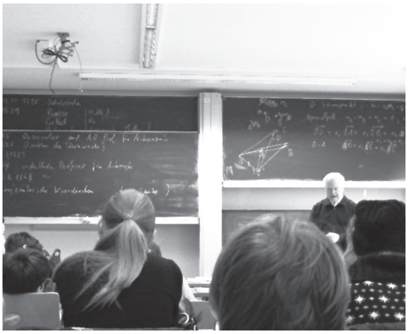
COMENIUS PROJEKT

Stjepan Budiša, 4.d XV. gimnazija

Program za cjeloživotno učenje

U prošlom broju Matke ukratko smo opisali čime se mi, učenici XV. gimnazije, bavimo radeći na projektu „Ins and outs of the magic Möbius strip". To je projekt u kojem proučavamo primjenu Möbiusove vrpce te njezine vrlo zanimljive karakteristike. Osim toga, ovaj projekt je poseban i zbog toga što u njemu sudjeluje više europskih škola koje zajedno surađuju. Jedna od tih škola je i Justus-von-Liebig Gymnasium iz Neusäβa u Njemačkoj, koju smo posjetili u listopadu 2011. godine. Ekipa od petero učenika i dvije profesorice uputila se u nedjelju, 16. listopada, u Njemačku gdje smo proveli tjedan nezaboravnih dana. U nedjelju ujutro razgledavali smo predivan grad München, a predvečer smo se susreli i upoznali s ostalim učenicima iz Engleske i Rumunjske, kao i s našim domaćinima u Njemačkoj.

München

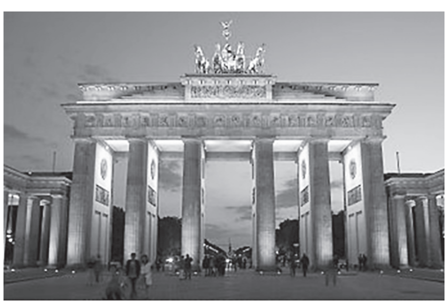


Predavanje u Leipzigu

Sljedeće jutro proveli smo u školi prezentirajući naše radove inspirirane Möbiusovom vrpcom, a kasnije smo krenuli na put prema Leipzigu, gdje smo posjetili Schulpfortu, rodno mjesto **Augusta Ferdinanda Möbiusa**, po kojem je naša traka dobila ime. U Leipzigu smo drugo jutro imali priliku odslušati izvrsno predavanje o Möbiusovoj biografiji te o njegovom znanstvenom životu i velikom doprinosu matematici.

Nakon predavanja prošetali smo Leipzigom koji nas se vrlo dojmio svojom osebujnošću.

Ubrzo nakon toga uputili smo se na podulji put prema Berlinu, njemačkom glavnom gradu. Nakon kratkog razgledavanja ovog ogromnog grada, po-



sjetili smo DFG Research Center Matheon. To je veliki istraživački centar čija se istraživanja većinom temelje na proučavanju 3D vizije.

Sljedeći dan posjetili smo Jenu koja nam se zbog svoje predivne stare gradske jezgre urezala u pamćenje. Osim toga, ono po čemu ćemo još više pamtiti Jenu bio je posjet Imaginati, velikom istraživačkom centru u kojem se znanstvenici uglavnom bave proučavanjem ljudske percepcije i optičkih varki. Vraćajući se u Neusäß, posjetili smo još Nürnberg i Augsburg, dva stara predivna njemačka grada.

Imaginata (Jena)

Schöner Brunnen (Nürnberg)

U petak smo se ponovno okupili u školi gdje smo u grupama proučavali primjenu Möbiusove vrpce u znanosti. Saznali smo da je ona primjenu našla u mnogobrojnim tehničkim aparatima, ali i u aparatima svakodnevne uporabe u kućanstvima. Najbolji primjer su VHS i audio kasete u kojima je traka namotana upravo kao Möbiusova traka kako bi se smanjila potrošnja materijala (budući da Möbiusova traka ima samo jednu stranu, njezina se površina može maksimalno iskoristiti). Poslijepodne nam je bilo slobodno pa smo ga iskoristili na druženje i zabavu. Sljedeći smo dan bili u posjetu Ulmu, gradu s najvišom katedralom na svijetu, čiji toranj doseže visinu od čak 95 m. Sljedeće jutro svi smo se okupili pred školom gdje smo se pozdravili s ravnateljem i profesorima te našim obiteljima-domaćinima. Uputili smo se na autobus koji nas je doveo do aerodroma u Münchenu s kojeg smo u poslijepodnevnim satima poletjeli za našu Hrvatsku. Bio je to jedan predivni tjedan kojeg se uvijek rado sjećamo.

