UDK 514.112.6
Izvorni znanstveni članak Prihvaćeno za tisak: 27.3.2001.

BEWEGUNGEN MIT EBENEM BAHNEN IM EINFACH ISOTROPEN RAUM - TEIL I

Helmut Wresnik (Graz)

O. Bewegungen im euklidischen Raum mit speziellen Bahnkurven beschäftigen die Geometer schon seit langer Zeit. So konnte G. DARBOUX in [5] alle Zwangläufe klassifizieren, bei denen alle Punkte des Raumes in ebenen Bahnen geführt werden (siehe auch [2]). Röschel gab in [12], [13] jene Zwangläufe an, die eine zweidimensionle Punktmenge des euklidischen Raumes in ebenen Bahnen führen.

Die Frage nach allen Bewegungen des euklidischen Dreiraumes, bei denen alle Punkte auf Kugel laufen, wurde von E. BOREL [1] und R. BRICARD [3], [4] untersucht, aber bis heute nicht ausreichend beantwortet. In diesem Zusammenhang entwickelte H. VOGLER vor kurzem ein Konezpt, das die Untersuchung solcher Fragestellungen für beliebige Bahnflächen in jedem Cayley-Klein Raum (zumindest theoretisch) möglich macht.

Zu diesem Zweck werden sowohl für die Menge der Flaggen, darunter verstehen wir eine in Rede stehende Bahnfläche sowie einen auf ihr liegenden Punkt, Punktmodelle in projektiven Räumen geeigneter Dimension konstruiert und dann ein inneres Produkt definiert, dessen Verschwinden für Bewegungen und Flaggen geometrische Bedeutung besitzt.

Erstmals mit Erfolg angewendet wurde dieses Konzept von J. LANG in [9], [10], [11] zur Bestimmung der Borel-Bricard-Bewegungen im zweifach-isotropen Raum, sowie von A. GFRERRER und J. LANG in [6], [7], wo Untersuchungen über spezielle äquiforme Zwangläufe mit sphärischen Bahnen durchgeführt wurden.

Ziel dieser Arbeit ist es, mit Hilfe des VOGLERschen Verfahrens die Bewegungsvorgänge des einfach-isotropen Raumes I_3^1 zu bestimmen, bei denen Punkte in ebenen Bahnen geführt werden. Dabei wollen wir besonderes Augenmerk auf jene Bewegungsvorgänge legen, bei denen alle Punkte des I_3^1 ebene Bahnen durchlaufen. Diese Fragestellung wurde bereits von J. TÖLKE in [15] behandelt, doch, wie im zweiten Teil [16] gezeigt werden wird, nicht vollständing beantwortet.

Es sei noch angemerkt, daß die folgenden Überlegungen im Gegensatz zu anderen Methoden keinerlei Differenzierbarkeitsvoraussetzungen erfordern.

1. Gegeben sei der 3-dimensionale reelle projektive Raum P^3, den wir durch Auszeichnung einer Fernebene $\omega : x^0 = 0$ zu einem affinen Raum A_3 machen. Durch den in ω definierten Maßkegelschnitt

$$x^0\, x_1^2 + x_2^2 = 0. \tag{1}$$

wird daraus ein Cayley-Klein-Raum (siehe dazu [8]), der einfach-isotrope Raum I_3^1 (eine ausführliche Darstellung der Geometrie des einfach-isotropen Raumen findet man in [14]).

Sind $P : {}^t(x_1, y_1, z_1)$ und $Q : {}^t(x_2, y_2, z_2)$ zwei Punkte des I_3^1, dann wird ihr isotroper Abstand durch

$$\overline{PQ} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

definiert. Er verschwindet genau für Punkte auf einer isotropen Geraden, für also $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$ gilt. Für solche kann mittels

$$\overline{PQ} : x_3 - y_3$$

ein Ersatzabstand definiert werden.

Sucht man in der bezüglich des Maßkegelschnittes automorphen Untergruppe der affinen Gruppe jene Transformationen, die den isotropen Abstand und den Ersatzabstand invariant lassen, so findet man die 6-dimensionale isotrope Bewegungsgruppe

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ b & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ c & d & e & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Hängen in (2) die Großen a, b, c, d, e und φ von $0 < k \leq 6$ Parametern ab, so wird dadurch ein k-dimensionaler Bewegungsvorgang B_k ausgezeichnet. Wie üblich denken wir uns dabei den I_3^1 in zwei Exemplaren, den Gang- und Rastraum, ausgeführt.

Wird nun ein Punkt $P : {}^t(1 : x : y : z)$ des Gangraumes bei B_k in einer Ebene

$$\varepsilon : u_o + u_1 x + u_2 y + u_3 z = 0$$

des Rastraumes geführt, so muß

$$u_o + u_1 (a + x\cos\varphi - y\sin\varphi) + u_2 (b + x\sin\varphi + y\cos\varphi) + u_3 (c + dx + ey + z) = 0$$

gelten bzw. wenn man nach den Bewegungsparametern sortiert:

$$au_1 + bu_2 + cu_3 + d(u_3x) + e(u_3y) + \cos\varphi\,(u_1x + u_2y) + \sin\varphi(u_2x - u_1y) + (u_0 + u_3z) = 0. \tag{3}$$

Setzen wir voraus, daß B_k die Identität enthält, dann gilt

$$u_o + u_1 x + u_2 y + u_3 z = 0,$$

sodaß sich für den letzten Sumanden in (3) $u_o + u_3z = -(u_1x + u_2y)$ ergibt und (3) daher wie folgt geschrieben werden kann:

$au_1 + bu_2 + cu_3 + d(u_3x) + e(u_3y) + \cos\varphi\,(u_1x + u_2y) + \sin\varphi(u_2x - u_1y) - (u_1x + u_2y) = 0.$ (4)

Wir konstruieren nun mit Hilfe von (4) Punktmodelle für die isotropen Bewegungen (2) und die Flaggen (P; ε), also die Paare inzidenter Punkte P und Ebenen ε des einfach-isotropen Raumes.

