UDK 528.061:528.28
Pregledni znanstveni članak

Točnost presjeka naprijed

Miljenko LAPAINE, Željka TUTEK, Martina TRIPLAT HORVAT – Zagreb[1]

SAŽETAK. Dan je pregled određivanja točnosti položaja točke određene presijecanjem naprijed uz pretpostavku da su poznate i bez pogrešaka određene dvije točke u kojima su mjereni kutovi prema nepoznatoj točki. Procjena točnosti presijecanja naprijed može se naći u literaturi, no izvodi odgovarajućih formula katkad su pogrešni. U nekim slučajevima izvodi su korektni, ali izvedeni zaključci nisu. Nadalje, mogu se naći izvodi koji su korektni, ali nepotpuni. U ovome se radu ukazuje na uočene propuste u literaturi i upotpunjuje jedan od nepotpunih izvoda. Dolazi se do zaključka da se točka s najmanjom položajnom pogreškom ne nalazi na presjecištu međusobno okomitih pravaca.

Ključne riječi: presjek naprijed, procjena točnosti, presjek meridijana u projekciji.

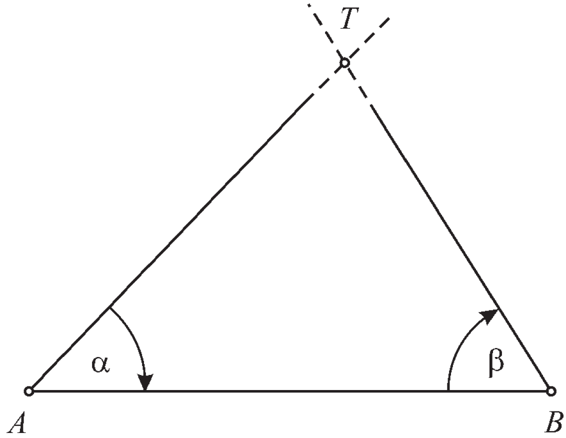
1. Uvod

Bit presijecanja sastoji se u sljedećem: ako pretpostavimo da su zadane dvije točke A i B, i da su izmjereni kutovi α i β koje s dužinom AB zatvaraju pravci prema traženoj točki T, onda se točka T može odrediti presjekom pravaca AT i BT (slika 1).

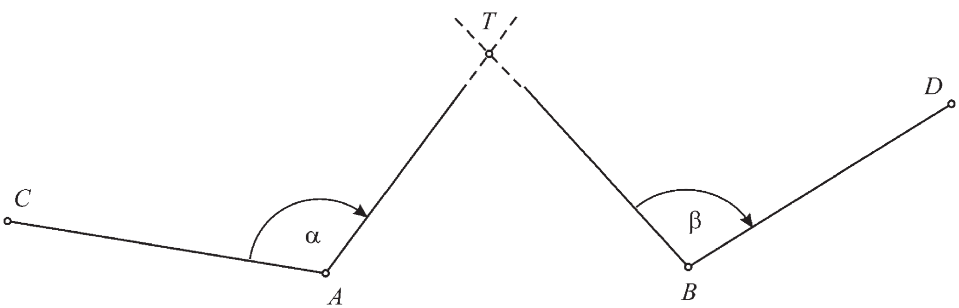
Nadalje, točka T može se odrediti presjekom opažanih pravaca i u slučaju kad se točke A i B međusobno ne dogledaju, ali su izmjereni kutovi α i β koje zatvaraju pravci prema traženoj točki T sa stranicama AC i BD, pretpostavljajući da su A, B, C i D poznate, odnosno već određene točke (slika 2).

Poznato je da je pravac u ravnini određen tek onda ako su određene dvije točke toga pravca ili ako je određena jedna točka i kut koji taj pravac zatvara s nekim drugim već određenim pravcem. Pri presijecanju obično su pravci orijentirani – određeni točkom i kutom što ga zatvara paralela s pozitivnim smjerom koordinatne osi x i pravac.

[1] prof. dr. sc. Miljenko Lapaine, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Kačićeva 26, HR-10000 Zagreb, Croatia, e-mail: mlapaine@geof.hr,
mr. sc. Željka Tutek, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Kačićeva 26, HR-10000 Zagreb, Croatia, e-mail: zeljkat@geof.hr,
dr. sc. Martina Triplat Horvat, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Kačićeva 26, HR-10000 Zagreb, Croatia, e-mail: mthorvat@geof.hr.



Slika 1. *Presjek naprijed.*



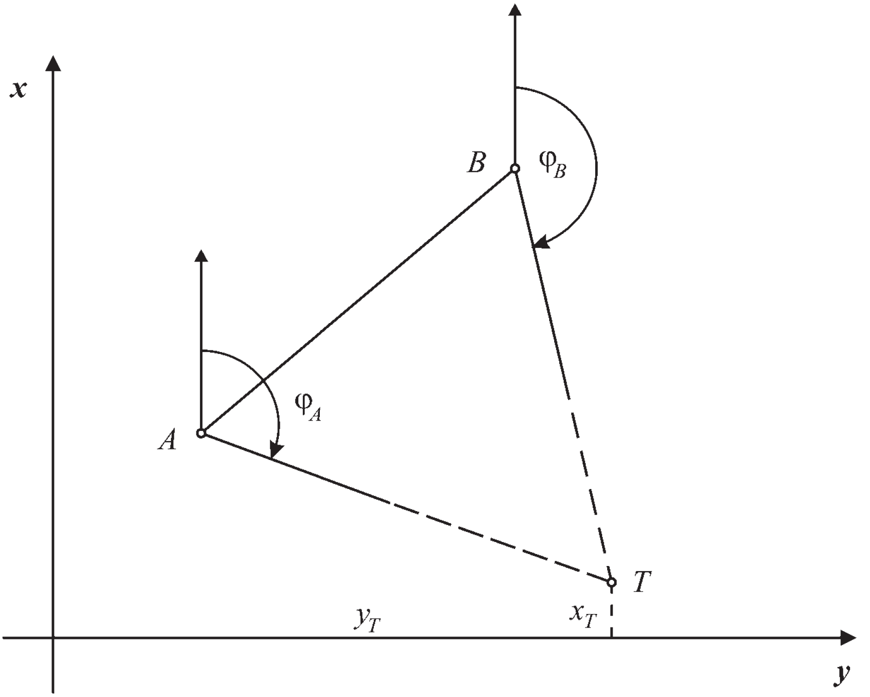
Slika 2. *Presjek naprijed kad se točke A i B međusobno ne dogledaju.*

