

Razvoj matematičkih pojmova

Doc. dr. Zora Marendić, Pedagoški fakultet u Sarajevu,
Ulomak iz članka: Teorijski okvir razvoja matematičkih pojmova u dječjem vrtiću, Metodika 18, Vol. 10, br. 1, 2009.
Tekst prilagodila: Helena Burić
Preneseno s dopuštenjem autorice



Ostvarivanje razvojnih ciljeva i zadataka u suvremenom predškolskom kurikulumu s aspekta razvoja matematičkih pojmova zahtijeva dobro poznavanje osnovnih karakteristika razvoja predškolskog djeteta, načina na koji ono uči i prirodu svakog pojedinog matematičkog pojma kojeg dijete usvaja u ranoj dobi.

Metodika razvoja početnih matematičkih pojmova interdisciplinarno je znanstveno područje koje koristi znanstvene spoznaje iz predškolske pedagogije, razvojne psihologije, matematike, didaktike, predškolske metodike, psihologije učenja, logike i sociologije. Zbog visokog stupnja apstrakcije, kao osnovne odlike matematičkih sadržaja, kao i dobi i razvijenosti djeteta, metodika razvoja matematičkih pojmova posebno je upućena na teorijske i empirijske rezultate istraživanja razvojne psihologije. U teorijskim pristupima i odgojnoj praksi prisutno je nepodijeljeno mišljenje da razvoj početnih matematičkih pojmova mora pratiti, odnosno, biti u skladu s:

- razvojnim karakteristikama predškolske djece, odnosno prirodom tog razvoja, a posebno prirodom njihovog spoznajnog razvoja i
- karakteristikama procesa učenja predškolskog djeteta.

Iz ovih saznanja proizlaze osnovne metodičke smjernice koje osiguravaju uspješno ostvarivanje odgojno-obrazovnih zadataka na planu razvoja početnih matematičkih pojmova kod predškolske djece u okviru institucionalnog predškolskog odgoja.

Osnovne karakteristike dječjeg spoznajnog razvoja u funkciji razvoja matematičkih pojmova

Matematički sadržaji su po prirodi apstraktni, ali da bi se izbjegle visoke apstrakcije i da bi

razvoj ovih pojmova pratio prirodan put dječjeg razvoja, nužno je poznavati osnovne karakteristike tog razvoja. Ovdje ćemo ukratko iznijeti neke najvažnije spoznaje, značajne s aspekta metodičkog pristupa u procesu razvoja matematičkih pojmova.

Jedan od najpoznatijih svjetskih psihologa-epistemologa svakako je *Jean Piaget* (1896.-1980.). Bit njegove biološki-teorijske teorije sastoji se u tvrdnji da je učenje podređeno razvojnom procesu djeteta, da ono ovisi o razini razvoja te, da je za razvoj presudan utjecaj sazrijevanja. Predoperacijsko razdoblje (u Piagetovoj periodizaciji dječjeg kognitivnog razvoja), nalazi se između druge i šeste godine života. Osnovna karakteristika predoperacijskog razdoblja je tzv. situacijska inteligencija. Dijete je u ovom razdoblju pod snažnim utjecajem vizualnog doživljaja stvarnosti i njegova misao je 'zarobljena' perceptivnim mehanizmima'. Dijete ove dobi shvaća samo one kvantitativne i prostorne odnose koji su perceptivno dati. Međutim, znanje nije samo kopija realnosti, to je nešto više, jer pojedinac mora objekte na odgovarajući način transformirati na misaonom planu kako bi stekao znanje o njima. S ovog stajališta i sa stajališta egocentričnosti dječje misli Piaget ističe da se predškolsko razdoblje odlikuje odsustvom konzervacije, reverzibilnosti, serijacije i inkluzije. Piaget ističe značenje razvoja govora i smatra da se u predoperacijskoj fazi razvoja govora 'formiraju predodžbe,

dolazi do interiorizacije materijalnih radnji (ono što je bilo vanjsko, akcijsko i konkretno, postaje postupno unutrašnje i simboličko, dakle mentalno)' (Prentović-Sotirović, 1998.).

