IZ NASTAVNE PRAKSE

O ishodu inicijalne provjere znanja srednjoškolske matematike na stručnom studiju elektrotehnike Tehničkoga veleučilišta u Zagrebu

Bojan Kovačić[1] i Kristina Matijević[2]

1. Uvod

Na prvom nastavnom satu iz predmeta *Matematika* 1 na stručnom studiju elektrotehnike Tehničkoga veleučilišta u Zagrebu u ak. god. 2013./2014. provedena je inicijalna provjera znanja srednjoškolske matematike. Provjera je trajala točno 30 minuta. Njezina svrha bila je utvrditi razinu poznavanja gradiva srednjoškolske matematike, nužnoga za redovito praćenje nastave iz predmeta *Matematika* 1. Svaki ispravan odgovor vrijedio je 1 bod, dok su neispravan odgovor, zaokruživanje barem dvaju odgovora itd. donosili 0 bodova.

Višegodišnja iskustva nastavnika stečena na usmenim i komisijskim ispitima iz istoga predmeta ukazuju da studenti „robuju” određenim oznakama matematičkih objekata i da se uglavnom ne snalaze ako se dotični objekt označi nestandardnom oznakom. Npr. relativna većina studenata realnu funkciju jedne realne varijable standardno označava s f, a pripadnu realnu varijablu s x. U drugim se strukama vrlo često promatraju realne funkcije jedne realne varijable oblika npr. $u = u(t)$ (takva funkcija u elektrotehnici opisuje ovisnost napona električne struje o vremenu). Stoga je inicijalna provjera znanja iskorištena i za okvirno utvrđivanje u kojoj se mjeri nova generacija brucoša na stručnom studiju elektrotehnike snalazi u nestandardnom označavanju matematičkih objekata.

[1]Bojan Kovačić, Tehničko veleučilište u Zagrebu, Zagreb
[2]Kristina Matijević, Ekonomska škola Požega, Požega

2. Ispitni zadatci na inicijalnoj provjeri znanja i procjena njihove težine

Postavljeni zadatci na inicijalnoj provjeri znanja bili su sljedeći:

1. Ako je 😐 = $\text{☺}^{\text{☹}}$, onda je ☺ jednako:
A. $\text{😐}^{\text{☹}}$ **B.** $\text{☹}^{\text{😐}}$ **C.** $\text{☹}^{1/\text{😐}}$ **D.** $\text{😐}^{1/\text{☹}}$

2. Neka su ✏ i ✂ proizvoljni racionalni brojevi. Neka je 👓 := $\text{✏}^2 + \text{✂}^2$. Tada vrijedi:
A. 👓 ≥ 0 **B.** 👓 > 0 **C.** 👓 ≤ 0 **D.** 👓 < 0

3. Krivulja $x^2 + y^2 = 1$ na osi ordinata odsijeca dužinu čija je duljina jednaka:
A. $2 \cdot \pi$ **B.** π **C.** 2 **D.** 1

4. Funkcija 🔔(📖) = 🕯 · 📖 – ☎, pri čemu su 🕯, ☎ ∈ **R**, 🕯 ≠ 0, naziva se:
A. linearna **B.** kvadratna **C.** eksponencijalna **D.** logaritamska

5. Najveća vrijednost realne funkcije ✆(✉) = sin(🖃 · ✉ + 📪), pri čemu su 🖃, 📪 ∈ **R**, 🖃 ≠ 0, jednaka je:
A. $+\infty$ **B.** $2 \cdot \pi$ **C.** π **D.** 1

6. Koji je od sljedećih pravaca okomit na os apscisa?
A. $x = 0$ **B.** $y = 0$ **C.** $y = x$ **D.** $y = -x$

7. Koji je od sljedećih četiriju skupova segment?
A. $\langle 2013, 2014\rangle$ **B.** $[2013, 2014\rangle$ **C.** $\langle 2013, 2014]$ **D.** $[2013, 2014]$.

8. Koliko zajedničkih elemenata imaju skupovi $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ i $S = \{1, i, \pi\}$?
A. nijedan **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3.

