

MATEMATIKA IZVAN MATEMATIKE

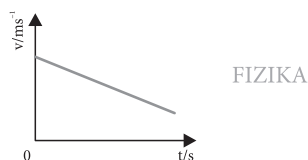
Matematika u fizici, fizika bez matematike¹

BLAŽENKA SLOVENEC² I NIKOL RADOVIĆ³

Poznavanje matematike jedna je od važnih vještina pri rješavanju problema u prirodnim (fizika, kemija, biologija...) i društvenim (psihologija, povijest...) znanostima. Može se reći da je matematika jezik (pismo) fizike (i ostalih znanosti). Međutim, iskustvo nam pokazuje da je matematika neprepoznatljiv dijalekt (*skup nesuvislih slova bez značenja*) fizike i ostalih grana prirodnih i društvenih znanosti, koji rezultira velikim brojem nepremostivih prepreka za učenike, ali i za njihove učitelje/nastavnike. Tipičan primjer nerazumljivog „dijalekta” između matematike i fizike prikazan je na slici 1. Zadatak iz matematike točno je riješilo više od 2/3 učenika, dok je zadatak iz fizike točno riješilo tek 3/25 učenika.

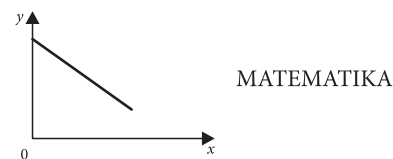
7. prikazan je graf gibanja nekog tijela. Koja tvrdnja najbolje opisuje gibanje tog tijela?

- Tijelo se giba stalnom akceleracijom različitom od nule.
- Tijelo se giba stalnom akceleracijom jednakom nuli.
- Tijelo se giba akceleracijom koja se jednoliko povećava.
- Tijelo se giba akceleracijom koja se jednoliko smanjuje.



16. U koordinatnom sustavu prikazan je graf pravca. Koja je tvrdnja točna?

- Nagib pravca je stalan i pozitivan.
- Nagib pravca je stalan i negativan.
- Nagib pravca se stalno smanjuje i negativan je.
- Nagib pravca se stalno smanjuje i pozitivan je.



Izvornik: www.nccvo.hr/20.06.2012./

Slika 1.

¹Na XI. HRVATSKOM SIMPOZIJU O NASTAVI FIZIKE s temom Nastava fizike i interdisciplinarnost, Primošten, 26. – 28. 03. 2013. održana je radionica istog naslova

²Blaženka Slovenec, Gimnazija, Sisak

³Nikol Radović, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb

Jedna od središnjih matematičkih tema algebre je proučavanje zakonitosti i funkcija. To proučavanje zahtijeva od učenika prepoznavanje i opisivanje zakonitosti te stvaranje matematičkog modela kako bi predvidjeli ponašanje stvarnog učinka koji pokazuje promatrana zakonitost. Taj proces zahtijeva vježbu i iskustvo. Širok raspon događanja zakonitog i kaotičnog ponašanja čini proučavanje zakonitosti i funkcija važnima. U nižim razredima osnovne škole učenici na neformalan način usvajaju rad sa zakonitostima. Pri proučavanju grafova, tablica s podacima, izraza/formula i jednažbi, učenici na različite načine tumače prikaze istih situacija. Tako se na neformalan način razvija shvaćanje da su funkcije sastavljene od varijabli čije su veze promjenjive – promjena jedne varijable uzrokuje promjenu druge. No, problemi počinju kada se to treba prepoznati, primijeniti u nekom drugom okruženju.