Iako je Piagetova teorija doživjela, i stalno doživljava, određene kritike, ne može se zanemariti činjenica da je imala i još uvijek ima značajne pedagoške vrijednosti iz kojih se mogu izvesti sljedeće pozitivne pedagoške (metodičke) implikacije za razvoj početnih matematičkih pojmova: (Prentović-Sotirović, 1998., Kamii, 1971.)

- dječje učenje je stalan proces konstruiranja znanja u kojem nezamjenjivu ulogu igra dječja vlastita aktivnost (u ovom procesu ne možemo govoriti o prenošenju znanja, nego o aktivnom stjecanju znanja kroz praktično-manipulativne i mnoge druge aktivnosti koje će se nalaziti u osnovi aktivne mentalne konstrukcije);
- djetetu se mora dopustiti da uči na svoj način;
- učenje predškolskog djeteta mora biti u skladu s razinom dječjeg kognitivnog razvoja;
- pozornost treba usmjeriti na opći kognitivni razvoj, a ne samo na specifične vještine;
- iako kognitivni razvojni proces ima određeni slijed, ne smiju se zanemariti individualne osobnosti svakog pojedinog djeteta, jer svako dijete ima svoj ritam razvoja;
- u procesu učenja treba omogućiti djeci da steknu više samopouzdanja u vlastiti način doživljavanja stvari, da se više oslanjaju na vlastite procese rezoniranja, umjesto da uče putem konformiranja;
- logičko-matematičke strukture izgrađuju se određenim redoslijedom koji je potrebno poznavati i pridržavati ih

¹ Piagetova istraživanja su podvrgnuta mnogim preispitivanjima i kritici, kako suvremeni tako i novijih istraživača. Vygotski, Bruner, Galperin i mnogi drugi su, i pored isticanja golemog značaja koji je Piaget imao za razvoj razvojne psihologije, preispitali neke njegove rezultate, osporavali ih i osvjetljavali s drugog aspekta. Knjiga Margaret Donaldson 'Um djeteta' i Davida Wooda 'Kako djeca misle i uče', predstavlja značajan prilog tim raspravama.



Prije početka formalnog školovanja djeca usvoje mnoga matematička znanja

se u procesu učenja u ranoj dobi;

- da bi se dosegao određeni stadij razvoja, moraju se prijeći prethodni koraci na kojima počiva sljedeći stadij;
- važno je zahtijevati da djeca kažu ono što misle i da verbaliziraju svoje iskustvo; mora se dopustiti djeci da se slobodno izražavaju;
- uloga odgajatelja ne sastoji se u prenošenju gotovih znanja – on je tu da pomogne djetetu da samo izgradi svoje znanje i to tako što će voditi njegovo iskustvo.

Jerome Bruner dijeli Piagetovo mišljenje o spoznaji kao aktivnoj konstrukciji subjekta. Međutim, on se protivi biologističkom shvaćanju razvoja i smatra da ne postoji unutarnji pokretač učenja bez vanjskog poticaja (Prentović-Sotirović, 1998., Bruner, 2000.). Kao relevantne vanjske 'podačivače' procesa učenja Bruner vidi u društvenim subjektima, obitelji i institucijama odgoja i obrazovanja. Po tome je njegova teorija mnogo bliža učenju Lava Vygotskog. Objasnjavajući tri faze reprezentacije stvarnosti: akcijsku, ikoničku i simboličku, Bruner naglašava da je predodžba objekta u mislima neodvojiva od akcije djeteta u odnosu na taj objekt, dok je riječ

najviša razina reprezentacije stvarnosti. Autor posebno značenje pridaje govoru smatrajući da riječi olakšavaju razvoj pojmova, jer *stabilizacija pojmova zahtijeva svoj verbalni oslonac* (Manojlović-Arsić, prema Prentović-Sotirović, 1998.). Najznačajnije pedagoške implikacije njegovog učenja su istovremeno značajne i s aspekta razvoja matematičkih pojmova u ranoj dobi (Prentović-Sotirović, 1998., Wood, 1995., Stojaković, 1981.):