Dazu betracht wir einen 7-dimensionalen projektiven Raum B_7 und ordnen der Bewegung (2) den Punkt

$$^t(X^1 : X^2 : X^3 : X^4 : X^5 : X^6 : X^7 : X^8) = {}^t(a : b : c : d : e : \cos\varphi : \sin\varphi : 1) \qquad (5)$$

des B^7 zu. Die Bewegungsgruppe (2) des einfach isotropen Raumes wird dadurch auf den in B^7 liegenden Hyperzylinder

$$\zeta : (X^6)^2 + (X^7)^2 - (X^8)^2 = 0$$

abgebildet. Er besitzt 5-dimensionale Erzeugenden.

Um auch für die Flaggen ein Punktmodell zu erhalten, betrachten wir einen 7-dimensionalen projektiven Raum F^7 und ordnen der Flagge (P; ε) = $(x, y, z; u_0 : u_1 : u_2 : u_3)$ den Punkt

$$^t(Y^1 : Y^2 : Y^3 : Y^4 : Y^5 : Y^6 : Y^7 : Y^8) =$$

$$^t(u_1 : u_2 : u_3 : u_3x : u_3y : u_1x + u_2y : u_2x - u_1y : -(u_1x + u_2y)) \qquad (6)$$

zu. Die Punkte liegen auf der 4-parametrigen Mannigfaltigkeit

$$\Phi : \begin{cases} H^6 : Y^6 + Y^8 = 0 \\ \Phi_1 : Y^1Y^4 + Y^2Y^5 - Y^3Y^6 = 0 \\ \Phi_2 : Y^1Y^5 - Y^2Y^4 + Y^3Y^7 = 0 \end{cases}$$

Sie ist als Schnitt der beiden Hyperflächen ϕ_1 und ϕ_2 mit der Hyperbene H_6 keine Hyperfläche in H_6.

Bemerkung 1. Die z-Koordinate des Punktes P einer Flagge und die u_o-Koordinate der Flaggenebene ε spielen in den obigen Überlegungen keine Rolle.

Bemerkung 2. Durch die Parametertransformation $Y^i = \overline{Y^i}$, $\overline{Y^8} = Y^8 - Y^6$, $i = 1, \ldots, 7$ kann die Hyperbene H_6 in die Koordinatenebene $\overline{Y^8} = 0$ gebracht werden, sodaß wir uns bei Untersuchungen von Φ auf die Hyperbene H_6, also auf die ersten sieben Koordinaten beschränken können.

Bemerkung 3. Nicht jeder Punkt der Fläche Φ stellt eine Flagge des I_3^1 dar. Es gelten dafür die folgenden Bedingungen:

a) Es muß $(Y^1)^2 + (Y^2)^2 + (Y^3)^2 \neq 0$ sein.

b) Ist $(Y^1)^2 + (Y^2)^2 = 0$, dann muß $(Y^6)^2 + (Y^7)^2 = 0$ gelten.
c) Ist $Y^3 = 0$, dann muß $(Y^4)^2 + (Y^5)^2 = 0$ gelten.

Bemerkung 4. Stellt ein Punkt von Φ eine Flagge des I_3^1 dar, so erhält man aus seinen Koordinaten die Koordinaten der Flagge wie folgt:

a) Ist $Y3 \neq 0$, so gilt zunächst

$$x = \frac{Y^4}{Y^3}, y = \frac{Y^5}{Y^3}, u_1 = Y^1, u_2 = Y^2, u_3 = Y^3$$

z kann nun beliebig gewählt werden und daraus ergibt sich dann

$$u_o = -(Y^1 \frac{Y^4}{Y^3} + Y^2 \frac{Y^5}{Y^3} + zY^3).$$

b) Ist $Y^3 = 0$, so folgt zunächst

$$x = \frac{Y^1 Y^6 + Y^2 Y^7}{(Y^1)^2 + (Y^2)^2}, y = \frac{Y^2 Y^6 + Y^1 Y^7}{(Y^1)^2 + (Y^2)^2}, u_1 = Y^1, u^2 = Y^2, u_3 = 0.$$

z kann nun beliebig gewählt werden und daraus ergibt sich dann

$$u_0 = -(\frac{Y^1 Y^6 + Y^2 Y^7}{(Y^1)^2 + (Y^2)^2} Y^1 + \frac{Y^2 Y^6 + Y^1 Y^7}{(Y^1)^2 + (Y^2)^2} Y^2)$$

c) Stellt ein Punkt F von Φ eine Flagge dar, so entspricht ihm im I_3^1 die isotrope Gerade ${}^t(x, y, z)$ und in jedem Punkt dieser Geraden eine Ebene der festen Stellung $(u_1 : u_2 : u_3)$.

Wir wollen nun die Fläche Φ näher untersuchen. Zunächst bemerkt man, daß der durch

$$Y^3 = Y^4 = Y^5 = 0$$

beschriebene 3-dimensionale Teilraum T_3 ganz auf Φ liegt. Wir wollen ihn den *isotropen Teilraum* auf Φ nennen. Seine Punkte sind, abgesehen von den Punkten der *Ausnahmegeraden* $f : {}^t(0:0:0:0:0:0:t_1:t_2)$ von Φ, die Bilder der isotropen Flaggen des I_3^1, d.h. der Flaggen mit isotroper Ebene.[1]

Desweiteren besitzt Φ zwei Scharen von Erzeugendenebenen, die durch

[1] Φ enthält noch den durch $Y^1 = Y^2 = Y^3 = 0$ beschriebenen 3-dimensionalen Unterraum. Keiner seiner Punkte stellt aber eine Flagge des I_3^1 dar.

$$E_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ x \\ -y \end{pmatrix} u_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ y \\ x \end{pmatrix} u_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ x \\ y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u_3 \text{ bzw. } E_2 : \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_3 \\ 0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_3 \\ u_2 \\ -u_1 \end{pmatrix} y.$$

beschrieben werden. Durch jeden Punkt von Φ, der Bild einer Flagge ist, geht genau eine Ebene jeder Schar.