9. Temeljni period funkcije $u(t) = \operatorname{tg} t$ jednak je:
A. $-\pi$ **B.** 0 **C.** π **D.** $2 \times \pi$

10. Jednakost $\log\frac{a}{b} = \log a - \log b$ je istinita za sve:
A. $a, b \in \mathbf{R}$ **B.** $a, b \geq 0$ **C.** $a, b > 0$ **D.** $a, b < 0$.

11. Analitički izraz $x^2 + 2 \cdot y^2 = 3$ zadaje krivulju koja se naziva:
A. elipsa **B.** hiperbola **C.** kružnica **D.** parabola

12. Uz standardne oznake u pravokutnom trokutu ABC, kojemu je od sljedećih izraza jednak $\cos\alpha$?
A. $\frac{a}{b}$ **B.** $\frac{b}{a}$ **C.** $\frac{a}{c}$ **D.** $\frac{b}{c}$

13. Koja je od navedenih funkcija strogo rastuća na svojem prirodnom području definicije?
A. $f(č) = \sin č$ **B.** $f(č) = \cos č$ **C.** $f(č) = \operatorname{tg} č$ **D.** $f(č) = \log_{2013} č$

14. Koja od navedenih funkcija ima graf koji ne prolazi ishodištem pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini?

A. $g(ć) = \sin ć$ **B.** $g(ć) = \cos ć$ **C.** $g(ć) = \operatorname{tg} ć$ **D.** $g(ć) = ć$

15. Ako istodobno vrijede jednakosti $\begin{cases} z_1 + z_2 = 1, \\ z_1 - z_2 = i, \end{cases}$, koja je od navedenih tvrdnji istinita?

A. $z_1 > z_2$ **B.** $z_1 < z_2$ **C.** $z_1 \geq z_2$ **D.** tvrdnje A, B i C su besmislene

16. Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nisu kolinearni i različiti su od nulvektora. Ako je duljina vektora $\vec{a}$ jednaka a, a duljina vektora $\vec{b}$ jednaka b, onda je duljina vektora $\vec{a} + \vec{b}$:

A. manja od $a + b$ **B.** jednaka $a + b$ **C.** veća od $a + b$ **D.** jednaka $a \times b$.

17. Koji kut pripada trećem kvadrantu pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini?

A. $\frac{2}{3} \cdot \pi$ radijana **B.** $\frac{3}{4} \cdot \pi$ radijana **C.** $\frac{7}{6} \cdot \pi$ radijana **D.** $\frac{7}{4} \cdot \pi$ radijana.

18. Zbroj svih rješenja jednadžbe 2 · ☠^{2} + 3 · ☠ + 4 = 0 pripada skupu:

A. N **B. Z \ N** **C. Q \ Z** **D. R \ Q**

19. Duljina brida kocke, duljina brida pravilnoga tetraedra i duljina promjera kugle međusobno su jednake. Koje od tih triju tijela ima najveći obujam u odnosu na obujme ostalih dvaju tijela?

A. kocka **B.** tetraedar **C.** kugla

D. obujmi navedenih tijela su jednaki

20. Koja od navedenih funkcija nema skup **R** za svoje prirodno područje definicije?

A. $h(u) = \sqrt[3]{u}$ **B.** $h(u) = \sqrt[4]{u}$ **C.** $h(u) = \frac{1}{u^2 + 1}$ **D.** $h(u) = \frac{\sin u}{2^u}$.

U Tablici 1. za svaki pojedini zadatak navedena je nastavna cjelina na koju se odnosi taj zadatak, kao i procjena težine zadatka. Nazivi nastavnih cjelina navedeni su prema postojećim nastavnim programima matematike u našim srednjim školama. Napominjemo da je naznačena procjena težine zadatka izračunana kao aritmetička sredina samostalnih procjena oboje autora ovoga članka (uz eventualno zaokruživanje na najbliži prirodan broj).

