JEDNAKI ZBROJEVI

Alija Muminagić, Danska

Profesor Matkić svojim je učenicima zadao sljedeći zadatak:

U prazna polja tablice (na slici 1.) upišite različite prirodne brojeve tako da zbrojevi u oba retka budu jednaki te da i zbrojevi u sva tri retka također budu jednaki. Koje sve vrijednosti može poprimiti prirodni broj d?

3		2
	d	

Slika 1.

Petra i Janko pokušali su do rješenja doći pogađanjem i malo se – zapetljali! Razredni lumen Matko imao je drugi prijedlog: koristiti matematiku! Predložio je da se u prazna polja tablice upišu slova (zapravo brojevi) a, b i c kao na slici 2.

3	a	2
b	d	c

Slika 2.

Zatim se uvjeti zadatka zapišu algebarskim simbolima: $3 + b = 2 + c$, odakle je zaključio da mora biti

$$c = b + 1 \tag{1}$$

Uvrstio je (1) u tablicu na slici 2. i dobio tablicu prikazanu na slici 3.:

3	a	2
b	d	$b + 1$

Slika 3.

Sada je uvjete zadatka mogao napisati u obliku

$$3 + b = a + d \qquad \text{i} \qquad 3 + a + 2 = b + d + b + 1$$

odnosno

$$a - b + d = 3$$
$$a - 2b - d = -4 \tag{2}$$

Matko je uvjet zadatka zapisao u obliku sustava dviju jednadžbi, ali taj sustav nema dvije nego tri nepoznanice. Sada se i Matko zamislio. Na nastavi su učili rješavati sustave dviju jednadžbi s dvjema nepoznanicama, ali ovaj sustav ima „previše" nepoznanica. Je li ga moguće riješiti?

Pomozimo Matku! Iz obiju jednadžbi izrazimo vrijednost nepoznanice d pomoću nepoznanica a i b:

$$d = 3 - a + b$$

$$d = a - 2b + 4 \tag{3}$$

Zbrajanjem tih jednadžbi dobit ćemo da je $2d = 7 - b$, tj. da je $b = 7 - 2d$.

Dalje, iz $d = 3 - a + b = 3 - a + 7 - 2d$ slijedi da je $a = 10 - 3d$. Uzimajući u obzir činjenicu da je $c = b + 1$, dobivamo $c = 7 - 2d + 1 = 8 - 2d$.

Dobili smo da za brojeve a, b i c mora vrijediti niz uvjeta:

$$a = 10 - 3d,$$

$$b = 7 - 2d,$$

$$c = 8 - 2d.$$

Budući da je tablicu sa slike 1. potrebno ispuniti prirodnim brojevima, broj d može biti 1, 2 ili 3.

Za $d = 1$ dobivamo $a = 7$, $b = 5$ i $c = 6$.

Za $d = 2$ dobivamo $a = 4$, $b = 3$ i $c = 4$.

Za $d = 3$ dobivamo $a = 1$, $1 = 5$ i $c = 2$.

No, sve uvjete našeg zadatka zadovoljava samo trojka $a = 7$, $b = 5$ i $c = 6$ (zašto?), pa je konačno

3	7	2
5	1	6

Uočite: ključni korak u rješavanju zadatka bio je uočavanje i primjena činjenice da su svi brojevi koje je trebalo upisati u tablicu prirodni i međusobno različiti. Bez tog uvjeta zadatak ne bi imao jedinstveno rješenje!