Bemerkung 5. Eine Ebene E_1 der ersten Schar liefert im I_3^1 Ebenenbündel mit Scheitel auf der isotropen Geraden ${}^t(x, y, z)$, während eine Ebene E_2 der zweiten Schar ein Parallelebenenbüschel in I_3^1 liefert, wobei jeder Punkt mit der ihn gehenden Ebene des Büschels eine Flagge bildet.

Bemerkung 6. Zwei Ebenen verschiedener Scharen haben stets genau einen Punkt gemeinsam, während zwei Ebenen derselben Schar windschief zueinander liegen.

Jede Gerade in einer Erzeugendenebene von Φ liegt natürlich zur Gänze auf Φ. Seien nun

$$F_1 : {}^t(u_1 : u_2 : u_3 : u_3x_1 : u_3y_1 : u_1x_1 + u_2y_1 : u_2x_1 - u_1y_1)$$
$$F_2 : {}^t(v_1 : v_2 : v_3 : v_3x_2 : v_3y_2 : v_1x_2 + v_2y_2 : v_2x_2 - v_1y_2)$$

die Bilder zweier verschiedener Flaggen des I_3^1, dann liegt, soferne nicht beide Punkte im Ausnahmeraum I_3 liegen, die Verbindungsgerade der beiden Punkte genau dann auf Φ_1 und Φ_2 und damit auch auf Φ, wenn entweder

$$x_1 = x_2 \textit{ und } y_1 = y_2 \ \ldots \ \text{Typ 1}$$

oder

$$(u_1 : u_2 : u_3) = (v_1 : v_2 : v_3) \ \ldots \ \text{Typ 2}$$

gilt. Geraden des Typs 1 liegen immer in einer Ebene der ersten Schar, Geraden des Typs 2 immer in einer Ebene der zweiten Schar.

Bemerkung 7. Einer Geraden des Typs 1 entsprechen im I_3^1 die Punkte einer isotropen Geraden und jedem Punkt ein Ebenbüschel mit fester Richtung. Wir wollen diese Richtung im folgenden auch als die *Richtung* einer Geraden vom Typ 1 bezeichnen.

Einer Geraden vom Typ 2 entsprechen im I_3^1 die Punkte eines (euklidischen) Kreiszylinders mit isotroper Erzeugendenrichtung und den Punkten jeder Erzeugenden eine isotropen Ebene σ und jedem Punkt eine Ebene fester Stellung. Wir wollen diese Ebenenstellung im folgenden auch als die *Stellung* einer Geraden vom Typ 2 bezeichnen.

Bemerkung 8 Einer Geraden des isotropen Teilraumes I_3 von Φ, die weder vom Typ 1 noch vom Typ 2 ist, entsprechen im I_3^1 die Punkte eines (euklidischen) Kreiszylinders mit isotroper Erzeugendenrichtung und den Punkten jeder Erzeugenden eine isotrope Ebene.

Beweis: Eine in I_3 liegende, von der Ausnahmsgeraden f verschiedene Gerade, die weder vom Typ 1 noch vom Typ 2 ist, wird durch zwei Punkte

$$F_1 : {}^t(u_1 : u_2 : 0 : 0 : 0 : u_1x_1 + u_2y_1 : u_2x_1 - u_1y_1)$$
$$F_2 : {}^t(v_1 : v_2 : 0 : 0 : 0 : v_1x_2 + v_2y_2 : v_2x_2 - v_1y_2),$$

aufgespannt, wobei $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$, $u_1v_2 - u_2v_1 \neq 0$ gelten muß, da sonst die Gerade F_1F_2 vom Typ 1 bzw. 2 wäre.

Da $u_1^2 + u_2^2 \neq 0$ sein muß, kann man durch eine Transformation (11) (siehe dazu Abschnitt 3 weiter unten)

$$F_1 : {}^t(1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0)$$
$$F_2 : {}^t(v1 : 1 : 0 : 0 : 0 : v_1x_1 + y_2 : x_2 - v_1y_2),$$

erreichen, sodaß die Gerade durch

$${}^t(\alpha : \beta : 0 : 0 : 0 : \beta(v_1x_2 + y_2) : \beta(x_2 - v_1y_2)$$

mit $(\alpha : \beta) \neq (0 : 0)$ parametrisiert werden kann. Gemäß Bem. 4. gilt nun für die entsprechenden Flaggen im I_3^1:

$$x = \frac{\alpha\beta(v_1x_2 + y_2) + \beta^2(x_2 - v_1y_2)}{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$y = \frac{\beta^2(v_1x_2 + y_2) - \alpha\beta(x_2 - v_1y_2)}{\alpha^2 + \beta^2} \tag{7}$$

$$z = z$$

$$(u_0 : u_1 : u_2 : u_3) = (-\beta(v_1x_2 + y_2) : \alpha : \beta : 0)$$

und die Punkte ${}^t(x, y, z)$ liegen auf dem (euklidischen) Kreiszylinder

$$[2x - (x_2 - v_1y_2)]^2 + [2y - (v_1x_2 + y_2)]^2 - (x_2 - v_1y_2)^2 - (v_1x_2 + y_2)^2 = 0 \tag{8}$$

mit isotroper Erzeugendenrichtung. Die Ebenen gehören einem Büschel um die isotrope Gerade ${}^t(0, v_1x_2 + y_2, z)$ an, die eine Erzeugende des Kreiszylinders ist.