Redni broj zadatka	*Nastavna cjelina*	*Procjena težine zadatka* (1 – vrlo lagan, …, 5 – vrlo težak)	*Napomena*
1.	Potencije i korijeni	2	
2.	Skup realnih brojeva	2	
3.	Analitička geometrija u ravnini	2	

4.	Linearna funkcija Kvadratna funkcija Eksponencijalna i logaritamska funkcija	1	
5.	Trigonometrijske funkcije	2	ne obrađuje se u većini smjerova srednjih ekonomskih škola; u obrtničkim, trgovačkim i hotelijerskim školama trigonometrijske funkcije definiraju se samo na brojevnoj kružnici; na izbornoj nastavi matematike u 4. razredu tih škola obrađuje se grafički prikaz trigonometrijskih funkcija
6.	Analitička geometrija u ravnini	1	
7.	Skup realnih brojeva	2	
8.	Kompleksni brojevi Skupovi i operacije sa skupovima	1	
9.	Trigonometrijske funkcije	1	
10.	Logaritamska funkcija	1	
11.	Analitička geometrija u ravnini	1	
12.	Trigonometrija pravokutnoga trokuta	1	
13.	Trigonometrijske funkcije Logaritamska funkcija	2	vidjeti napomenu uz 5. zadatak
14.	Trigonometrijske funkcije Linearna funkcija	2	
15.	Kompleksni brojevi	2	ni u jednom srednjoškolskom udžbeniku izričito se ne navodi da ne postoji proširenje standardnoga uređaja $\leq$ sa skupa **R** na skup **C**
16.	Vektori	3	ne obrađuje se u većini smjerova srednjih ekonomskih, trgovačkih i hotelijerskih škola; obrađuje se u 3. razredu (smjer komercijalist) i na izbornoj nastavi u 4. razredu tih škola
17.	Trigonometrijske funkcije	1	
18.	Kvadratna jednadžba Skupovi brojeva	2	
19.	Poliedri i rotacijska tijela	4	
20.	Funkcije	4	ne obrađuje se u većini smjerova srednjih ekonomskih, trgovačkih i hotelijerskih škola; obrađuje se u 3. razredu (smjer komercijalist) i na izbornoj nastavi u 4. razredu tih škola

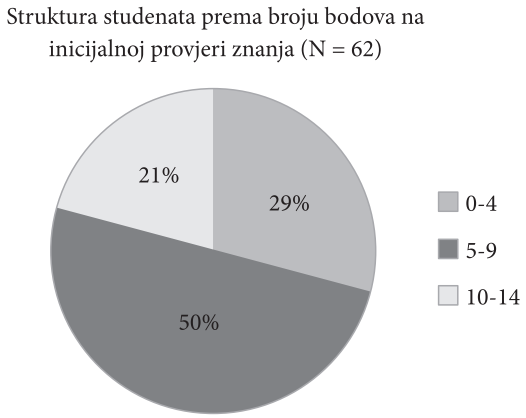
Tablica 1.

3. Rezultati inicijalne provjere znanja i njihova opisnostatistička analiza

Postignuti uspjeh studenata prikazan je tablično i grafički (strukturnim krugom). Radi preglednosti, podatci su grupirani u neprave razrede širine 4. Budući da je najveći postignuti broj bodova bio 14, razred 15 – 20 nije razmatran.

Broj bodova	*Broj studenata*
0 – 4	**18**
5 – 9	**31**
10 – 14	**13**
Ukupno:	**62**

Tablica 2.



Slika 1.

Ako se kao „prag za prolaz" uzme točno 10 bodova, onda bi približno 21% ispitanih studenata položilo inicijalnu provjeru znanja. Radi usporedbe, prosječna stopa prolaznosti na ispitima iz *Matematike* 1 (izračunana na osnovi ishoda ispitnih rokova u posljednje tri akademske godine) iznosi približno 30%.

Osnovni opisnostatistički pokazatelji koji se odnose na statistički niz ostvarenih brojeva bodova navedeni su u Tablici 3.

Primijetimo da vrijednost koeficijenta varijacije upućuje na umjeren, odnosno na umjeren do jak varijabilitet promatranoga niza. Može se zaključiti da se studenti koji su pisali inicijalnu provjeru znanja statistički značajno razlikuju prema svojem znanju gradiva srednjoškolske matematike. Vrijednost koeficijenta asimetrije upućuje da se radi o približno simetričnoj razdiobi, što je relativno razvidno i iz Tablice 2.