Svi se matematički pojmovi 'grade' na predmetima, objektima i pojavama realnog svijeta dovodeći ih u veze i odnose na mentalnom planu, a uz pomoć simboličkih struktura kakvi su govor i drugi pisani znakovi.

- rani odgoj i obrazovanje ima pozitivan utjecaj na dječji razvoj i ono mora biti prilagođeno stupnjemima dječjeg razvoja, na način koji je istovremeno zanimljiv i ispravan;
- učenje je svrhovitije, zanimljivije i uspješnije ako proizlazi iz unutrašnje motivacije subjekta;
- treba poticati one kognitivne operacije koje su primarne razvojnog stadiju na kojem se dijete nalazi i

koje će omogućiti daljnji spoznajni razvoj;

- djeca su u stanju razumjeti mnoga znanja ako im se približe na njima razumljiv i prihvatljiv način;
- spoznajni razvoj mora se temeljiti na aktivnoj konstrukciji znanja;
- treba više pozornosti posvetiti učenju općih načela i ideja i načinu poučavanja;
- učenje i komunikacija su po svojoj prirodi nerazdvojni; govor ima nezamjenjivu ulogu u dječjem kognitivnom razvoju;
- poučavanje i komunikacija, i zajednički rad djece i odraslih, imaju golem značaj u procesu učenja i rješavanja problema.

Lav Vygotski najpoznatiji je ruski psiholog čiji su rad nastavile generacije ruskih psihologa. Tvorac je socijalno-kulturne teorije koja ističe da su više mentalne funkcije socijalnog porijekla te da su determinirane čimbenicima kao što su: zajedničke praktične aktivnosti, socijalna interakcija, znakovni sustavi (prije svega govor, pismo i sl.) i komunikacija pomoću njih (Prentović-Sotirović, 1998.). Niže mentalne funkcije su prirodne, a više mentalne funkcije su rezultat kulturnog razvoja. Vygotski pridaje veliko značenje kvalitetnoj komunikaciji među sudionicima odgojno-obrazovnog procesa,

smatrajući ga jednim od osnovnih činitelja i pokretača mentalnog razvoja. Poticanje 'sljedeće faze razvoja' predstavlja ključni moment njegove teorije razvoja i njezine primjene u praksi. 'Ispitivanje pokazuje da *zona sljedećeg razvoja ima neposrednije značenje za dinamiku intelektualnog razvoja i uspjeh negoli aktualna razina njihovog razvoja.*' (Vygotski, 1983.). Dječji kognitivni razvoj analizira kroz sljedeće



Osigurajte djeci okolinu bogatu materijalima koja će potaknuti rješavanje problema



Važno je osigurati atmosferu u kojoj rasprava pomaže izgradnji djetetovih znanja

razvojne stupnjeve: sinkretičko mišljenje; mišljenje u kompleksima; faza potencijalnih pojmova (prisutnost misaonih procesa analize i apstrakcije) i stvaranje pravih pojmova. Vygotski ističe da je rani razvoj vrlo složen i da se razni oblici mišljenja ne javljaju sukcesivno, nego se mnogi od njih razvijaju paralelno. Pedagoške implikacije njegove teorije razvoja djeteta bile bi sljedeće: (Vygotski, 1983., Prentović-Sotirović, 1998.):

- poučavanje predškolskog djeteta mora se razlikovati od poučavanja školskog djeteta;
- u procesu dječjeg razvoja potrebno je uvažavati razvojne razine misaonih sposobnosti djeteta;
- učenje treba prethoditi razvoju;