Zusammenfassend haben wir also den

Satz 1 *Bildet man die Bewegungen (2) bzw. die Flaggen des I_3^1 gemäß den Vorschriften (5) bzw. (6) ab, so erhält man zwei in 7-dimensionalen projektiven Räumen liegende Flächen ζ und Φ. Φ, der Schnitt zweier Hyperflächen des projektiven Raumes und einer Hyperbene, besitzt 2-dimensionale Erzeugenden, die sich in zwei Scharen einteilen lassen. Dasselbe gilt für jene Geraden auf Φ, die zumindest das Bild einer nichtisotropen Flagge des I_3^1 tragen.*

Die Bilder der Flaggen des I_3^1 mit isotroper Ebene liegen im 3-dimensionalen isotropen Ausnahmeraum I_3 von Φ.

2. Wir wollen nun für Punkte aus B^7 und F^7 durch

$$d(X,Y) := \sum_{i=1}^{8} X^i Y^i$$

ein inneres Produkt definieren. Es besitzt für Bewegungen und Flaggen eine geometrische Bedeutung, da es für eine Bewegung B und eine Flagge (P; ε) genau dann verschwindet, wenn der Punkt P bei der Bewegung B in der Ebene ε läuft.

Sei nun B ein Bewegungsvorgang und M die Menge jener Punkte des I_3^1 die bei B ebene Bahnen durchlaufen. Die dieser Menge von Flaggen entsprechende Punktmenge im projektiven Raum F^7 bezeichnen wir mit F.

Sei B die dem Bewegungsvorgang B entsprechende Punktmenge auf ζ, so folgt nach oben:

$$d\,(B, F) \equiv 0.$$

Da $d(X, Y)$ bilinear ist, gilt diese Beziehung dann sogar für die von B in B_7 bzw. F in F^7 aufgespannten linearen Teilräume [B] und [F].

Will man also zu einer Punktmenge $F \subset \Phi$ den maximalen Bewegungsvorgang finden, der die zu F gehörende Flaggenmenge respektiert, so bildet man in F^7 die lineare Hülle [F], sucht dazu das orthogonale Komplement $B := [F]^{\perp}$ bzgl. des inneren Produktes (9) und schneidet dieses mit ζ. Es genügt daher im folgenden die Schnitte von Φ mit linearen Teilräumen des F^7 zu betrachten.

Ist F k-dimensionaler linearer Teilraum des F^7, dann ist 6-k die Dimension des orthogonalen Komplements B von F. Der Schnitt mit ζ ist dann i.a. eine (5–k)-parametrige Teilmenge von ζ und liefert daher einen (5–k)-parametrigen Bewegungsvorgang (zu den Ausnahmen siehe Bem. 10). Damit dieser also zumindest einparametrig ist, muß i.a. $k \leq 4$ gelten.

Dual geht man vor, wenn man zu einer Menge von Bewegungen die maximale Flaggenmenge finden will.

Bemerkung 9 Sind G1 und G2 zwei lineare Teilräume in B^7 bzw. F^7, dann gillt:

a) $(G_1 + G_2)^{\perp} = G_1^{\perp} \cap G_2^{\perp}$,

b) $(G_1 \cap G_2)^{\perp} = G_1^{\perp} + G_2^{\perp}$,

c) $(G_1 \subset G_2)^{\perp} \Rightarrow G_2^{\perp} \cap G_1^{\perp}$,

d) $((G_1)^{\perp})^{\perp} = G_1$.

Bemerkung 10 Dem Erzeugendenraum E_5 entspricht mittels des inneren Produktes (9) die Ausnahmsgerade f von Φ, sodaß wir mit Bem. 9 finden:

Das orthogonale Komplement eines linearen Teilraumes $F \subset F^7$ liegt genau dann im Erzeugendenraum E_5 von ζ durch den Punkt $I\,d$, wenn $f \subset F$ gilt.

Genau in diesem Fall ist auch die Dimension von $B \cap \zeta$ nicht $5-k$ sondern $6-k$; es tritt also kein Dimensionsverlust auf.

Bemerkung 11 Schneidet die Ausnahmsgerade f den linearen Teilraum F in genau einem Punkt $F : (0:0:0:0:0:t_6:t_7)$, dann schneidet $F^{\perp}$ den Hyperzylinder ζ nach einem in E_5 liegenden Teilraum B durch Id. Sucht man nun zu B die orthogonale Menge in F^7, so erhält man den linearen Teilraum $f + F \supset F$.

Wir werden daher im folgenden stets voraussetzen, daß entweder $f \subset F$ oder $f \cap F = \emptyset$ gilt.

Zusammenfassend haben wir

Satz 2 *Das durch (9) definierte innere Produkt, das für Bewegungen und Flaggen genau dann verschwindet, wenn die Bewegung die Flagge respektiert, erlaubt es den zu einer vorgegeben Menge von Flaggen maximalen Bewegungsvorgang zu finden. Dabei kann stets von Schnitten der Fläche Φ mit linearen Teilräumen des F^7 ausgegangen werden.*

3. Da unsere Überlegungen von dem in I_3^1 verwendeten Koordinatensystem unabhänging sein sollen, wollen wir untersuchen, wie sich ein Koordinatenwechsel in Gang- und Rastraum in den Punktmodellen B^7 und F^7 auswirkt.

Sei K eine isotrope Bewegung des I_3^1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \beta & \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ \gamma & \delta & \eta & 1 \end{pmatrix},$$

und KB_kK^{-1} der zum betrachteten Bewegungsvorgang B_k konjugierte Bewegungsvorgang. Der durch K vermittelte Übergang von B_k zum konjugierten Bewegungsvorgang KB_kK^{-1} kann auch als Koordinatentransformation K in Gang- und Rastraum gedeutet werden.