Formule po kojima se može odrediti položaj presjecišta pravaca mogu se naći u gotovo svakom udžbeniku niže, praktične ili inženjerske geodezije (npr. Kostić i Svečnikov 1932, Macarol 1968, Cvetković 1970, Mihailović 1981, Janković 1981). Manje pozornosti u literaturi posvećeno je procjeni točnosti tako dobivenog presjecišta. Neki od pristupa su pogrešni, a neki završavaju pogrešnim zaključcima. U ovome preglednom radu dat ćemo nekoliko izvoda izraza za točnost presjeka naprijed i komentirati ih, odnosno upotpuniti.

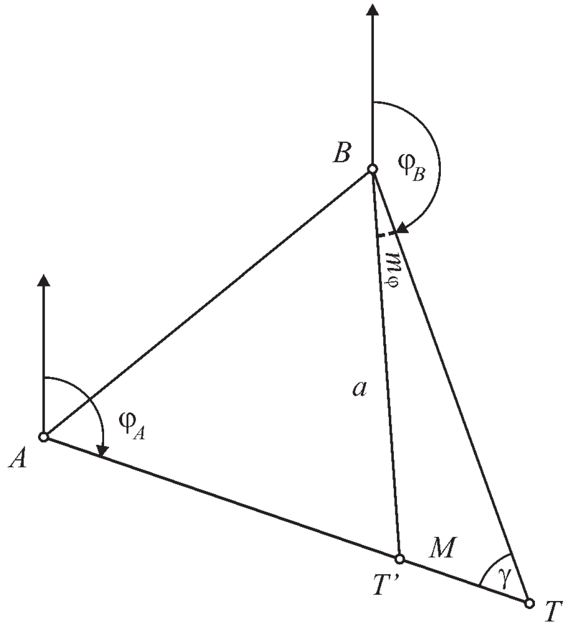
2. Točnost presijecanja (Mihailović, 1981, str. 10–12)

Neka su zadane dvije točke A i B i dva pravca od kojih jedan prolazi točkom A i s paralelom s pozitivnim smjerom koordinatne osi x zatvara kut φ_A, a drugi prolazi točkom B i s paralelom s pozitivnim smjerom koordinatne osi x zatvara kut φ_B. U presjeku tih dvaju pravaca nalazi se točka T (slika 3). Ako je smjer pojedinog pravca određen s točnošću m_φ, položajna pogreška M može se odrediti iz trokuta BTT' (slika 4):

$$M = \frac{a}{\sin\gamma}\sin m_\varphi \approx \frac{a}{\sin\gamma} m_\varphi .$$



Slika 3. *Točka T kao presjek pravaca koji prolaze točkama A i B (prema Mihailoviću, 1981, str. 11).*

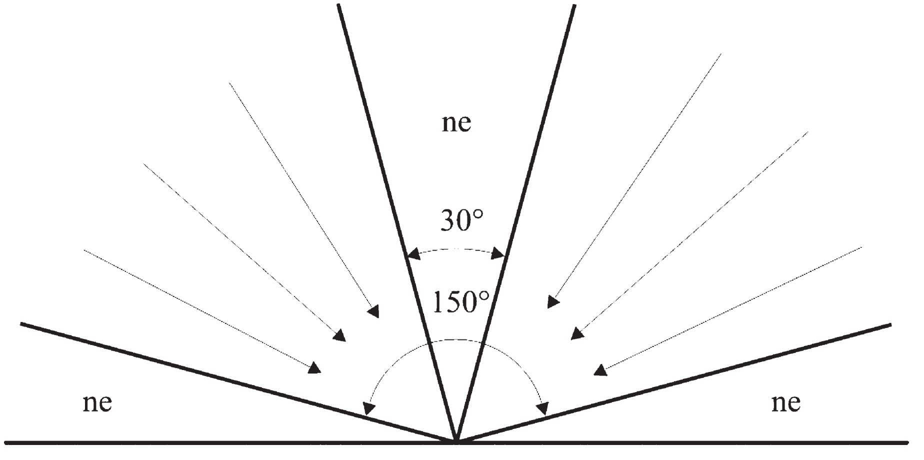


Slika 4. *M je položajna pogreška presijecanja (prema Mihailoviću, 1981, str. 11).*

Mihailović (1981, str. 11) objašnjava da taj izvod nije sasvim korektan jer su smjerovi obaju pravaca podložni pogreškama, ali unatoč tome zaključuje kako ta formula omogućuje definiranje pravila:

- ako je $\gamma = 90°$, onda je $M_{\min} = am_{\varphi}$
- ako je $\gamma = 30°$, onda je $M = 2M_{\min}$
- ako je $\gamma = 0°$, onda je $M = \infty$.

Mihailović to opisuje ovako: točka će biti najbolje određena ako se pravci sijeku pod kutom od 90° jer je onda položajna pogreška najmanja. Kad se pravci sijeku pod kutom od 30° onda je položajna pogreška dva puta veća. To je granična vrijednost položajne pogreške koja se može tolerirati. Dakle, zaključuje Mihailović, dva pravca ne smiju se sjeći pod kutom manjim od 30° ili većim od 150° (slika 5).