- u suradnji dijete može uvijek učiniti više nego samostalno – ne beskrajno više, nego samo u izvjesnim granicama, strogo određenim njegovom razvoju i njegovim intelektualnim mogućnostima;
- dijete u suradnji lakše rješava zadatke najbliže svojoj razini razvitka;
- ono što dijete sada može učiniti u suradnji, sutra će moći samostalno;
- treba poticati funkcionalnu upotrebu riječi poticanjem djeteta na verbalizaciju radnji, relacija i dr.
- dječji razvoj treba se zbivati u okviru igrovne ili praktične aktivnosti djeteta, a uloga odgajatelja je da organizira i aranžira sredinu i da utječe tako da potiče i održava aktivnost djeteta/djece.

Metodički put razvoja matematičkih pojmova

Može se zaključiti da svi spomenuti psiholozi dijele sljedeći jedinstven stav o spoznajnom razvoju predškolskog djeteta:

- dječji razvoj u ranoj dobi odlikuje se određenim specifičnostima s obzirom na osnovnoškolsko dijete i odraslog čovjeka, i
- svaka etapa dječjeg razvoja predstavlja bazu buduće razvojne faze.

U tom smislu Piaget govori o fizičkoj spoznaji kao uvjetu za razvoj logičko-matematičke spoznaje; Bruner govori o akcijskoj fazi kao osnovi za više stupnjeve prezentacije stvarnosti; Vygotski ističe značenje dječjeg praktičnog, a posebno socijalnog iskustva u tom procesu; Zaporožac i Eljkonin ističu da verbalno-pojmovnom mišljenju prethodi opažajno-praktično i opažajno-predodžbeno mišljenje.

Upravo na tim spoznajama izgrađen je osnovni *metodički put* razvoja matematičkih pojmova koji se može izraziti na način kako je to prikazala Liebeck P. (1995.):

- I** – iskustvo fizičkih predmeta;
- G** – govorni jezik koji opisuje to iskustvo;
- S** – slike koje prikazuju to iskustvo; i
- Z** – pisмени znakovi koji generaliziraju to iskustvo.

Takav redoslijed metodičkog pristupa u skladu je sa shvaćanjem uzajamnog odnosa fizičke i logičko-matematičke spoznaje te odnosa socijalne i logičko-matematičke spoznaje. Dakle, zajedničko za sve autore/psihologe je isticanje da se svi matematički pojmovi 'grade' na predmetima, objektima i pojavama realnog svijeta dovodeći ih u veze i odnose na mentalnom planu, a uz pomoć simboličkih struktura kakvi su govor i drugi pisani znakovi. To je važno metodičko uporište u razvoju matematičkih pojmova koje govori o tome da je neposredna okolina – ne samo neposredna fizička okolina nego i dječja socijalna sredina – nezamjenjiva u procesu razvoja logičko-matematičkih struktura.

Kako djeca usvajaju matematičke pojmove

Prof. dr. sc. Vesna Vlahović-Štetić
Odsjek za psihologiju, Filozofski fakultet, Sveučilište u Zagrebu
Ulomak iz članka: Matematika za život, Dijete, škola, obitelj, Br. 24, 2009.
Tekst prilagodila: Helena Burić
Preneseno s dopuštanjem