Poznato je da se znanja iz nekog predmeta mogu podijeliti na činjenično, konceptualno i proceduralno znanje. U različitoj učeničkoj dobi (od nižih razreda osnovne škole, preko srednje te fakulteta) primjenom različitih načina poučavanja, učitelji bi trebali utjecati na usvajanje tih znanja. Svjedoci smo ideje uvođenja konceptualnog pristupa nastavi fizike na fakultetu, gdje je i primjereno, ali i u osnovnim i srednjim školama. Zagovornici su uvjerenja da učenici te dobi mogu pokazati određenu razinu znanja, ali i razumijevanja primjenom odgovarajućih matematičkih vještina, svladavajući i algebarski pristup, što nije uvijek lako, ponajviše zato što učenici (a ponekad i studenti) loše ili gotovo nikako *povezuju* koncepte i potreban matematički alat. Ovo možda ne bi bio velik problem da ne postoji uzročno-posljedična veza između koncepta i strategija u matematici, koji se logično nastavljaju u fizici kod sadržaja koji to iziskuju. Npr. kvadratna jednažba – vertikalni hitac, osnovno poznavanje trigonometrije preko pravokutnog trokuta – sile na kosini. Ovim pristupom dio problema ostaje nerješiv za učenike, a većini i posve nerazumljiv, pa ostaje na razini koncepta. *Nastavnici često primjenjuju matematičke metode, ali rijetko o njima raspravljaju s učenicima* [1], što je vrlo bitno jer u fizici ne samo da se primjenjuju algebarske metode (*jednažba pravca, kvadratna jednažba, sinusoida...*), nego bi tu primjenu *trebalo* i raspraviti, kako bi učenici mogli primijeniti svoje znanje iz matematike pri rješavanju fizikalnih problema (jednažbu pravca kod jednolikog gibanja po pravcu, kvadratnu jednažbu kod vertikalnog hitca, sinusoidu i ovisnost o frekvenciji kod titranja i valova).

Samo po sebi nameće se pitanje: *Kako uspješno integrirati matematiku u nastavu fizike?* Jedan od problema uspješne integracije matematike u nastavu fizike je i način na koji se obrazuju budući nastavnici, kao i problem svladavanja vještina poučavanja. Problem se krije u obrazovanju nastavnika koje je opsežno i utemeljeno na algebarskom pristupu različitim fizikalnim predmetima[2]. Tako su naši nastavnici fizike osposobljeni za izračunavanje kompliciranih jednažbi i prevođenje fizikalnih problema na jezik jednažbi, ali njihovo fakultetsko obrazovanje ne daje im mogućnost razvijanja vještina uvođenja konceptualnog pristupa nastavi i umijeća spajanja kon-

ceptualnog i matematičkog aparata koji bi učenicima bio razumljiv i prihvatljiv. Može se reći da postoje dva problema:

- nastavnici koji koriste tradicionalne metode koje učenici ne prihvaćaju;
- učeničko nerazumijevanje fizikalnih koncepata i neosposobljenost za primjenu matematičkih znanja i vještina u nastavi fizike – što se u konačnici netočno kvalificira kao učenička nesposobnost da usvoje zadane sadržaje.

Rješenje ovih problema nije nimalo jednostavno jer ono iziskuje reformu pristupa matematičkim kolegijima na nastavničkom studiju fizike, koji bi trebali težiti primijenjenoj matematici, a ne, kao što je još uvijek slučaj, pukoj teoriji. Budućim nastavnicima fizike matematički bi kolegiji trebali dati širinu i omogućiti da učenicima na jednostavan način približe „tešku teoriju” kroz primjere iz njihovog svakodnevnog okruženja! Tako bi im na indirektan način pokazali da fizika nije predmet kojemu je cilj „mučenje” učenika, nego ih ona uči kako su fizikalni zakoni dio svakodnevnog života. Vjeruje se da će bolonjski proces pridonijeti pozitivnim promjenama.

Nužno je uočiti da nastavnici najčešće ne koriste ovakav pristup, što kao rezultat/posljedicu nužno ima učeničko nerazumijevanje, a često i nezainteresiranost. Moramo prihvatiti činjenicu da *tradicionalni pristup ne pomaže učenicima u shvaćanju bitnog, jer je težište na detaljima matematičkog postupka, a ne na interpretaciji i značenju rezultata* [3], koji zapravo imaju ključnu ulogu u razumijevanju i usvajanju znanja. Učenicima treba pomoći da prepoznaju koji su im matematički alati potrebni za rješavanje određenog fizikalnog problema. Postoji također nešto o čemu se ne govori. Pokuse u većini škola nije moguće izvoditi. Uzroci tome su materijalne neprilike, neusklađenost u opremljenosti kabineta ako i postoje... Nadalje, većina naših učenika sate i sate provodi na računalu igrajući različite „dinamične” igre, ali nema razvijenu sposobnost apstraktnog mišljenja. Uza sve navedene probleme i poteškoće, ne smijemo zanemariti učeničke miskoncepcije, kako u fizici tako i u matematici, koje se vrlo teško iskorjenjuju.