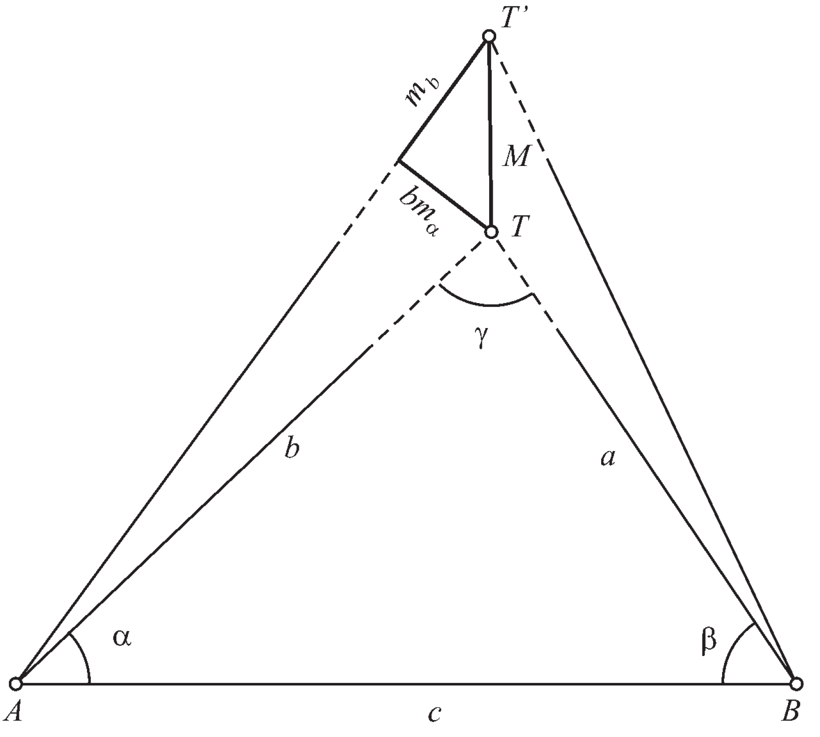
Slika 5. *Dopušteni smjerovi za presijecanje (prema Mihailoviću, 1981, str. 12).*

Začuđuje takav Mihailovićev zaključak za koji i sam autor navodi da proizlazi iz nekorektnog izvoda formule, tim više što se u istom udžbeniku (Mihailović 1981) na str. 268–272 mogu naći dva izvoda koji daju drukčiju formulu za procjenu položajne točnosti presjeka i, naravno, drukčiji zaključak.

3. Točnost presijecanja (Kostić i Svečnikov, 1932, str. 26–30)

Pretpostavimo da su izmjereni kutovi α i β (slika 6) te da je dužina $AB = c$ apsolutno točna po svojem položaju i duljini. Zbog pogrešaka m_{α} i m_{β} kutova α i β, dužina b imat će pogrešku m_b, a zbog pogreške kuta α točka T će odstupati za iznos bm_{α}. Ukupno linearno odstupanje M točke T možemo izraziti kao duljinu hipotenuze pravokutnog trokuta s katetama m_b i bm_{α}, tj.

$$M^2 = m_b^2 + b^2 m_{\alpha}^2 \tag{1}$$



Slika 6. *Odstupanje presjeka pravaca zbog pogrešaka u mjerenim podacima (prema Kostiću i Svečnikovu, 1932).*

Da bismo odredili srednju pogrešku m_b postupit ćemo na sljedeći način. Prema sinusnom poučku odredit ćemo stranicu b iz trokuta ATB uzimajući kut γ kao dopunu kutova α i β do 180°, tj.

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta) .$$

Prema tome moramo kut γ smatrati funkcijom mjerenih kutova α i β. Budući da je

$$b = c \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \tag{2}$$

a u logaritamskom obliku

$$\log b = \log c + \log \sin \beta - \log \sin(\alpha + \beta) \tag{3}$$

ili

$$\log b = \log c + F , \tag{4}$$

gdje je

$$F = F(\alpha, \beta) = \log \sin \beta - \log \sin(\alpha + \beta) , \tag{5}$$

na temelju poznate formule imamo:

$$\frac{m_b^2}{b^2} = \frac{m_c^2}{c^2} + \left(\frac{\partial F}{\partial \alpha}\right)^2 m_\alpha^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial \beta}\right)^2 m_\beta^2 . \tag{6}$$

Po pretpostavci je

$$m_c = 0 ,$$

a parcijalne su derivacije

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = -\cot(\alpha+\beta) ,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \beta} = \cot\beta - \cot(\alpha+\beta) = \frac{\cos\beta}{\sin\beta} - \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} =$$
$$= \frac{\cos\beta\sin(\alpha+\beta) - \sin\beta\cos(\alpha+\beta)}{\sin\beta\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta\sin(\alpha+\beta)} . \tag{7}$$

Uvrstimo li parcijalne derivacije (7) u (6), dobit ćemo

$$\frac{m_b^2}{b^2} = \cot^2(\alpha+\beta) m_\alpha^2 + \left[\frac{\sin\alpha}{\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}\right]^2 m_\beta^2 . \tag{8}$$

Odatle je

$$m_b^2 = b^2 \left\{\cot^2(\alpha+\beta) m_\alpha^2 + \left[\frac{\sin\alpha}{\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}\right]^2 m_\beta^2\right\} =$$
$$= \left[c\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\right]^2 \left\{\cot^2(\alpha+\beta) m_\alpha^2 + \left[\frac{\sin\alpha}{\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}\right]^2 m_\beta^2\right\} =$$
$$= \frac{c^2}{\sin^4(\alpha+\beta)}\left[\sin^2\beta\cos^2(\alpha+\beta) m_\alpha^2 + \sin^2\alpha m_\beta^2\right] . \tag{9}$$

Prema tome

$$M^2 = m_b^2 + b^2 m_\alpha^2 = \frac{c^2}{\sin^4(\alpha+\beta)}\left[\sin^2\beta\cos^2(\alpha+\beta) m_\alpha^2 + \sin^2\alpha m_\beta^2\right] + c^2\frac{\sin^2\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)} m_\alpha^2 =$$
$$= \frac{c^2}{\sin^4(\alpha+\beta)}\left[\sin^2\beta m_\alpha^2 + \sin^2\alpha m_\beta^2\right], \tag{10}$$

odnosno

$$M = c\frac{\sqrt{\sin^2\beta m_\alpha^2 + \sin^2\alpha m_\beta^2}}{\sin^2\gamma} .$$

Ako u izraz (10) stavimo

$$c\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = b , \quad c\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} = a \quad \text{i} \quad \sin(\alpha+\beta) = \sin\gamma$$

imamo konačno

$$M^2 = \frac{b^2}{\sin^2 \gamma} m_\alpha^2 + \frac{a^2}{\sin^2 \gamma} m_\beta^2 . \tag{11}$$

