = |T_1T_2| = |T_2T_3| = \cdots = |T_{n-1}B| = \frac{\sqrt{n}}{n}|AB|,$$

dakle svi segmenti u γ_n jednake su duljine. □