OPISNOSTATISTIČKA ANALIZA STATISTIČKOGA NIZA OSTVARENIH BODOVA	
Aritmetička sredina (negrupirani podatci)	**6.87**
Aritmetička sredina (grupirani podatci)	**6.60**
Standardno odstupanje (negrupirani podatci)	**2.78**
Standardno odstupanje (grupirani podatci)	**3.51**
Koeficijent varijacije (negrupirani podatci)	**40.45%**
Koeficijent varijacije (grupirani podatci)	**53.25%**
Najčešći broj bodova (negrupirani podatci)	**4**
Donji (*prvi*) *kvartil* (negrupirani podatci)	**4**
Medijan (negrupirani podatci)	**7**
Gornji (*treći*) *kvartil* (negrupirani podatci)	**9**
Koeficijent asimetrije α_3 (negrupirani podatci)	**–0.01**
Koeficijent zaobljenosti (negrupirani podatci)	**–0.62**

Tablica 3.

Spomenimo da je za promatrane studente napravljena i korelacijsko-regresijska analiza ovisnosti ostvarenoga broja bodova o prosjeku svih zaključnih ocjena iz matematike u srednjoj školi. Pearsonov koeficijent linearne korelacije i Spearmanov koeficijent korelacije ranga približno su jednaki (–0.17, odnosno –0.16), ali po apsolutnoj vrijednosti relativno „daleko" od 1, pa se može zaključiti da ne postoji statistički značajna linearna ovisnost ostvarenoga broja bodova o prosjeku svih zaključnih ocjena iz matematike u srednjoj školi. Standardnom regresijskom analizom (određivanjem jednadžbi modela jednostavne linearne regresije, jednostavne eksponencijalne regresije, jednostavne logaritamske regresije i jednostavne potencijske regresije, te izračunavanjem pripadnih koeficijenata determinacije uz pomoć MS Excela) utvrđeno je da svi promatrani regresijski modeli imaju koeficijent determinacije približno 0.02, što znači da se tim modelima može objasniti svega 2% povezanosti promatranih veličina. Stoga se može zaključiti da ne postoji statistički značajna ovisnost ostvarenoga broja bodova o prosjeku svih zaključnih ocjena iz matematike u srednjoj školi. Izravnim uvidom u ispitne zadaće utvrđeno je da su neki studenti sa slabijim prosjekom ocjena iz matematike u srednjoj školi na ispitu postigli bitno bolji rezultat od studenata s boljim prosjekom ocjena.

Indikativniji pokazatelj razine znanja studenata je postotak ispravne riješenosti svakoga pojedinoga ispitnog zadatka. Ti su postotci navedeni u Tablici 4.

Redni broj zadatka	*Broj ispravnih rješenja*	*Postotak ispravnih rješenja*
1.	**36**	**58.06%**
2.	**29**	**46.77%**
3.	**8**	**12.90%**
4.	**40**	**64.52%**
5.	**26**	**41.94%**
6.	**19**	**30.65%**
7.	**38**	**61.29%**
8.	**23**	**37.10%**
9.	**29**	**46.77%**
10.	**20**	**32.26%**
11.	**17**	**27.42%**
12.	**23**	**37.10%**
13.	**16**	**25.81%**
14.	**9**	**14.52%**
15.	**25**	**40.32%**
16.	**8**	**12.90%**
17.	**39**	**62.90%**
18.	**5**	**8.06%**
19.	**12**	**19.35%**
20.	**4**	**6.45%**

Tablica 4.

4. Rezultati anketiranja studenata o korelaciji uspjeha na inicijalnoj provjeri znanja i nestandardnih oznaka matematičkih objekata

Na prvim auditornim vježbama (održanima dan poslije pisanja inicijalne provjere znanja) studentima koji su pisali inicijalni ispit znanja postavljeno je anketno pitanje: „Smatrate li da biste postigli bolji uspjeh na inicijalnoj provjeri znanja da su oznake varijabli u ispitu bile uobičajene (x, y, z i sl.)?". Rezultati te ankete navedeni su u Tablici 5. Napominjemo da dio studenata koji su pisali inicijalni ispit znanja nije bio prisutan prigodom anketiranja i ti studenti nisu naknadno anketirani.