Iz tog se izraza jasno vidi, kažu Kostić i Svečnikov (1932, str. 30):

1) da se pogreška M smanjuje ako se smanjuju duljine stranica, odnosno pravaca b i a, pod pretpostavkom da pogreške m_α i m_β ostaju iste

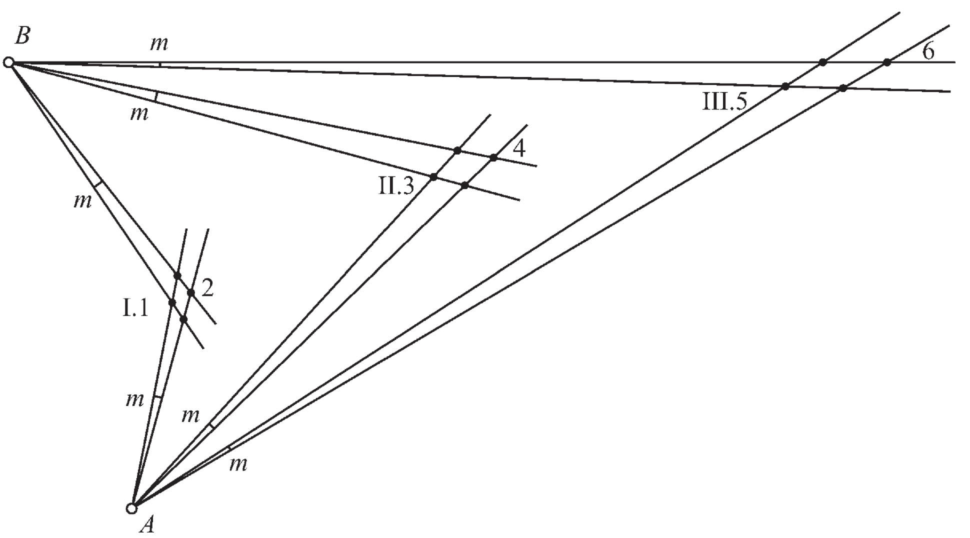
2) pogreška M imat će najmanju vrijednost (ako ovisi o kutu γ) kad sin γ ima najveću, a to će biti kad je $\gamma = 90°$

3) da bi linearna pogreška M u različitim redovima trigonometrijske mreže ostala ista (što se obično i traži) mora se točnost mjerenja kutova povećavati s duljinama stranica, tj. ako su stranice dulje moraju se s većom točnošću mjeriti kutovi, odnosno pravci.

Međutim, to što se Kostiću i Svečnikovu učinilo da se jasno vidi nije sasvim točno i može se krivo interpretirati. Naime, u izrazu za pogrešku M pojavljuju se stranice a i b koje također ovise o kutu γ. Drugim riječima, iako je izvod izraza (11) ispravan, u njemu nije moguće a i b smatrati konstantama pa je zaključak Kostića i Svečnikova da će M imati najmanju vrijednost kad sinγ ima najveću, a to će biti kad je $\gamma = 90°$, netočan.

4. Točnost presijecanja (Čubranić, 1954, str. 118–131)

U poglavlju o uvrštenim mrežama Čubranić (1954) objašnjava metode presijecanja pravaca i slikom ilustrira položajnu pogrešku (slika 7).

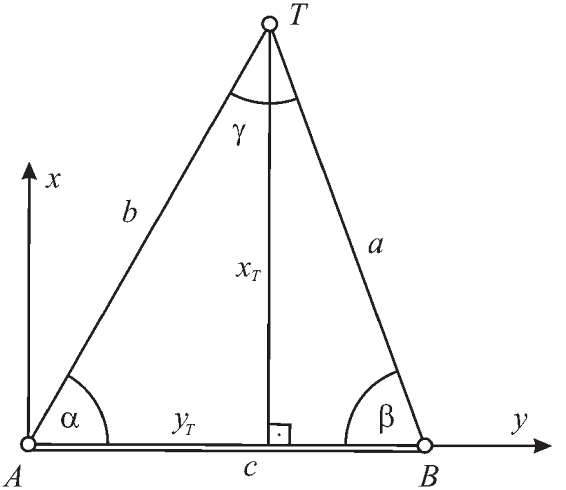


Slika 7. *Položajna pogreška presijecanja (Čubranić, 1954, str. 122).*

S točaka *A* i *B* određuju se točke *I*, *II* i *III* presjekom pravaca. Uz istu pogrešku *m* mjerenih pravaca možemo očekivati pogreške u položaju traženih točaka u veličinama *12*, *34* i *56*. Očito je da je položaj točke *III* kao i točke *I* dosta nesiguran (kod točke *I* na relativno kratku dužinu *IA* i *IB* dobivamo razmjerno veliku pogrešku). Pogreške mjerenja najmanje će se očitovati u položaju točke *II*. Zatim se Čubranić poziva na "Geodeziju" Kostića i Svečnikova, gdje je na str. 28–30 izvedena najpovoljnija veličina kuta presjeka i gdje je dobiveno da je najpovoljniji kut presjeka 90°.

Dakle, Čubranić (1954, str. 122) nekritički preuzima zaključak Kostića i Svečnikova (1932), koji je pogrešan, kao što smo objasnili u prethodnom poglavlju.

5. Točnost presijecanja (Mihailović, 1981, str. 268–272)



Slika 8. *Presjek naprijed (prema Mihailoviću, 1981, str. 268).*

Na slici 8 jasno se vidi da se koordinate točke *T* mogu izračunati po ovim formulama:

$$x_T = \frac{c}{\cot\alpha + \cot\beta}, \quad y_T = x_T \cot\alpha = \frac{c\cot\alpha}{\cot\alpha + \cot\beta}. \tag{12}$$