U ovom će radu na matematičkoj temi Vektori i operacije s vektorima biti prikazane neke od uobičajenih miskoncepcija u matematici, ali i pri njihovoj primjeni u fizici. Naime, pogreške su obično rezultat brzopletosti učenika, tj. njima nisu nepoznate matematičke vještine koje moraju prepoznati i primijeniti. Osnovno je pitanje zašto se javljaju učeničke miskoncepcije? Moramo priznati da uporno postavljamo krivo pitanje: **što** učenici rade krivo, umjesto da se pitamo **zašto** rade krivo? Ova pitanja zajednička su i u matematici i u fizici, ali i u drugim predmetima. Kako bismo sveli pojavu miskoncepcije na minimum, potrebno je

- **prepoznati** miskoncepcije koje postoje,
- **istražiti** miskoncepcije (idealno nekim dinamičnim programom) animacijama i pitanjima,

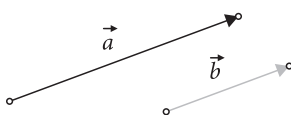
- učenici trebaju **objasniti** svoje miskoncepcije,
- **raspraviti** kontradiktorne koncepte učenika uz primjere, animacije ili pokuse, pitanja.

Pozabavimo se malo miskoncepcijama vezanima uz vektore, koje su zajedničke i matematičarima i fizičarima. Naime, problemi počnu u matematici pa se logički nadograđuju u fizici, ili jednostavno buknu u fizici iako su solidni temelji podignuti u matematici. Pogledajmo iduće primjere.

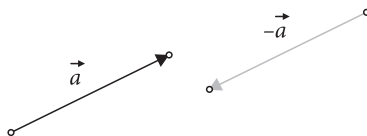
Klasični zadatci, Primjeri 1., 2. i 3., nisu problematični. Učenici ih rješavaju bez problema.

Primjer 1.

- a) U ravni su zadani kolinearni vektori \vec{a} i \vec{b} . Odredimo njihov zbroj $\vec{a} + \vec{b}$ i razliku $\vec{a} - \vec{b}$.



- b) Odredimo zbroj dvaju međusobno suprotnih vektora \vec{a} i $-\vec{a}$.



Primjer 2.

Dvije se ekipe natječu u povlačenju užeta. Ekipe *Herkules* i *Samson* povlače užu silom od 970 N, a ekipa *Samson* silom od 850 N.

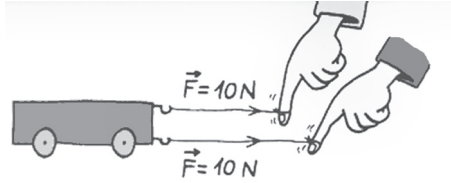


Slika 2.

- Djeluju li sile duž istog pravca?
- Kako su usmjerene te sile?
- Nacrtaj dijagram sila.
- Koja će ekipa pobijediti?

Primjer 3.

Ivan i Marko povlače autić kao što je prikazano na slici 3.



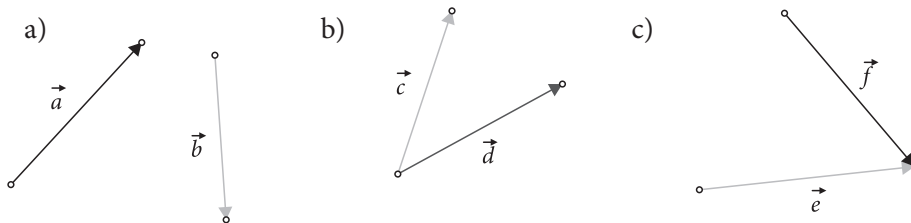
Slika 3.

- a) Djeluju li sile duž istog pravca?
- b) Kako su usmjerene te sile?
- c) Imaju li te sile jednaku veličinu?
- d) Kolika je rezultantna sila? Nacrtaj!

