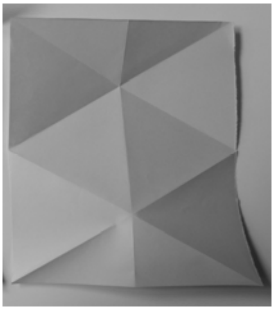
Matka 22 (2013./2014.) br. 86

Franka Miriam Brückler, Zagreb

MATEMATIČKI ORIGAMI – MITCHELLOV PRAVILNI OKTAEDAR

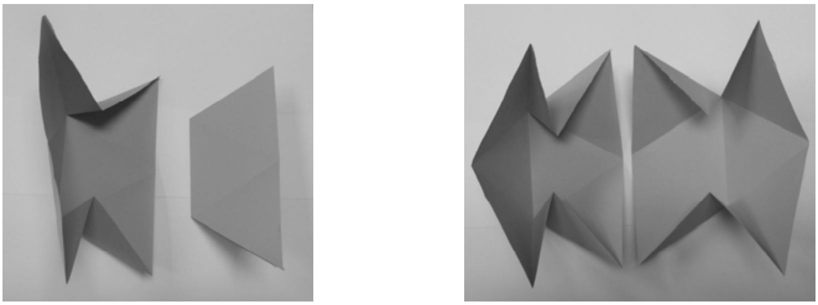


Slika 1. Jedan Mitchellov modul

U prošlom ste broju Matke susreli Mitchellov pravilni tetraedar napravljen iz dva modula. Predzadnji korak u savijanju tih modula izgledao je kao na slici 1. (Kako doći do tog koraka, piše u prošloj Matki!)

S druge strane, u pretprošlom broju Matke naučili ste napraviti jednu jednostavnu verziju pravilnog oktaedra, Nealeov oktaedar, no on, za razliku od Jacksonove kocke iz prvog nastavka ove rubrike i tetraedra iz prošlog, nije imao „pune" strane. Zanimljivo je da iz dva Mitchellova modula možete napraviti ne samo pravilni tetraedar, nego i oktaedar s „punim" stranama! Kako?

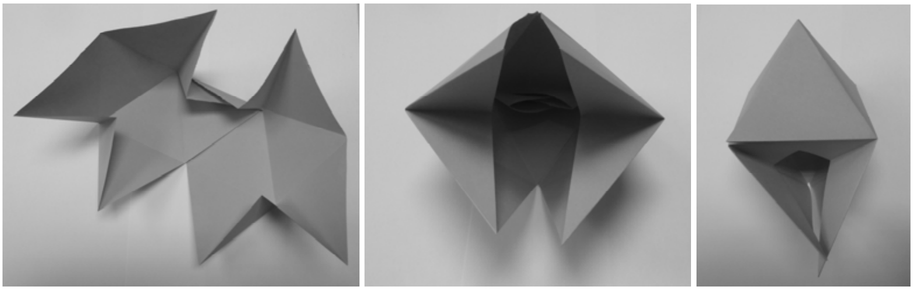
Evo ovako. Nakon što napraviš dva Mitchellova modula do koraka prikazanog slikom 1., za korak prije spajanja pripremiš ih na sljedeći način: presaviješ uzduž već savinute srednje linije (simetrale kraćih stranica papira) i utisneš male pravokutne trokute tako da dobiješ dva trapezna oblika (slika 2., lijevo). Prije spajanja, pojačaj sve linije savijanja (prema nutrini obaju modula; slika 2. desno).



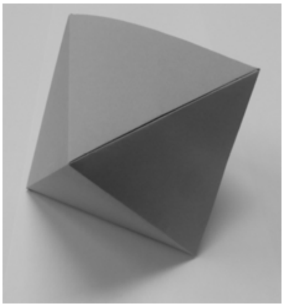
Slika 2. Zadnji korak izrade modula za Mitchellov oktaedar

Sad dolazi malo kompliciraniji dio. Imamo po dva rubna trokuta na modulima. Treba ih naizmjenično umetnuti i nametnuti jedan na drugoga tako da u konačnici dobijemo pravilni oktaedar. Postupak je bolje prikazati slikama, pa one slijede na slikama 3. i 4. ...