Die zu B_k und KB_kK^{-1} gehörenden Elemente der Punkträume B_7 bzw. F_7 sind dann durch die folgenden Transformationsgruppen (10) bzw. F_7 gekoppelt und werden im weiteren als nicht wesentlich verschieden angesehen:

$$\begin{pmatrix} \overline{X}^1 \\ \overline{X}^2 \\ \overline{X}^3 \\ \overline{X}^4 \\ \overline{X}^5 \\ \overline{X}^6 \\ \overline{X}^7 \\ \overline{X}^8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 & 0 & 0 & -\alpha & \beta & \alpha \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 & 0 & 0 & -\beta & -\alpha & \beta \\ \delta & \eta & 1 & -A & B & E & F & -E \\ 0 & 0 & 0 & \cos\psi & -\sin\psi & -C & -D & C \\ 0 & 0 & 0 & \sin\psi & \cos\psi & -D & C & D \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \\ X^3 \\ X^4 \\ X^5 \\ X^6 \\ X^7 \\ X^8 \end{pmatrix} \tag{10}$$

bzw. (man beachte Bem. 2)

$$\begin{pmatrix} \overline{Y}^1 \\ \overline{Y}^2 \\ \overline{Y}^3 \\ \overline{Y}^4 \\ \overline{Y5} \\ \overline{Y}^6 \\ \overline{Y}^7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & D & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \cos\psi & -\sin\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & \sin\psi & \cos\psi & 0 & 0 \\ A & -B & E & -\delta & -\eta & 1 & 0 \\ B & A & F & -\eta & \delta & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y^1 \\ Y^2 \\ Y^3 \\ Y^4 \\ Y^5 \\ Y^6 \\ Y^7 \end{pmatrix} \tag{11}$$

mit

$$\begin{aligned} A &= \alpha\cos\psi + \beta\sin\psi \\ B &= -\beta\cos\psi + \alpha\sin\psi \\ C &= -\delta\cos\psi + \eta\sin\psi \\ D &= -\eta\cos\psi - \delta\sin\psi \\ E &= -\delta A + \eta B \\ F &= -\eta A - \delta B \end{aligned}$$

Bemerkung 12 Die Transformationen (10) sind Automorphismen von ζ und führen den Erzeugendenraum E_5 in sich über. In E_5 selbst werden die Teilräume ${}^t(0:0:t_3:0:0:1:0:1)$, ${}^t(t_1:t_2:t_3:0:0:1:0:1)$ und ${}^t(0:0:t_3:t_4:t_5:1:0:1)$ auf sich abgebildet.

Bemerkung 13 Die Transformationen (11) sind Automorphismen von Φ. Der auf Φ liegende Ausnahmsraum I_3 geht dabei ebenfalls in sich über und die in I_3 liegende Ausnahmsgerade f bleibt punktweise fest.

Bemerkung 14 Eine nichtisotrope Flagge ($Y^3 \neq 0$) kann durch eine geeigente Transformation (11) stets in den Punkt ${}^t(0:0:1:0:0:0:0)$, eine isotrope Flagge ($Y^3 = 0$) stets in den Punkt ${}^t(1:0:0:0:0:0)$ von Φ übergeführt werden.

Für das Weitere ist es auch notwendig, über die Transformationen von Hyperbenen in F^7 Bescheid zu wissen. Sie besitzen die zu (11) transponiert inversen Matrizen und man erhält nach kurzer Rechnung:

$$\begin{pmatrix}\overline{U^1}\\ \overline{U^2}\\ \overline{U^3}\\ \overline{U^4}\\ \overline{U^5}\\ \overline{U^6}\\ \overline{U^7}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\psi & -\sin\psi & 0 & 0 & 0 & -\alpha & \beta\\ \sin\psi & \cos\psi & 0 & 0 & 0 & -\beta & -\alpha\\ \delta & \eta & 1 & -A & B & E & F\\ 0 & 0 & 0 & \cos\psi & -\sin\psi & -C & -D\\ 0 & 0 & 0 & \sin\psi & \cos\psi & -D & C\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U_1\\ U_2\\ U_3\\ U_4\\ U_5\\ U_6\\ U_7\end{pmatrix} \tag{12}$$

Zusammenfassend haben wir

Satz 3 *Ein Koordinatenwechsel im I_3^1 induziert in B^7 bzw. F^7 die projektiven Kollineationen (10) bzw. (11), die Automorphismen der Flächen ζ bzw. Φ sind. Die zu (11) dualen projektiven Kollineationen - sie sind für die Abbildung der Hyperbenen des F^7 verantwortlich - besitzen die Darstellung. (12)*

4. In den folgenden Abschnitten werden wir nun der Reihe nach die zu linearen Teilräumen von F^7 gehörenden maximalen Bewegungsvorgänge gemäß der Überlegungen aus Abschnitt 2 suchen. Dabei wollen wir aber nur solche Teiläume betrachten, die mit der Fläche F eine zumindest einparametrige Punktmenge gemeinsam haben, die auch Bilder von Flaggen des I_3^1 sind. Wegen 2 können wir uns daher auf lineare Teilräume F der Dimension $1 \leq k \leq 5$ beschränken, wobei für $k = 5$ zusätzlich noch $f \subset F$ gelten muß.

Wenden wir uns zunächst den Geraden des F^7 zu, dann können wir uns auf die auf Φ liegenden Geraden beschränken, da jede nicht auf Φ liegende Gerade mit Φ höchstens zwei Punkte gemeinsam haben kann.

Fall A: Ist zunächst $g \subset \Phi$ eine Gerade vom Typ 1 und seien

$$F_1 : {}^t(u_1 : u_2 : u_3 : u_3x : u_3y : u_1x + u_2y : u_2x - u_1y)$$
$$F_2 : {}^t(v_1 : v_2 : v_3 : v_3x : v_3y : v_1x + v_2y : v_2x - v_1y)$$

zwei verschiedene Punkte auf g.

A1.: Ist $u_3^2 + v_3^2 \neq 0$, dann kann o.B.d.A. durch eine Transformation (11)

$$F_1 : {}^t(0 : 0 : 1 : 0 : 0 : 0 : 0)$$
$$F_2 : {}^t(0 : v_2 : v_3 : 0 : 0 : 0)$$

mit $v_2 \neq 0$ erreicht werden.