To je bilo ukratko sve o našem divnom putovanju Njemačkom, a sada malo o matematici. Möbiusova traka vrlo je zanimljiva zbog niz svojih interesantnih fenomena koje smo istraživali. Dio toga su i grafovi koje ćemo vam sada pokušati na što bolji način približiti i pojasniti. Graf se sastoji od vrhova (točaka) i bridova (linija) koji povezuju neke od vrhova.

1. Eulerova formula

Leonhard Euler je polovinom 18. stoljeća došao do jedne jednostavne, ali značajne formule za matematiku. Ona povezuje broj vrhova nekog grafa s brojem bridova i brojem područja, a glasi:

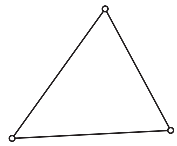
$$V + P = B + 2,$$

pri čemu je broj vrhova V, broj bridova B, a broj područja P. Kako bismo lakše razumjeli ovu formulu, nacrtajmo dva planarna grafa (to su grafovi čiji se bridovi ne sijeku).

$V = 2$

$P = 1$

$B = 1$

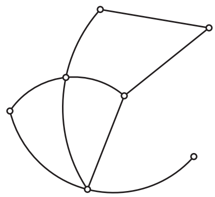


$V = 3$

$P = 2$

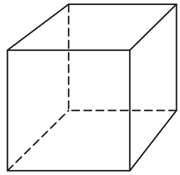
$B = 3$

Provjerite formulu i za ovaj graf:



Nacrtajte nekoliko grafova s različitim brojem vrhova, pazeći da im se bridovi ne sijeku, i provjerite formulu.

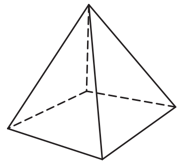
Formula se može primijeniti i na tijela. V predstavlja broj vrhova, P broj ploha te B broj bridova. Pogledajmo:



$V = 8$

$P = 6$

$B = 12$

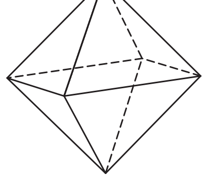


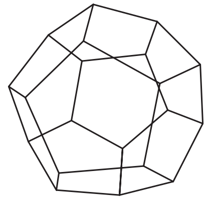
$V = 5$

$P = 5$

$B = 8$

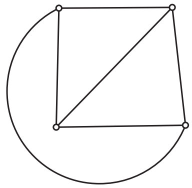
Uvrstivši varijable u Eulerovu formulu, vidimo da je zbroj vrhova i ploha nekog tijela uvijek jednak zbroju bridova i broja 2. Pokušajte i vi! Provjerite vrijedi li formula i za ove poliedre:





2. Potpuni planarni grafovi (na papiru i na Möbiusovoj traci)

Promotrimo sada potpune planarne grafove. To su grafovi čija su svaka dva vrha povezana direktnim bridom, ali se bridovi ne presijecaju. Nacrtajte potpuni planarni graf s 2 i s 3 vrha. Najveći mogući potpuni planarni graf jest upravo onaj s 4 vrha.



$V = 4$

$P = 4$

$B = 6$

V	*P*	*B*
2	1	1
3	2	3
4	4	6
5	7	10

Zašto na papiru ne postoji potpuni planarni graf s 5 vrhova? Zamislimo da takav graf postoji. Broj bridova morao bi biti 10 (iz prvog vrha prema četiri vrha, iz drugog vrha prema još tri vrha, iz trećeg vrha prema još dva, a četvrti vrh povežemo s petim). Pomoću formule $V + P = B + 2$ izračunamo broj područja, što iznosi 7. Međutim, svako područje omeđeno je s najmanje tri brida, a svaki je brid granica između dva područja te moramo dijeliti s 2, pa broj bridova treba biti najmanje $\frac{7 \cdot 3}{2}$. Dobiveni broj iznosi 10.5, što je veće od 10, čime dolazimo do zaključka da takav graf nije moguć. On ne postoji na papiru, no na Möbiusovoj je traci moguć, i to ne samo graf s 5 vrhova, već i sa 6, no ne i sa 7 ili više vrhova.

Nacrtajte na Möbiusovoj traci ovaj graf s šest vrhova i uvjerite se da je svaki vrh direktno povezan sa svakim od preostalih vrhova.