Stjecanje predmatematičkih i matematičkih znanja započinje vrlo rano. Istraživanja pokazuju da već i kod beba starijih oko 6 mjeseci možemo uočiti neka od tih znanja. Tako su primjerice bebe sposobne uočiti jednakost ili razliku među skupovima koji imaju do četiri elementa (Klein i Starkey, 1987.). Do tog zaključka došlo se ispitujući habituaciju. Habituacija je vrijeme koje bebe provedu gledajući u neki podražaj – ukoliko im je podražaj poznat, gledaju ga kraće, a ako je nov, dulje zadržavaju pozornost na njemu. Bebama su prikazivali slike na kojima su bili skupovi od primjerice tri objekta. Slika se od slike razlikovala po veličini objekata, njihovom obliku, međusobnoj udaljenosti, teksturi i svjetlini, no na svakoj slici su bila tri objekta. Nakon nekog vremena bebe su sve kraće obraćale pozornost na prikazane slike jer su im one bile već poznate (došlo je do habituacije). Međutim, ukoliko bi se nakon toga u nizu pojavila slika s dva ili četiri objekta, bebe su dulje gledale u novu sliku pokazujući time da uočavaju razliku između nje i onih prethodno prikazanih. Zanimljivo je da bebe, ukoliko je broj objekata na slici bio veći od četiri, nisu bile više sposobne za razlikovanje, dakle jednako dugo promatraju nizove od 6 objekata kao i novu sliku od 5 objekata. Tek s tri ili četiri godine života djeca mogu razlikovati skup od četiri elementa od skupa od pet ili šest elemenata (Starkey i Cooper, 1980.). Tijekom druge godine života djeca nauče nazive brojeva, roditelji ili bake i djedovi ih spominju penjući se

s mališanima uza stube, odbrojavaju korake u šetnji, recitiraju brojalice. No u toj dobi djeca ne pridružuju tim imenima uobičajeno značenje koje im pridružuju odrasli (Wynn, 1992.). Djeca su u stanju ponavljati ili samostalno govoriti: 'jedan, dva, tri, jedan dva, tri'

Bebe su sposobne uočiti jednakost ili razliku među skupovima koji imaju do četiri elementa.

a da im pritom nazivi brojeva ništa ne znače, odnosno predstavljaju samo dio rituala penjanja uza stube. Tijekom treće godine počinje stvarno učenje brojenja. **Iako odrađlim zvuči sasvim jednostavno, brojenje je složena aktivnost koja uključuje čitav niz načela** (Gelman i Meck, 1986., Nunes i Bryant, 1996.):

- načelo pridruživanja jedan prema jedan – svakom predmetu može se pridružiti samo jedan broj;
- načelo ordinalnosti – brojevi su poredani od manjeg prema većem (položaj u nizu je stalan);
- načelo kardinalnosti – zadnji izgovoreni broj predstavlja ukupan broj predmeta u skupu;
- načelo prebrojivosti – bez obzira koliko je elemenata u skupu, oni se mogu prebrojiti;

- načelo nevažnog redoslijeda – promjena redoslijeda pridruživanja brojeva ne mijenja ništa – može se početi brojati s bilo koje strane;
- načelo konzervacije – bez obzira na prostorni raspored, broj predmeta je stalan;
- načelo tranzitivnosti – stalnost u usporedbi između tri ili više predmeta ($A > B$, $B > C$, $A > C$ ili Ako je lva niža od Petra i Petar je niži od Ane, onda je i lva niža od Ane);
- načelo reverzibilnosti – razumijevanje reverzibilnog odnosa zbrajanja i oduzimanja ($5+2-2=5$), dakle ako nekom skupu dodamo i odmah oduzmemo isti broj, stanje se ne mijenja.

Načela brojenja ne usvajaju se istodobno; neka prethode drugima pa tako tek četverogodišnjaci razumiju princip kardinalnosti, tj. da je broj elemenata u skupu jednak zadnjem broju izrečenom tijekom brojenja. Mlađa djeca mogu uspješno prebrojiti elemente u skupu, ali ne znaju odgovoriti na pitanje: 'Koliko ovdje ima autića (pikula, bombona)?' Otprilike u dobi od četiri do pet godina djeca postaju sposobna odgovoriti i na probleme ordinalnosti: 'Što je više: pet ili šest jabuka?' Što su spomenuti brojevi pritom međusobno bliže na brojevnom pravcu, to im više vremena treba za odgovor (Donaldson i Balfour, 1968.). Dakle, djeca će puno brže odgovoriti na problem: 'Petar ima 3 olovke, a Igor ima 8 olovaka. Tko ima više?' nego na pitanje 'Petar ima 6 olovaka, a Igor ima 8 olovaka. Tko ima više?' Također, kad je riječ o načelima