No, problemi se uočavaju u zadacima u kojima vektore zbrajamo/oduzimamo pravilom trokuta ili paralelograma, **Primjer 4.**, ili u kojima pravila treba prepoznati i primijeniti, **Primjer 5.**

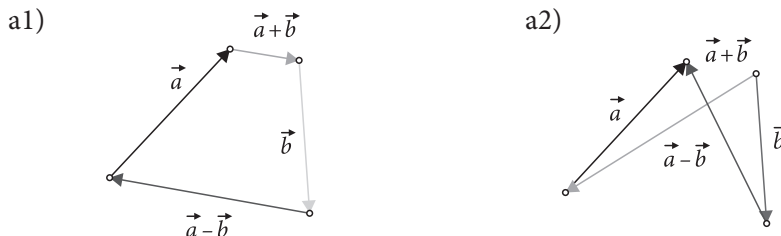
Primjer 4.

Zadani su vektori, slika 4. Precrtaj ih u bilježnicu i zbroji.

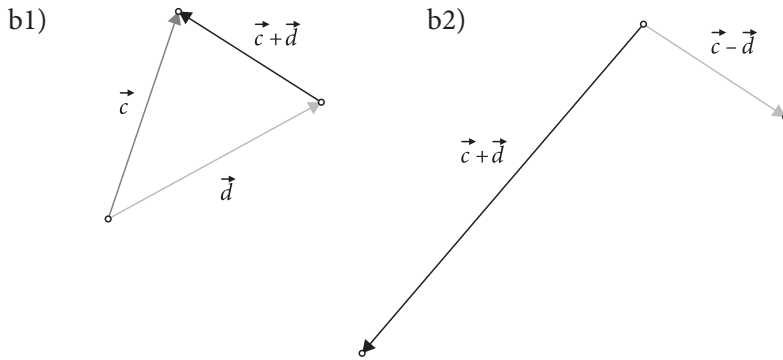


Slika 4.

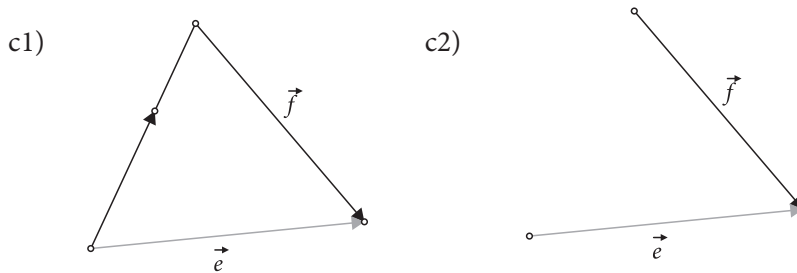
Neka od uobičajenih rješenja prikazana su na sljedećim slikama.



Slika 5.



Slika 6.



Slika 7.

U slučaju a) učenici znaju da vektori moraju biti povezani (vrh jednog vektora i rep drugoga te obratno), ali to primjenjuju na krivi način; nadalje, iz nekog razloga mišljenja su da su vektori fiksirani u ravnini/prostoru pa će do crtavanjem novih vektora definirati mnogokut i onda odrediti što će biti zbroj a što razlika vektora.

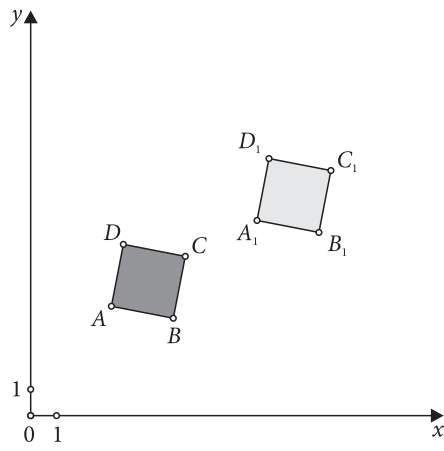
U slučaju b) samo crtaju rezultat koji je čak možda i dobar, ali prikazan na ovaj način „visi u zraku”, ili pak smatraju da je zbrajanje vektora isto kao preklapanje vektora preko vektora.

U slučaju c) većina učenika smatra da su vektori krivo zadani, pa ignoriraju smjer i dodaju treći vektor.

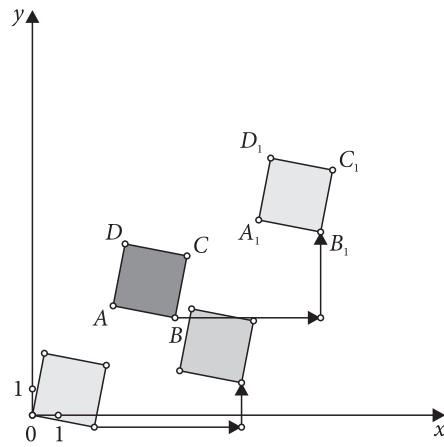
Primjer 5.