A najbolje je isprobati spajanje kao *puzzle* :-)



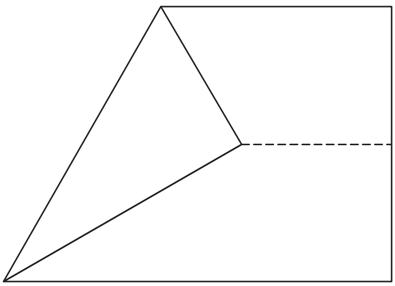
Slika 3. Spajanje modula u oktaedar



Slika 4. Gotov Mitchellov oktaedar

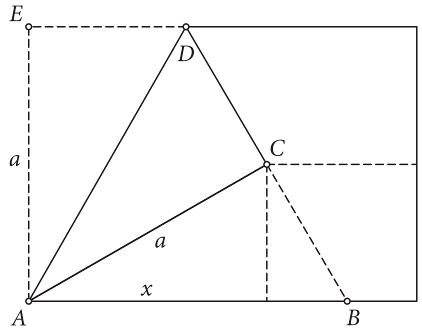
Što je zajedničko pravilnom tetraedru i oktaedru? Strane im se sastoje od jednakostraničnih trokuta, kod tetraedra njih 4, a kod oktaedra njih 8. No, jesmo li pri izradi Mitchellovih modula stvarno konstruirali jednakostranične trokute? Provjerimo...

U tu svrhu treba riješiti zadatak: Ako smo papir A-formata savili kao na slici 5., tj. kao u prva dva koraka izrade Mitchellovih modula, dokažimo da kutovi tako nastalog trokuta iznose 30°, 60° i 90°.



Slika 5. Dokažimo da trokut ima unutrašnje kutove 30°, 60° i 90°.

Zadatak nije teško riješiti... Jedan kut očito je pravi, dakle treba vidjeti da su druga dva 30° i 60°, a za to je dosta vidjeti da manji kut iznosi 30°, tj. trećinu pravoga kuta. Zamislimo da smo opet rasklopili papir i označili mu točke i duljine dužina kao na slici 6.



Slika 6. Rješenje zadatka sa slike 5.

Kako (zbog postupka savijanja) imamo tri pravokutna trokuta *EAD*, *CAD* i *CAB* koji su sukladni (imaju iste hipotenuze i pravi kut nasuprot njih te po jednu katetu duljine $a = |AE| = |AC|$), te kako je kut *EAB* (jer krećemo od pravokutnog lista papira) pravi, slijedi da su kutovi *EAD, DAC* i *CAB* jednaki trećini pravog kuta, tj. 30°. Dokaz je gotov!

Dakle, kutovi koji nastaju pri savijanju Mitchellovih modula iznose 30°, 60° i 90°, pa sami zaključite da su središnji dijelovi tih modula (koji na kraju čine strane tetraedra odnosno oktaedra) jednakostranični trokuti.

Ono što je ovdje najvažnije za neke naše buduće konstrukcije jest da smo sad naučili, krenuvši od pravokutnog komada papira, konstruirati kutove od 45° i 60° (te, kako je prepolavljanje danog kuta očigledno) i sve polovine, četvrtine itd. istih kutova (22.5°, 30°, 15°, ...).

Za kraj, evo dvaju zadataka za vas:

- Pravokutnici sa svojstvom da im se prepolavljanjem (paralelno kraćim stranicama) ne mijenja omjer dulje i kraće stranice zovu se *srebrni pravokutnici*. Koliki je taj omjer?
- Papiri A-formata su srebrni pravokutnici. Je li za konstrukciju Mitchellovih modula nužno krenuti od papira A-formata? Ako ne, koliki je najmanji potrebni omjer dulje i kraće stranice pravokutnog papira da bi konstrukcija bila provediva?