Diese beiden Punkte[2] liefern mittels des inneren Produktes (9) die beiden Hyperbenen

$$X^2 = X^3 = 0$$

[2] Nach Bem. 2 studieren wir alles Φ betreffende in der Hyperbene $H_6 : Y^6 + Y^8 = 0$. Um das innere Produkt anwenden zu können, müssen wir die Y^8-Koordinate wieder hinzufügen.

die im Schnitt mit dem Hyperzylinder ζ den durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ t_1 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & t_2 & t_3 & 1 \end{pmatrix}$$

beschriebenen 4-parametrigen Bewegungsvorgang liefern. Er führt die Punkte der isotropen Geraden ${}^t(0, 0, z)$ auf Geraden mit der Richtung ${}^t(1 : 0 : 0)$. Wir sagen im folgenden, die Punkte dieser isotropen Geraden sind *geradläufig*.

A2: Ist aber $u_3^2 + v_3^2 = 0$, dann kann man

$$F_1 : {}^t(1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0)$$
$$F_2 : {}^t(v_1 : v_2 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0)$$

mit $v2 \neq 0$ erreichen, was zum 4-parametrigen Bewegungsvorgang

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ t_1 & t_2 & t_3 & 1 \end{pmatrix}$$

führt. Bei ihm wird die isotrope Gerade ${}^t(0, 0, z)$ in sich bewegt.

Fall B. Wenden wir uns nun einer Geraden g vom Typ 2 zu, die durch die beiden verschiedenen Punkte

$$F_1 : {}^t(u_1 : u_2 : u_3 : u_3x_1 : u_3y_1 : u_1x_1 + u_2y_1 : u_1x_1 - u_2y_1)$$
$$F_2 : {}^t(u_1 : u_2 : u_3 : u_3x_2 : u_3y_2 : u_1x_2 + u_2y_2 : u_1x_2 - u_2y_2)$$

gegeben sei. Wieder unterscheidet man zwei Fälle:

B1. Ist $u3 \neq 0$, dann kann man durch eine Transformation (11)

$$F_1 : {}^t(0 : 0 : 1 : 0 : 0 : 0 : 0)$$
$$F_2 : {}^t(0 : 0 : 1 : x_2 : 0 : 0 : 0)$$

mit $x_2 \neq 0$ erreichen, was den 4-parametrigen Bewegungsvorgang

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ t_1 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ t_2 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & t_3 & 1 \end{pmatrix}$$

liefert. Er führt die Punkte der isotropen Ebene $y = 0$ in horizontalen Ebenen.

B2: Gilt jedoch $u_3 = 0$, so hat die Gerade g mit der Ausnahmsgeraden f einen Punkt gemeinsam und führt daher auf den selben Bewegungsvorgang, wie der 2-dimensionale Unterraum $g + f$, der im nächsten Abschnitt untersucht werden wird (siehe dazu Bem. 11).

Fall C. Abschließend betrachten wir jene Geraden des Ausnahmeraums I_3, die zu keinem der beiden obigen Fälle gehören.

Eine solche kann nach Bem. 8 stets durch zwei Punkte der Gestalt

$$F_1 : {}^t(1:0:0:0:0:0:0)$$
$$F_2 : {}^t(0:1:0:\ 0:0:v_1x_2 + y_2 : x_2 - v_1y_2),$$

dargestellt werden. Das liefert in B^7 die Hyperbenen

$$X_1 = X_2 + (v_1x_2 + y_2)(X_6 - X_8) + (x_2 - v_1y_2) X_7 = 0$$

und im Schnitt mit ζ den 4-parametrigen Bewegungsvorgang

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ -(v1x2+y2)(\cos\varphi-1)+(v_1y_2-x_2)\sin\varphi & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ t_1 & t_2 & t_3 & 1 \end{pmatrix}$$

Er führt die Punkte des (euklidischen) Kreiszlinders

$$[2x - (x_2 - v_1y_2)]^2 + [2y - (v_1x_2 + y_2)] - (x_2 - v_1y_2)^2 - (v_1x_2 + y_2)^2 = 0$$

in den isotropen Ebenen $(-\beta\,(v_1x_2 + y_2) : \alpha : \beta : 0)$, die ein Ebenenbüschel um die Erzeugende ${}^t(0 : v_1x_2 : z)$ des Kreiszylinders bilden (siehe Bem. 8).

Die Grundrißbewegung ist eine Ellipsenbewegung, deren Gangpolkreis der Leitkreis des in Rede stehenden Kreiszylinders ist.

Zusammenfassend haben wir also den folgenden

Satz 4 *Geraden des Typs 1 führen auf eine isotrope Gerade, deren Punkte beim entsprechenden 4-parametrigen Bewegungsvorgang auf Geraden fester Richtung laufen. Geraden des Typs 2 führen auf eine isotropen Ebene, deren Punkte beim entsprechenden 4-parametrigen Bewegungsvorgang in Ebenen fester Stellung bewegt werden.*

Geraden des isotropen Teilraumes I_3, die nicht vom Typ 1 oder 2 sind, führen auf Punkte eines (euklidischen) Kreiszylinders mit isotroper Erzeugendenrichtung, die beim entsprechenden 4-parametrigen Bewegunsvorgang in isotropen Ebenen geführt werden.

5. Wir wenden uns nun den linearen zweidimensionalen Teilräumen des H_6 zu. Betracht wir zunächst die Erzeugendenebenen der Fläche Φ und die Ebenen des isotropen Teilraumes I_3.