Na slici 8. prikazani su kvadrati $ABCD$ i $A_1B_1C_1D_1$. Odgovori na sljedeća pitanja: Translacijom prikaži vezu između kvadrata $ABCD$ i $A_1B_1C_1D_1$.

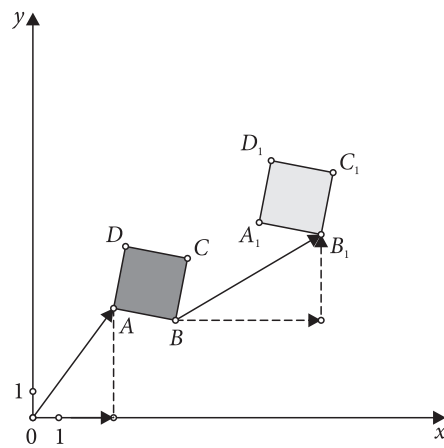
- a) Je li moguće translaciju između kvadrata $ABCD$ i $A_1B_1C_1D_1$ prikazati vektorom kojemu je početna točka $(0, 0)$? Ako jest, nacrtaj ga.
- b) Je li moguće translaciju između kvadrata $ABCD$ i $A_1B_1C_1D_1$ prikazati vektorom kojemu početna točka nije $(0, 0)$? Ako jest, nacrtaj ga.



Slika 8.



Slika 9.



Slika 10.

Učenci će „zalijepiti” kvadrat $ABCD$ tako da se vrh kvadrata A podudara s ishodištem koordinatnog sustava $(0, 0)$ i pokušati nekako namjestiti vektor tako da mu je strelica u odgovarajućoj točki kvadrata $A_1B_1C_1D_1$, slika 9.

Moguće je da će prikazati „pomak” geometrijskih figura kao rezultat zbrajanja dvaju vektora primjenom pravila trokuta, slika 10.

U zadatku nije zadana neka posebna točka koju treba preslikati, nego kvadrat $ABCD$ definiran vrhovima i stranicama. Učenci se obično tu izgube, iako bi bilo dovoljno uočiti (pa primijeniti) da se vrh A kvadrata $ABCD$ translacijom preslikava u određenu točku, vrh A_1 kvadrata $A_1B_1C_1D_1$ **ne u bilo koju** točku kvadrata $A_1B_1C_1D_1$. U **Primjeru 5.** bio je zadan kvadrat, no što bi tek bilo da je zadana neka „kompliciranija” geometrijska figura?

Prethodni primjeri iz matematike, koji se temelje na zbrajanju vektora pravilom trokuta, imaju primjenu u fizici, pri vožnji čamca rijekom ili plivanja u rijeci, **Primjer 6.** To su primjeri iz svakodnevnog života koje odrađujemo ne razmišljajući o primjeni fizike. Učenci moraju *primijeniti* pravilo trokuta pri zbrajanju vektora, ali i uočiti da rijeka „zanosi” i čamac i plivača, odnosno moraju *primijeniti* i Pitagorin poučak pri izračunavanju iznosa brzine. Praksa nam pokazuje da, koliko su god to usvojili u matematici, prepoznati i primijeniti usvojeno u fizici - predstavlja problem.

Primjer 6.

Plivač pliva brzinom od 5 km/h okomito na smjer djelovanja morske struje. Morska struja uzrokuje pomicanje morske vode brzinom 3 km/h. Odredi veličinu i smjer rezultirajuće brzine \vec{v} .

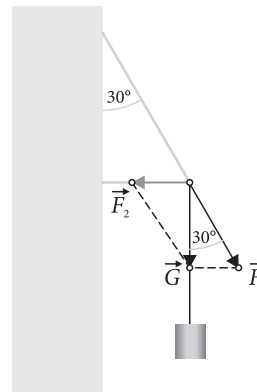


Slika 11.

Pogledajmo na primjerima iz udžbenika fizike [8] kako se „operira” s vektorima.

Primjer 7.

Dva su štapa učvršćena za vertikalni zid, kako prikazuje slika 12. O njihov spoj ovješena je utega od 400 g. Kolike su sile u štapovima?