Razdioba studenata prema odgovoru na anketno pitanje	
Odgovor na anketno pitanje	*Broj studenata*
Da	26
Ne	19
Ne znam / ne mogu procijeniti	10
Ukupno	**55**

Tablica 5.

5. Zaključak

U ovom radu razmatrali smo dva problema: matematičko predznanje koje završeni srednjoškolci donose na prvu godinu stručnoga studija i nesnalaženje studenata u otklonu od uobičajene matematičke notacije.

Iz Tablice 1. razvidno je da postoje točno 3 zadatka (15% od ukupnoga broja zadataka) čija je procijenjena težina barem jednaka 3 (prosječno težak ili težak), dok je iz Tablice 4. razvidno da postoje točno 4 zadatka (20% od ukupnoga broja zadataka) koja je ispravno riješilo više od polovice ispitanika. Prema našem mišljenju, time se potvrđuju ranije iznesene hipoteze da većina srednjoškolaca matematiku ne uči s razumijevanjem, nego isključivo želeći napamet naučiti određene postupke („šablone”) koje će jednokratno primijeniti na ispitu znanja i potom zaboraviti. Stoga smatramo da i u sadašnjim nastavnim programima matematike u srednjim školama i na ispitima državne mature (obje razine) treba staviti jači naglasak na razumijevanje osnovnih matematičkih pojmova. Inzistiranje na primjeni matematike na rješavanje „praktičnih zadataka” ima smisla tek nakon što učenici budu zadovoljavajuće razumjeli spomenute pojmove.

Upravo nerazumijevanje osnovnih matematičkih pojmova smatramo glavnim „krivcem” za nesnalaženje u otklonu od uobičajene matematičke notacije. Naknadni (usmeni) komentari ispitanika odnosili su se ponajviše na postavke zadataka 5. i 18. Izdvojimo dva tipična komentara: „Znam da je najveća vrijednost sinusa jednaka 1, ali su me zbunili koverta i telefon.”, „Znam Vièteove formule, ali me zbunila mrtvačka glava.” Stoga smatramo da bi već u osnovnoj školi, a pogotovo u srednjoj, učenike trebalo sustavno navikavati i na nestandardne matematičke oznake koje se koriste u drugim strukama. Ne postoji niti jedan valjani razlog zbog kojega bi trebalo izbjegavati analiziranje i ispitivanje funkcija oblika npr. $u = u(t)$ uz pripadni grafički prikaz u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini, u kojemu su koordinatne osi označene s t i u. Tako bi učenici istodobno morali posvetiti veću pozornost razumijevanju osnovnih matematičkih pojmova i naviknuti se na alternativne matematičke oznake. Ovim potonjima dao bi se još jedan doprinos nastojanjima povezivanja matematike s drugim strukama i uklanjanja „tradicionalnih" potpuno pogrešnih shvaćanja matematike kao „samosvrsishodnoga bauka".

6. Literatura:

1. Nastavni program iz matematike za gimnazije – javno dostupno na internetskoj adresi:

   http://dokumenti.ncvvo.hr/Nastavni_plan/gimnazije/obvezni/matematika.pdf (22.11.2013.)

2. Nastavni program iz matematike za strukovne škole (dvogodišnji program) – javno dostupno na internetskoj adresi:
   http://dokumenti.ncvvo.hr/Nastavni_plan/strukovne/matematika-2.pdf (22.11.2013.)

3. Nastavni program iz matematike za strukovne škole (trogodišnji program) – javno dostupno na internetskoj adresi:
   http://dokumenti.ncvvo.hr/Nastavni_plan/strukovne/matematika-3.pdf (22.11.2013.)

4. Nastavni program iz matematike za strukovne škole (četverogodišnji program) – javno dostupno na internetskoj adresi:
   http://dokumenti.ncvvo.hr/Nastavni_plan/strukovne/matematika-4.pdf (22.11.2013.)

5. Nastavni program iz matematike za trgovačke škole – javno dostupno na internetskoj adresi:
   http://dokumenti.ncvvo.hr/Nastavni_plan/strukovne/matematika-t.pdf (22.11.2013.)

6. M. Papić: *Primijenjena statistika u MS Excelu* (+ CD) *za ekonomiste, znanstvenike i neznalice*, Naklada ZORO, Zagreb, 2012.