Pretpostavimo li da su koordinate točaka *A* i *B* bespogrešne, točnost određivanja položaja točke *T* ovisit će o točnosti kutova α i β. Kvadrati srednjih pogrešaka m_x i m_y koordinata točke *T* bit će:

$$m_x^2 = \left(\frac{\partial x_T}{\partial \alpha}\right)^2 m_\alpha^2 + \left(\frac{\partial x_T}{\partial \beta}\right)^2 m_\beta^2, \quad m_y^2 = \left(\frac{\partial y_T}{\partial \alpha}\right)^2 m_\alpha^2 + \left(\frac{\partial y_T}{\partial \beta}\right)^2 m_\beta^2, \tag{13}$$

gdje su

$$\frac{\partial x_T}{\partial \alpha} = \frac{c}{(\cot\alpha + \cot\beta)^2} \frac{1}{\sin^2\alpha} = c\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\gamma}$$

$$\frac{\partial x_T}{\partial \beta} = \frac{c}{(\cot\alpha + \cot\beta)^2} \frac{1}{\sin^2 \beta} = c \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \gamma}$$

$$\frac{\partial y_T}{\partial \alpha} = \frac{-c\cot\beta}{(\cot\alpha + \cot\beta)^2} \frac{1}{\sin^2 \alpha} = -c \frac{\sin\beta\cos\beta}{\sin^2 \gamma}$$

$$\frac{\partial y_T}{\partial \beta} = \frac{c\cot\alpha}{(\cot\alpha + \cot\beta)^2} \frac{1}{\sin^2 \beta} = c \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2 \gamma}, \tag{14}$$

jer je

$$\cot\alpha + \cot\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha\sin\beta},$$

a označili smo

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta) .$$

Primjećujemo da je Mihailović (1981, str. 269) ispustio predznak – u trećoj formuli u (14), međutim to ne utječe na daljnji izvod jer se pri kvadriranju utjecaj tog predznaka izgubi. Uvrstimo li (14) u (13), dobit ćemo

$$m_x^2 = c^2 \frac{\sin^4 \beta m_\alpha^2 + \sin^4 \alpha m_\beta^2}{\sin^4 \gamma},$$

$$m_y^2 = c^2 \frac{\sin^2 \beta \cos^2 \beta m_\alpha^2 + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha m_\beta^2}{\sin^4 \gamma}, \tag{15}$$

i odatle

$$M^2 = m_x^2 + m_y^2 = c^2 \frac{\sin^2 \beta m_\alpha^2 + \sin^2 \alpha m_\beta^2}{\sin^4 \gamma}, \tag{16}$$

odnosno

$$M = c \frac{\sqrt{\sin^2 \beta m_\alpha^2 + \sin^2 \alpha m_\beta^2}}{\sin^2 \gamma} . \tag{17}$$

Do iste su formule došli Kostić i Svečnikov (1932) na drugi način (vidi poglavlje 3 u ovome radu). Pretpostavimo li nadalje da je

$$m_\alpha = m_\beta \tag{18}$$

dobit ćemo

$$M = c \frac{\sqrt{\sin^2 \beta + \sin^2 \alpha}}{\sin^2 \gamma} m_\alpha . \tag{19}$$

Nadalje, ako je

$$\alpha = \beta \tag{20}$$

onda je

$$\alpha = \beta = 90° - \frac{\gamma}{2}$$

pa se izraz (19) može napisati u obliku

$$M = c\sqrt{2}\frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin^2\gamma}m_\alpha . \tag{21}$$

Da bismo odredili kut γ za koji je vrijednost funkcije $M = M(\gamma), \gamma \in (0°,180°)$ najmanja, odredimo derivaciju funkcije M i izjednačimo je s nulom:

$$\frac{dM}{d\gamma} = 0 .$$

Posljednji izraz ekvivalentan je jednadžbi

$$\sin\frac{\gamma}{2}\sin\gamma + 4\cos\frac{\gamma}{2}\cos\gamma = 0 \tag{22}$$

čije rješenje za kut $\gamma \in (0°,180°)$ glasi

$$\tan\frac{\gamma}{2} = \sqrt{2} , \tag{23}$$

tj.

$$\gamma = 109°28' ,\ \alpha = \beta = 35°16' .$$

Mihailović (1981) na temelju prikazanoga izvoda zaključuje da će srednja pogreška M biti najmanja, odnosno točnost određivanja točaka najveća kad se pravci sijeku pod kutom $\gamma = 109°28'$. Zanimljivo je da se, doduše bez izvoda i dokaza, može naći vrijednost kuta $\gamma \approx 109°$ u priručniku i udžbeniku Hartnera, Wastlera i Doležala izdanom prije više od sto godina (Hartner i dr. 1910). U kratkom objašnjenju uz tu vrijednost kuta γ stoji da je taj rezultat dobiven primjenom stroge teorije.

U prethodnom izvodu mogu se uočiti dva nedostatka. Prvo se postavlja pitanje zbog čega je dovoljno tražiti minimum funkcije M za $\alpha = \beta$. Funkcija $M = M(\alpha,\beta)$ je simetrična, no to nije dovoljan razlog da bi se njezine ekstremne vrijednosti postigle za $\alpha = \beta$. Drugo je pitanje dovoljnosti uvjeta postavljenog na prvu derivaciju, odnosno na temelju čega se samo iz prve derivacije funkcije može zaključiti da je riječ o minimumu, a ne možda o maksimumu.

U nastavku ćemo odgovoriti na oba postavljena pitanja. Najprije uočimo da je riječ o funkciji (19) koju zapisujemo ovako kako bismo naglasili da je riječ o funkciji dviju varijabli:

$$M = M(\alpha,\beta) = c\frac{\sqrt{\sin^2\beta + \sin^2\alpha}}{\sin^2(\alpha+\beta)}m_\alpha . \tag{24}$$

Uočimo da ta funkcija nije definirana za $\sin(\alpha+\beta)=0$. Da bismo malo pojednostavnili računanje uočimo najprije da umjesto istraživanja ekstrema funkcije M možemo istraživati ekstreme funkcije M^2. Naime, budući da je

$$\frac{\partial M^2}{\partial \alpha}=2M\frac{\partial M}{\partial \alpha}$$

to će biti $\frac{\partial M^2}{\partial \alpha}=0 \Leftrightarrow \frac{\partial M}{\partial \alpha}=0$ jer $M=0$ ne dolazi u obzir. Analogno zaključivanje vrijedi za parcijalnu derivaciju po β. Dakle, imamo redom

$$M^2=M^2(\alpha,\beta)=c^2\frac{\sin^2\beta+\sin^2\alpha}{\sin^4(\alpha+\beta)}m_\alpha^2 \tag{25}$$

$$\frac{\partial M^2}{\partial \alpha}=\frac{c^2m_\alpha^2}{\sin^5(\alpha+\beta)}\left[\sin 2\alpha\sin(\alpha+\beta)-4(\sin^2\alpha+\sin^2\beta)\cos(\alpha+\beta)\right]=0 \tag{26}$$

$$\frac{\partial M^2}{\partial \beta}=\frac{c^2m_\alpha^2}{\sin^5(\alpha+\beta)}\left[\sin 2\beta\sin(\alpha+\beta)-4(\sin^2\alpha+\sin^2\beta)\cos(\alpha+\beta)\right]=0\,. \tag{27}$$