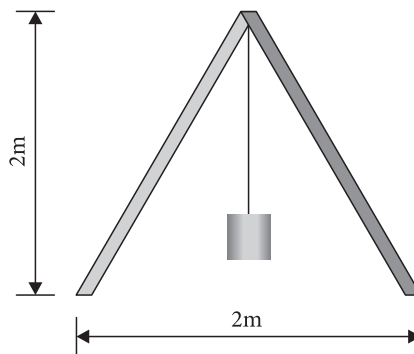


Slika 12.

- Učenici dobro uočavaju komponente \vec{G} (\vec{F}_g) i \vec{F}_1 , ali često ne nacrtaju \vec{F}_2 , pa ni ne primijene pravilo rastavljanja sila na komponente.

Primjer 8.

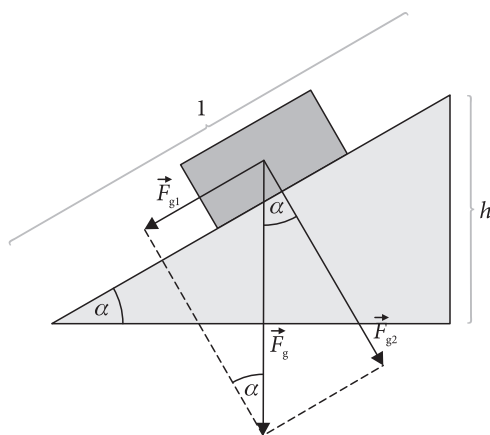
Teret mase 120 kg ovješeno je o štapove, kako prikazuje slika. Izračunajte sile u štapovima.



Slika 13.

- Učenici najčešće previde i ne uočavaju da su veličine sila na oba štapa jednake.

Primjer 9.



Slika 14.

- Rastavljanje sile na kosini je problem jer učenici ne uočavaju *sličnost trokuta*, što ima za posljedicu nemogućnost postavljanja relacije $\frac{\vec{F}_1}{G} = \frac{h}{l}$.

Primjer 10.

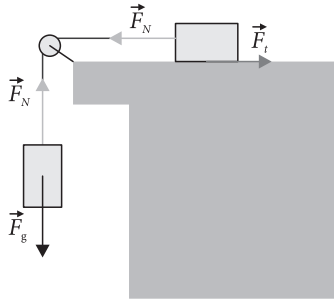
Tijelo mase m leži na kosini. Kolika je komponenta sile teže paralelna kosini i komponenta okomita na kosinu ako je nagibni kut kosine:

- a) 30° , b) 60° , c) 45° ? [8]
- Ovo je tipičan primjer gdje se matematičke miskonceptije o vektorima direktno impliciraju na fiziku.

Primjer 11.

Viseće tijelo prikazano na slici ima masu 5 kg, a tijelo na vodoravnoj podlozi 4 kg.

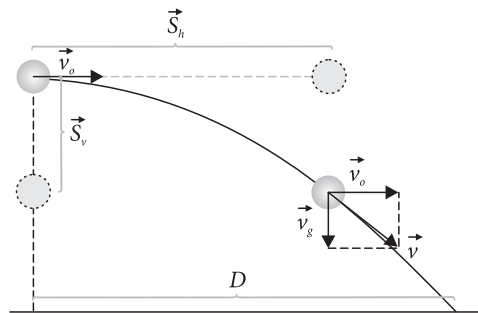
- Kolikom se akceleracijom gibaju tijela ako je faktor trenja između tijela i podloge 0.2?
- Kolika je napetost u užetu koje povezuje tijela?



Slika 15.

- Učenik mora primijeniti znanja o vektorima, zbrajanju sila, drugom Newtonovom zakonu i sili trenja. Kompleksno? Najčešće su pogreške već kod primjene drugog Newtonovog zakona i uočavanja/označavanja *svih sila* koje djeluju na oba tijela.

Primjer 12. Horizontalni hitac

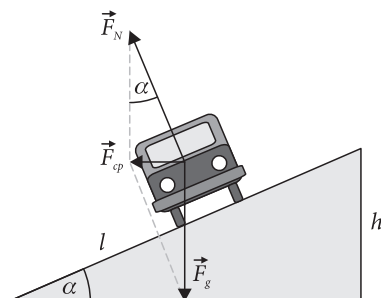


Slika 16.