Ist ε eine Ebene der ersten Schar, so wird sie durch drei Punkte.

$$F_1 : {}^t(u_1 : u_2 : u_3 : u_3x : u_3y : u_1x + u_2y : u_2y - u_1y)$$
$$F_2 : {}^t(v_1 : v_2 : v_3 : v_3x : v_3y : v_1x + v_2y : v_2x - v_1y)$$
$$F_3 : {}^t(w_1 : w_2 : w_3 : w_3x : w_3y : w_1x + w_2y : w_2x - w_1y)$$

aufgespannt, wobei die von den u_1, v_1 und w_i, $i = 1, 2, 3$ gebildete Matrix regulär sein muß.

Durch eine Transformation (11) kann $x = y = u_1^2 + u_2^2 = 0$ erreicht werden, sodaß ε auch durch die Punkte

$$F_1 : {}^t(0 : 0 : 1 : 0 : 0 : 0 : 0)$$
$$F_2 : {}^t(v_1 : v_2 : 0 : 0 : 0 : 0)$$
$$F_3 : {}^t(w_1 : w_2 : 0 : 0 : 0 : 0)$$

mit $\begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \neq 0$ aufgespannt wird.[3]

Dies liefert mittels des inneren Produktes (9) die Hyperebenen

$$X^3 = v_1X^1 + v_2X^2 = w_1X^1 + w_2X^2 = 0,$$

woraus der 3-parametrige Bewegungsvorgang

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & t_1 & t_2 & 1 \end{pmatrix}$$

fließt, der die isotrope Gerade ${}^t(0, 0, z)$ als Fixpunktsgerade besitzt.

Nun sei eine Ebene ε des Typs 2 durch die drei Punkte

$$F_1 : {}^t(u_1 : u_2 : u_3 : u_3x_1 : u_3y_1 : u_1x_1 + u_2y_1 : u_1y_1 - u_2y_1)$$
$$F_2 : {}^t(u_1 : u_2 : u_3 : u_3x_2 : u_3y_2 : u_1x_2 + u_2y_2 : u_1x_2 - u_2y_2)$$
$$F_3 : {}^t(u_1 : u_2 : u_3 : u_3x_3 : u_3y_3 : u_1x_3 + u_2y_3 : u_1x_3 - u_2y_3)$$

gegeben, wobei $\begin{vmatrix} x_i & y_j \\ x_i & y_j \end{vmatrix} \neq 0,\ i \neq j)1, 2, 3$ gelten muß.

Ist $u_3 \neq 0$, so kann man durch eine Transformation (11)

$$F_1 : t(0:0:1:0:0:0:0)$$
$$F_2 : t(0:0:1:x_2:y_2:0:0)$$
$$F_2 : t(0:0:1:x_3:y_3:0:0)$$

[3] Wir bezeichen auch die neuen Punkte mit F_i.

mit $\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \neq 0$ erreichen und findet damit den 3-parametrigen Bewegungsvorgang

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ t_1 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ t_2 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

der alle Punkte des I_3^1 in horizontalen Ebenen führt. Er entsteht durch Fortsetzung einer ebenen Bewegung in den Raum.

Ist hingegen $u_3 = 0$, dann liegt ε im dreidimensionalen Ausnahmeraum I_3 und schneidet daher die Ausnahmsgerade f i.a. in einem Punkt. ε liefert damit den selben Bewegungsvorgang wie $\mathrm{I}_3 = f + \varepsilon$, was aber im zweiten Teil [16] behandelt werden wird.

Einzig der Fall $f \subset \varepsilon \subset \mathrm{I}_3$ bleibt hier zu disktieren.[4] In diesem Fall wird die Ebene durch die Punkte

$$F_1 : {}^t(0:0:0:0:0:0:1)$$
$$F_2 : {}^t(0:0:0:0:0:1:0)$$
$$F_3 : {}^t(u_1 : u_2 : 0 : 0 : 0\ u_1x_3 + u_2y_3 : u_2x_3 - u_1y_3)$$

mit $u_1^2 + u_2^2 \neq 0$ aufgespannt, weshalb durch eine geeignete Transformation (11)

$$F_3 : {}^t(1:0:0:0:0:0:0)$$

erreicht werden kann.

Mittels des inneren Produktes (9) erhält man dann in B^7 die Hyperebenen

$$\mathrm{X}^1 = \mathrm{X}^7 = \mathrm{X}^6 - \mathrm{X}^8 = 0$$

und im Schnitt mit ζ den 4-parametrigen Bewegungsvorgang

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ t_1 & 0 & 1 & 0 \\ t_2 & t_3 & t_4 & 1 \end{pmatrix},$$

[4] Gilt $f \subset \varepsilon$, aber liegt ε nicht im isotropen Aushanmeraum I_3, dann hat ε mit $\varnothing$ höchstens einen Punkt gemeinsam, der auch Bild einer Flagge ist.

[5] Man beachte hinsichtlich der um 1 höheren Parameterzahl im Vergleich mit den anderen Fällen dieses Abschnitts Bem. 10

bei dem alle Punkte des I_3^1 in isotropen Ebenen parallel zu $x = 0$ bewegt werden.[5] Damit haben wir

Satz 5 *Erzeugendenebenen von Φ aus der ersten Schar führen zu 3-parametrigen Bewegungsvorgängen, die eine isotrope Fixpunktsgerade besitzen. Erzeugendenebenen von Φ aus der zweiten Schar mit nichtisotroper Stellung liefern 3-parametrige Bewegungen, die alle Punkte des I_3^1 in zueinander parallelen nichtisotroen Ebenen führen. Ebenen des isotropen Teilraumes, die Ausnahmsgerade f enthalten, liefern 4-parametrige Bewegungsvorgänge, bei denen alle Punkte in zueinander parallelen isotropen Ebenen bewegt werden.*

Bemerkung 15 Erzeugendenebenen der zweiten Schar führen zwar auf Bewegungen, die alle Punkte des I_3^1 auf ebenen Bahnen führen, entstehen aber durch Fortsetzung einer ebenen Bewegung in den Raum. Wir bezeichnen solche Bewegungen im weiteren als *unechte Darbouxbewegungen*.