Oduzmemo li (27) od (26), dobit ćemo jednadžbu

$$\frac{c^2m_\alpha^2}{\sin^4(\alpha+\beta)}(\sin 2\alpha-\sin 2\beta)=0$$

i dalje

$$\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=0\,. \tag{28}$$

Razlikujemo dva slučaja:

a) $\cos(\alpha+\beta)=0$

Tada je $\sin(\alpha+\beta)=1$ ili $\sin(\alpha+\beta)=-1$ pa iz (26) ili (27) slijedi da mora biti $\sin 2\alpha=0$ i $\sin 2\beta=0$, što pri presijecanju naprijed nema smisla.

b) $\sin(\alpha-\beta)=0$

Tada je $\alpha=\beta$ ili se ta dva kuta razlikuju za višekratnik ispruženoga kuta. Ta druga teorijska mogućnost nema smisla pri presijecanju naprijed. Prema tome stacionarna točka funkcije M^2 ima svojstvo

$$\alpha=\beta\,. \tag{29}$$

Uzevši u obzir (29), obje jednadžbe (26) i (27) su međusobno jednake i nakon manjeg sređivanja slijedi da je

$$\sin^2\alpha(3\sin^2\alpha-1)=0\,. \tag{30}$$

Rješenje $\alpha=0°$ ili višekratnik ispruženoga kuta pri presijecanju naprijed nema smisla. Preostaje rješenje

$$\sin\alpha=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\,. \tag{31}$$

Za kut $\alpha \in (0°,180°)$ je $\sin\alpha > 0$ pa nalazimo za sva tri kuta u trokutu:

$$\sin\alpha = \sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{3}\ ,\ \sin\gamma = \sin(\alpha+\beta) = \sin 2\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3} \tag{32}$$

$$\alpha = \beta = 35°16'\ ,\ \gamma = 109°28'\ . \tag{33}$$

Dobiveni je rezultat u skladu s onim iz izraza (23). U stacionarnoj točki je

$$M^2 = \frac{27}{32} c^2 m_\alpha^2\ , \tag{34}$$

odnosno

$$M = \frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} c m_\alpha\ . \tag{35}$$

Ostaje još pitanje na koje treba odgovoriti: ima li u izračunanoj stacionarnoj točki funkcija M zaista minimum? Budući da je riječ o funkciji dviju varijabli $M^2 = M^2(\alpha,\beta)$, potrebno je odrediti druge parcijalne derivacije i njihove vrijednosti u stacionarnoj točki. Deriviranjem i sređivanjem može se dobiti:

$$\frac{\partial^2 M^2}{\partial\alpha^2} = \frac{2}{\sin^4(\alpha+\beta)}\left\{c^2 m_\alpha^2 \cos 2\alpha - 2M^2 \sin^2(\alpha+\beta)\left[3 - 4\sin^2(\alpha+\beta)\right]\right\} \tag{36}$$

$$\frac{\partial^2 M^2}{\partial\beta^2} = \frac{2}{\sin^4(\alpha+\beta)}\left\{c^2 m_\alpha^2 \cos 2\beta - 2M^2 \sin^2(\alpha+\beta)\left[3 - 4\sin^2(\alpha+\beta)\right]\right\} \tag{37}$$

$$\frac{\partial^2 M^2}{\partial\alpha\partial\beta} = \frac{\partial^2 M^2}{\partial\beta\partial\alpha} = -\frac{4M^2}{\sin^2(\alpha+\beta)}\left[3 - 4\sin^2(\alpha+\beta)\right]. \tag{38}$$

Ako u (36), (37) i (38) uvrstimo vrijednosti koje odgovaraju stacionarnoj točki (32) ili (33) i (34), dobit ćemo

$$\frac{\partial^2 M^2}{\partial\alpha^2} = \frac{\partial^2 M^2}{\partial\beta^2} = \frac{189}{64} c^2 m_\alpha^2$$

$$\frac{\partial^2 M^2}{\partial\alpha\partial\beta} = \frac{\partial^2 M^2}{\partial\beta\partial\alpha} = \frac{135}{64} c^2 m_\alpha^2\ .$$

Budući da je $\frac{\partial^2 M^2}{\partial\alpha^2} > 0$ i $\frac{\partial^2 M^2}{\partial\alpha^2}\frac{\partial^2 M^2}{\partial\beta^2} - \frac{\partial^2 M^2}{\partial\alpha\partial\beta}\frac{\partial^2 M^2}{\partial\beta\partial\alpha} > 0$, možemo zaključiti da je u stacionarnoj točki zaista minimum funkcije M, tj. možemo napisati

$$M_{\min} = \frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} c m_\alpha \approx 0{,}91856 c m_\alpha\ . \tag{39}$$

Za $\alpha = \beta = 45°$, $\gamma = 90°$

$$M = c m_\alpha > M_{\min}\ . \tag{40}$$

6. Točnost presijecanja (Čebotarev i dr., 1962, str. 313–315)

Kad se mjere kutovi u dvije čvrste točke, tada imamo dvije jednadžbe pogrešaka (Čebotarev i dr. 1962):

$$a_1 dx + b_1 dy + l_1 = v_1$$

$$a_2 dx + b_2 dy + l_2 = v_2 \,, \tag{41}$$

gdje su

$$a_1 = -\frac{\sin \nu_A^T}{b} \,,\; b_1 = \frac{\cos \nu_A^T}{b} \,,\; a_2 = -\frac{\sin \nu_B^T}{a} \,,\; b_2 = \frac{\cos \nu_B^T}{a} \,, \tag{42}$$

ν_A^T, ν_B^T ... odgovarajući smjerni kutovi

a, b ... stranice trokuta ABT.