- Kad zahtijevamo od učenika da nacrtaju vektore brzina za dvije zadane točke na putanji lopte koja je izbačena horizontalno s neke visine početnom brzinom \vec{v}_0 , oni najčešće nacrtaju horizontalnu komponentu koju obilježe oznakom \vec{v} , iz čega možemo zaključiti da ne razumiju značenje početne brzine koja je uvijek horizontalna komponenta, a kako nisu nacrtali \vec{v}_g , slijedi da zapravo **ne razumiju** složeno gibanje iako formalno znaju njegovu „definiciju”.

Primjer 13.

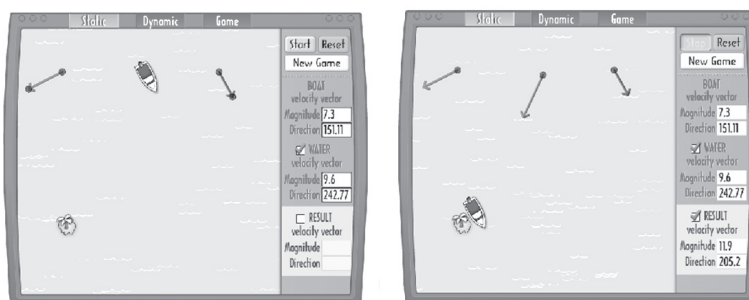
U zavoju polumjera zakrivljenosti 150 m vanjski rub ceste viši je od unutarnjeg za 1 m. Kolikom se najvećom brzinom kamion može gibati zavojem bez obzira na trenje ako je cesta široka 6 m?



Slika 17.

- U primjerima ovoga tipa učenici često kamion (odnosno automobil ili neko drugo prijevozno sredstvo) smatraju statičnim, tj. krivo pretpostavljaju da kamion *miruje* na kosini!

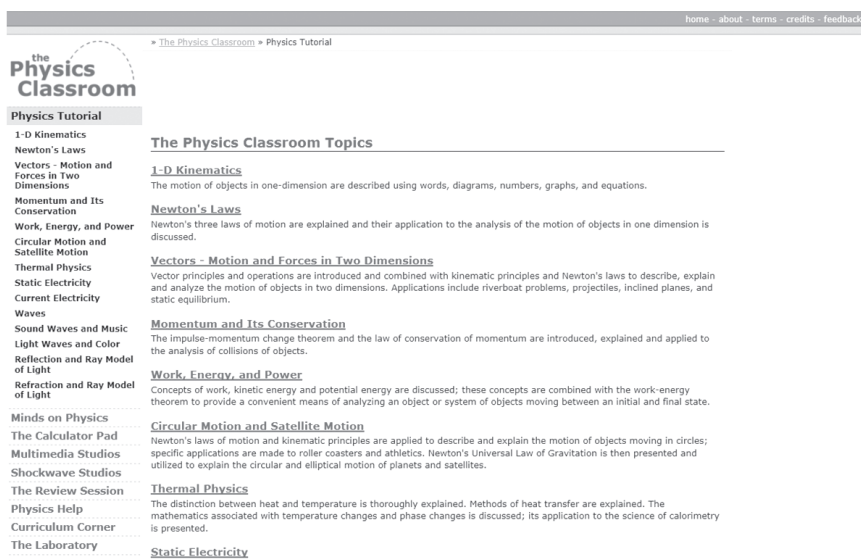
Kroz primjere su naznačeni problemi, ali ne postoji čarobno rješenje. Postupak promjene u poučavanju potreban je za buduće nastavnike, ali i učenike, jer su mis-koncepcije vrlo otporne i nije ih moguće iskorijeniti putem tradicionalnog poučavanja. Nadalje, jedna metoda svakako nije univerzalno rješenje, nego je potrebno kombinirati različite metode uz uvođenje tehnologije (doprinosi dinamičnosti poučavanja, ali i vizualizaciji) kao pomoćnog alata u svladavanju različitih tema iz matematike i fizike, kao i iz drugih znanosti. Dinamične igre, slika 18., osmišljene za određene teme fizike/matematike, omogućile bi učenicima da u njima poznatom okruženju (htjeli mi priznati ili ne, većinu svoga vremena učenici provode u igranju različitih neprimjerenih igara) kroz *netradicionalan* način usvajaju znanja.