Djeca pri zbrajanju rabe različite strategije

brojenja, mnoga djeca ih nisu u stanju verbalizirati ali ih uspješno primjenjuju, a ta je vještina vrlo važna za kasnije matematičko postignuće. Prije početka formalnog školovanja djeca usvoje mnoga matematička znanja: obično svladaju brojanje do 10, razlikuju glavne i redne brojeve, te nauče pisane simbole za jednoznačenaste brojeve (Sinclair i Sinclair, 1986.). Predškolska djeca znaju i zbrajati i oduzimati u skupu do 10, a pritom za zbrajanje rabe različite strategije (Fuson, 1990.):

- prebrojavanje elemenata (1, 2, 3, 4... 7);
- nastavljanje prebrojavanja na jedan od pribrojnika, pri čemu djeca brzo nauče da je lakše nastaviti od većeg pribrojnika (4 + 3 kao četiri, pet, šest, sedam);
- rastavljanje pribrojnika na jednake brojeve i pribrajanje ostatka (3 + 3 = 6 i još 1 je 7);
- dozivanje informacije iz dugoročnog pamćenja.

Slične su i dječje strategije za oduzimanje (Siegler, 1987.):

- podizanje u zrak prstića koji predstavljaju umanjitelj, spuštanje onoliko prstića koliko iznosi umanjitelj i prebrojavanje ostatka;
- ista operacija bez konkretnih objekata, samo brojeći naglas;
- uporaba prstića za prikazivanje umanjitelja i umanjitelja, ali pre-

ostale prstiće ne prebrojavaju već samo izriču njihov broj;

- dozivanje rezultata iz dugoročnog pamćenja.

Što je posao odgajatelja?

Istraživanja dječjih matematičkih postignuća pokazuju da su konstruktivisti bili u pravu govoreći da je posao odgajatelja:

- pomoći djetetu da nadograđuje na postojeće znanje (djeca imaju neformalna matematička znanja i na njima treba graditi nova);
- omogućiti djetetu slobodu za njegove vlastite konstrukcije (prečesto u matematici dopuštamo samo određeni način rješavanja problema a ne uvažavamo da djeca mogu imati svoje vlastite strategije koje mogu odlično funkcionirati);
- osigurati atmosferu u kojoj rasprava pomaže izgradnji djetetovih znanja (atmosfera u kojoj se raspravlja o putovima rješavanja problema može pridonijeti djetetovim matematičkim spoznajama);
- učenje se može odigravati i kroz kognitivni konflikt pred koji odgajatelj stavlja dijete kao bi preispitalo svoja znanja (prečesto poučavamo tako da izravno serviramo rješenja umjesto da djeci ponudimo situacije u kojima sami moraju naći odgovore na nejasnoće i dvojbe);
- pripremiti manipulativne materijale ili ilustracije nužne za poučavanje

s razumijevanjem (u poučavanju matematike rabimo manipulativne materijale, ali relativno brzo odstajemo od njih iako su djeca sve negdje do 6. razreda u razvojnoj fazi konkretnih operacija);

- osigurati socijalnu interakciju – dijete će biti potaknuto reakcijama druge djece (matematika se u školama vrlo često poučava kao samostalno rješavanje zadataka, a djeca bi mogla puno naučiti u međusobnoj interakciji i razmjeni strategija);
- omogućiti djeci bogatu okolinu, složene situacije koje će potaknuti rješavanje problema (računanje nije izazov ali rješavanje složenih problema jest, a to je ujedno i priprema za onakvu matematiku s kojom ćemo se susretati u stvarnom životu).

Literaturu korištenu u člancima možete vidjeti na www.korakpokorak.hr