Sastavimo sustav normalnih jednadžbi

$$[aa]dx + [ab]dy + [al] = 0$$

$$[ab]dx + [bb]dy + [bl] = 0 \,.$$

Pri tome je

$$[aa] = a_1^2 + a_2^2 \,,\; [ab] = a_1 b_1 + a_2 b_2 \,,\; [bb] = b_1^2 + b_2^2 \,.$$

Težine nepoznanica određuju se po formulama

$$P_y = \frac{D}{[aa]} \,,\; P_x = \frac{D}{[bb]} \,,\; D = [aa][bb] - [ab]^2 = \left(a_1 b_2 - a_2 b_1\right)^2 \,. \tag{43}$$

Uvrstimo li odgovarajuće vrijednosti (42) u (43), možemo dobiti

$$[aa] = \frac{\sin^2 \nu_A^T}{b^2} + \frac{\sin^2 \nu_B^T}{a^2} \,,\; [bb] = \frac{\cos^2 \nu_A^T}{b^2} + \frac{\cos^2 \nu_B^T}{a^2} \,. \tag{44}$$

Čebotarev i dr. (1962) imaju pogrešnu formulu za $[aa]$, no to je pogreška koja se lako može uočiti i popraviti, kao što smo to učinili u (44). Nadalje,

$$D = \frac{\sin^2\left(\nu_A^T - \nu_B^T\right)}{a^2 b^2} \,, \tag{45}$$

no budući da je

$$\nu_A^T - \nu_B^T = \gamma \,,$$

to je

$$D = \frac{\sin^2 \gamma}{a^2 b^2} \,. \tag{46}$$

Prema tome imamo

$$\frac{1}{P_x}=\frac{a^2\cos^2\nu_B^T+b^2\cos^2\nu_B^T}{\sin^2\gamma},\ \frac{1}{P_y}=\frac{a^2\sin^2\nu_B^T+b^2\sin^2\nu_B^T}{\sin^2\gamma}. \tag{47}$$

Ako je m_α srednja kvadratna pogreška mjerenja kuta, tada je

$$m_x=\sqrt{\frac{1}{P_x}}m_\alpha,\ m_y=\sqrt{\frac{1}{P_y}}m_\alpha$$

i prema tome

$$M^2=m_x^2+m_y^2=\left(\frac{1}{P_x}+\frac{1}{P_y}\right)m_\alpha^2, \tag{48}$$

gdje je M srednja kvadratna pogreška položaja točke T koja se određuje. Uvrstivši u (48) vrijednosti recipročnih težina koordinata, nakon nekoliko transformacija možemo dobiti

$$M=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sin\gamma}m_\alpha=c\frac{\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}}{\sin^2\gamma}m_\alpha, \tag{49}$$

što je poznata formula iz prethodnih poglavlja. Iz te formule slijedi da je uz zadanu točnost mjerenja kutova točka presjeka to točnija što je kut presjeka bliži 90°, zaključuju Čebotarev i dr. (1962). Međutim, dodaju isti autori, uz konstantnu vrijednost kuta γ kutovi α i β mogu se mijenjati u većim granicama. Istražimo sljedeći izraz

$$y=\sin^2\alpha+\sin^2\beta.$$

Budući da je

$$\beta=180°-\alpha-\gamma$$

$$y=\sin^2\alpha+\sin^2(\alpha+\gamma).$$

Imamo

$$\frac{dy}{d\alpha}=2\sin\alpha\cos\alpha+2\sin(\alpha+\gamma)\cos(\alpha+\gamma)=0$$

i

$$\sin 2\alpha+\sin 2(\alpha+\gamma)=0,$$

odnosno

$$\sin 2\alpha-\sin 2\beta=0$$

i odatle

$$\alpha=\beta.$$

Prema tome, uz zadanu vrijednost veličine kuta γ najpovoljniji presjek bit će onda kad je tražena točka jednako udaljena od zadanih točaka.

U poglavlju o točnosti računanja elemenata trokuta Čebotarev i dr. (1962, str. 576–577) zaključuju da formula (49) u posebnom slučaju kad je $\alpha = \beta$ poprima oblik

$$M = c\sqrt{2}\frac{\sin\alpha}{\sin^2 2\alpha}m_\alpha \tag{50}$$

te se uz takvu pretpostavku postavlja pitanje: za koju vrijednost kuta α će veličina M biti najmanja? Riječ je o minimumu funkcije

$$y = \frac{\sin\alpha}{\sin^2 2\alpha}. \tag{51}$$

Imamo

$$\frac{dy}{d\alpha} = \frac{\cos\alpha\sin^2 2\alpha - 4\sin 2\alpha\cos 2\alpha\sin\alpha}{\sin^4 2\alpha} = 0. \tag{52}$$

Budući da kut α ne može poprimiti vrijednosti 0° ili 90°, to se pitanje rješava jednadžbom

$$\cos\alpha\sin 2\alpha - 4\cos 2\alpha\sin\alpha = 0. \tag{53}$$

Nakon manjih transformacija jednadžba (53) prelazi u

$$2 - 3\cos^2\alpha = 0 \tag{54}$$

i odatle

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}},$$

čemu odgovara $\alpha = 35°16'$. Odatle slijedi $\gamma = 109°28'$. To su vrijednosti poznate iz poglavlja 5 u ovome radu. Dakle, kad je kut presjeka 109°28', srednja pogreška položaja tražene točke je najmanja.

Međutim, u poglavlju o presjecima Čebotarev i dr. (1962, str. 606–607) ponovno se vraćaju na jednostavan presjek naprijed i formulu (vidi izraz (49) u ovome radu):

$$M = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sin\gamma}m_\alpha. \tag{55}$$

Stavimo li u formulu (55) $a = b = s$, imat ćemo za jednakokračni trokut

$$M = \sqrt{2}\frac{s}{\sin\gamma}m_\alpha. \tag{56}$$

Iz te formule slijedi da je relativna pogreška položaja točke najmanja

$$\frac{M}{s} = \min$$

onda kad je $\gamma = 90°$, a to znači za $\alpha = \beta = 45°$. Prema tome, presjek pod pravim kutom je najpogodniji u smislu relativne točnosti rezultata, zaključuju Čebotarev i dr. (1962). To pak znači da je za kutove α između 45° i 35°16' presjek naprijed općenito najpovoljniji. Povećavanjem ili smanjivanjem kuta γ u odnosu na pravi kut smanjuje se nazivnik u formuli (56). U skladu s tim M se povećava, najprije polako, a zatim sve više i više.