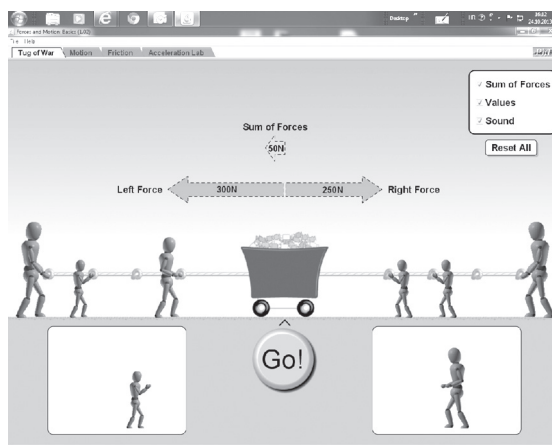
Slika 18.

Izvornik: <http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=42/27.02.2013/>

Na stranicama <http://www.physicsclassroom.com/Class/23.10.2013./>, slika 19. i <http://phet.colorado.edu/en/simulations/category/physics/motion/23.10.2013./>, slika 20., mogu se naći interaktivne aktivnosti koje pokrivaju različite teme iz fizike, sa zadatcima različitih težina. Na početku je zadatak/problem riješen korak po korak, pri čemu se uz objašnjenje pojavljuje i dinamična/interaktivna slika. Sljedeće zadatke/probleme učenici rješavaju sami ili u manjim grupama. Prednost je što je moguća provjera rješenja. Dana su objašnjenja i dinamična/interaktivna slika istoga, pa je lakše uočiti/ispraviti pogrešno razmišljanje u zaključivanju primjenom fizikalnih zakona uz matematički aparat, kao i u samom rješavanju problema/zadataka. Materijal koji se na tim stranicama može naći nije trivijalan nego dobro metodički osmišljen za pomoć u poučavanju učenika, ali i kao pomoć pri učenju.



Slika 19.



Slika 20.

Literatura:

1. M. P. Nicol. *How One Physics Teacher Changed His Algebraic Thinking*, Mathematics Teacher 90 (February 1997.). 86 – 89.
2. D. Toback, A. Mershin, I. Novikova. *A Program for Integrating Math and Physics Internet – Based Teaching Tools into Large University Physics Courses*, <http://cds.cern.ch/record/847616/15.02.2013./>
3. E. F. Redish. *Problem Solving and the Use of Math in Physics Courses*, Invited talk presented at the conference *World Vice and Physics Education in 2005.; Focusing on Change*, Delhi, August 21. – 26., 2005. 1 - 10.
4. R. Svedrec, N. Radović, T. Soucie, I. Kokić. *Tajni zadatak 008 – radna bilježnica iz matematike za osmi razred osnovne škole*, Školska knjiga, Zagreb, 2008.
5. R. Svedrec, N. Radović, T. Soucie, I. Kokić. *Tajni zadatak 008 – udžbenik sa zbirkom zadataka iz matematike za osmi razred osnovne škole + CD*, Školska knjiga, Zagreb, 2008.
6. Brad Glass *Transformations: What Path to Follow?* Mathematics Teaching in the Middle School, Vol. 9, No. 7. (March 2004.), 392 – 397.
7. J. Tuminaro. *How Students Use Mathematics in Physics: A Brief Survey of the Literature*, <http://hdl.handle.net/1903/1413/20.02.2013./>
8. J. Labor. *FIZIKA 1 – Udžbenik iz fizike za 1. razred gimnazije*, Alfa, Zagreb, 2005.
9. D. Halliday, R. Resnick, J. Walker. *Fundamentals of Physics – Enhanced problems version* Wiley; 2010.
10. E. Fischbein, D. Schnarch. *The Evolution With Age of Probabilistic Intuitively Based Misconceptions*, JRME, Vol. 28, No. 1, 1997., 96 – 105.

Internetske adrese:

- www.nccvo.hr/20.06.2012./
- www.nccvo.hr/20.10.2013./
- <http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=42/27.02.2013./>
- <http://www.physicsclassroom.com/Class/23.10.2013./>
- <http://phet.colorado.edu/en/simulations/category/physics/motion/23.10.2013./>
- <http://www.av8n.com/physics/vector-intro.htm/23.10.2013./>