Međutim, navedeni zaključak Čebotareva i dr. nije ispravan jer se temelji na formuli (56) u kojoj veličina s nije ni konstantna ni bespogrešna, već je funkcija mjerenih kutova α i β.

7. Primjer

Pri istraživanju kartografske projekcije u kojoj je izrađena *Nuova carta geografica dello Stato Ecclesiastico* Ch. Mairea i J. R. Boškovića, objavljena uz njihovu monografiju (Maire i Boscovich 1755), trebalo je odrediti točku u kojoj se sijeku meridijani nacrtani na karti. Uzmimo najzapadniji meridijan nacrtan na karti i njemu simetričan u odnosnu na srednji meridijan. Dvije najjužnije točke na tim meridijanima neka određuju osnovicu c čija duljina iznosi 600 mm. Kutovi između tih meridijana i osnovice iznose približno α = β = 89°05'. Pretpostavimo li da je $m_\alpha = m_\beta = 4'$, srednja pogreška položaja presjecišta tih dvaju meridijana bit će $M = 964{,}5\,\mathrm{mm}$.

Uzmemo li dva meridijana nacrtana na karti koji su najbliži srednjem meridijanu, dvije najjužnije točke na tim meridijanima definirat će c čija duljina iznosi 150 mm. Kutovi između tih meridijana i osnovice iznose α = β = 89°46'. Pretpostavimo li ponovno da je $m_\alpha = m_\beta = 4'$, srednja pogreška položaja presjecišta tih dvaju meridijana bit će $M = 3721\,\mathrm{mm}$.

8. Zaključak

U ovome radu istraženo je nekoliko pristupa procjeni položajne točnosti određivanja točke metodom presijecanja naprijed. Uočeno je da se u literaturi mogu naći odgovarajuće formule, no njihovi izvodi su katkad pogrešni, a ako su izvodi korektni, tada izvedeni zaključci katkad nisu takvi. Nadalje, mogu se naći izvodi koji su korektni, ali nepotpuni. U ovome je radu ukazano na uočene propuste u literaturi i upotpunjen je jedan od nepotpunih izvoda. Za razliku od uobičajenih, ali ne provjerenih mišljenja, dolazi se do zaključka da se optimalan položaj točke određene presijecanjem naprijed ne nalazi na presjecištu međusobno okomitih pravaca.

U svim prethodno opisanim izvodima pretpostavlja se da je duljina zadane stranice po položaju i duljini bespogrešna. Međutim, to ne mora uvijek biti tako pa bi u tom smislu trebalo razmotriti odgovarajuću literaturu (npr. Cvetković 1970, Janković 1981 i dr.). Također, bilo bi zanimljivo istražiti:

- raspodjelu točnosti položaja točke određene presijecanjem naprijed

- odgovarajuće relacije za procjenu točnosti položaja točke određene presijecanjem naprijed koje je određeno pravcima koji nisu zadani jednom točkom i kutom, nego dvjema točkama
- vezu između procjene točnosti položaja točke određene presijecanjem naprijed i određene lučnim presjekom.

ZAHVALA. Autori zahvaljuju prof. dr. sc. Miljenku Solariću, prof. dr. sc. Zdravku Kapoviću, prof. dr. sc. Gorani Novaković, prof. dr. sc. Đuri Barkoviću i doc. dr. sc. Mladenu Zrinjskome s Geodetskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu te Branku Meštriću, voditelju knjižnice Hrvatskoga šumarskog društva, na vrijednim diskusijama i pomoći oko literature.

Literatura

Cvetković, Č. (1970): Primena geodezije u inženjerstvu, Građevinska knjiga, Beograd.

Čebotarev, A. S., Selihanovič, V. G., Sokolov, M. N. (1962): Geodezija, čast vtoraja, Izdateljstvo geodezičeskoj literatury, Moskva.

Čubranić, N. (1954): Viša geodezija, I. dio, Školska knjiga, Zagreb, str. 118–131.

Hartner, F., Wastler, J., Doležal, E. (1910): Hand– und Lehrbuch der Niederen Geodäsie, I. Band, 1. Hälfte, Zehnte Auflage, Verlag W. Seidel & Sohn, Wien.

Janković, M. (1981): Inženjerska geodezija II, 2., dopunjeno izdanje, Sveučilišna naklada Liber, Zagreb.

Kostić, A. L., Svečnikov, N. S. (1932): Geodezija, Trigonometrijska, poligona i linijska mreža, Beograd, str. 26–30.

Macarol, S. (1968): Praktična geodezija, 2. izdanje, Tehnička knjiga, Zagreb.

Maire, Ch., Boscovich, R. J. (1755): De litteraria expeditione per pontificiam ditionem ad dimetiendos duos meridiani gradus et corrigendam mappam geographicam, Typographio Palladis, Romae.

Mihailović, K. (1981): Geodezija II, I deo, Građevinska knjiga, Beograd, str. 10–12, 268–272.

Accuracy of Forward Intersection

ABSTRACT. An overview is given of determining position of a point determined by forward intersection on the condition that two given points in which angles are measure toward an unknown point are known and error-free. Accuracy estimation of forward intersection can be found in references, but derivations of corresponding formulas are sometimes erroneous. In some cases, derivations are correct, but conclusions are not. Furthermore, there are some correct but incomplete derived formulas. This paper emphasizes observed shortcomings and completes one of the incomplete derivations. The conclusion is that the optimal position of a point determined by forward intersection is not at an intersection of perpendicular straight lines.

Keywords: *forward intersection, accuracy estimation, intersection of the meridians in the projection.*

Primljeno: 2014-04-17

Prihvaćeno: 2014-08-25