Nun wollen wir uns mit Ebenen beschäftigen, die nicht auf Φ liegen. Jede solche Ebene e schneidet die beiden quadratischen Hyperflächen Φ_1 und Φ_2 i.a. nach einer Kurve zweiter Ordnung, sodaß der Schnitt der Ebene mit Φ entweder eine reguläre oder eine singuläre bzw. ein linearer Bestandteil einer singulären Kurve 2. Ordnung ist, oder nur aus höchstens vier Punkte besteht.[6] Den letzten Fall werden wir wie vereinbart aus unseren Betrachtungen ausschließen.

Damit also etwas auftritt, das nicht schon behandet wurde, muß die Ebene zumindest drei nichtkollineare Punkte

$$F_1 : {}^t(u_1 : u_2 : u_3 : u_3x_1 : u_3y_1 : u_1x_1 + u_2y_1 : u_1x_1 - u_2y_1)$$
$$F_2 : {}^t(v_1 : v_2 : v_3 : v_3x_2 : v_3y_2 : v_1x_2 + v_2y_2 : v_1x_2 - v_2y_2)$$
$$F_3 : {}^t(w_1 : w_2 : w_3 : w_3x_3 : w_3y_3 : w_1x_3 + w_2y_3 : w_1x_3 - w_2y_3)$$

mit Φ gemeinsam haben, wobei $u_3^2 + v_3^2 + w_3^2 \neq 0$ gelten muß, da sonst die drei Punkte und damit die von ihnen aufgespannte Ebene im isotropen Teilraum $I_3 \subset \Phi$ liegen.

Fall I: Wir nehmen zunächst an, daß eine Seite des Dreiecks $F_1F_2F_3$, o.B.d.A. F_1F_2, auf Φ liege. Sie kann den Typ 1 oder Typ 2 besitzen oder im isotropen Teilraum I_3 liegen. In diesem Fall schneidet ε also die beiden Flächen Φ_1 und Φ_2 nach je einer singulären Kurve zweiter Ordnung k_1 und k_2, die zumindest in einem linearen Bestandteil (hier F_1F_2) übereinstimmen.

A: Sei F_1F_2 vom Typ 1, dann gilt $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$ und man kann durch eine geeignete Transformation (11) $x_1 = y_1 = 0$ erreichen.

A1: Gilt $u_3^2 + v_3^2 \neq 0$ - die Richtung der Geraden F_1F_2 ist nichtisotrop-, dann wird ε auch von den Punkten

$$F_1 : {}^t(0 : 0 : 1 : 0 : 0 : 0 : 0)$$
$$F_2 : {}^t(1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0)$$
$$F_3 : {}^t(w_1 : w_2 : w_3 : w_3x_3 : w_3y_3 : w_1y_3 : w_1x_3 + w_2y_3 : w_2x_3 - w_1y_3)$$

aufgespannt.

[6] Diese und die folgenden Überlegungen bleiben auch richtig, wenn etwa $\varepsilon \subset \Phi$ gilt.

A1a: Wir fragen nun, unter welchen Bedingungen die Verbindungsgerade g von F_3 mit einem Punkt $F \in F_1F_2$ ganz auf Φ liegt. Die beiden anderen linearen Bestandteile von k_1 und k_2 stimmen dann ebenfalls überein und $k_1 = k_2$ ist der Schnitt von ε mit Φ.

Ist die Gerade $F\,F_3$ vom Typ 1, dann muß $x_3 = y_3 = 0$ (siehe) gelten und es liegt eine bereits behandelte Erzeugendenebene von Φ aus der ersten Schar vor.

Ist sie aber vom Typ 2, dann muß $w_2 = 0$ (siehe Bem. 6) gelten. Falls auch noch $w_3 = 0$ gilt, hat ε mit der Ausnahmsgeraden f einen Punkt gemeinsam, was in [16] behandelt werden wird.

Also sei $w_3 \neq 0$ (o.B.d.A $w_3 = 1$), dann wird die Ebene auch von den drei Punkten

$$\begin{aligned} F_1 &: {}^t(0:0:1:0:0:0:0) \\ F_2 &: {}^t(1:0:0:0:0:0:0) \\ F_3 &: {}^t(0:0:0:x_3:y_3:w_1x3:\text{-}w_1y_3) \end{aligned}$$

mit $x_3^2 + y_3^2 \neq 0$ aufgespannt. Dies liefert mittels des inneren Produktes (9) die Hyperebenen

$$X^1 = X^3 = x_3X^4 + y_3X^5 + w_1x_3(X^6 - X^8) - w_1y_3X^7 = 0.$$

Ist $x_3 \neq 0$, so erhalten wir im Schnitt mit ζ den 3-parametrigen Bewegungsvorgang

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ t_1 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & -\dfrac{y_3}{x_3}t_2 - w_1(\cos\varphi - 1) + \dfrac{w_1y_3}{x_3}\sin\varphi & t_2 & 1 \end{pmatrix},$$

während sich für $x_3 = 0$ der 3-parametrige Bewegungsvorgang

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ t_1 & \sin\varphi & \cos\phi & 0 \\ 0 & t_2 & w_1\sin\phi & 1 \end{pmatrix}$$

einstellt

Für beide sind die Punkte der isotropen Geraden ${}^t(0, 0, z)$ geradläufig (die Richtung der Bahngeraden ist ${}^t(0:1:0)$) und die Punkte der isotropen Ebene $y_3x - x_3y = 0$ bzw. $x = 0$ werden in Ebenen der Stellung $(w_1 : 0 : 1)$ geführt.

A1b: Gibt es neben F_1F_2 keine weitere Gerade der Ebene ε, die auch auf Φ liegt, dann schneiden sich die von F_1F_2 verschiedenen linearen Bestandteile von k_1 und k_2 in F_3 und ε hat mit Φ die Gerade F_1F_2 und den Punkt F_3 gemeinsam. Nach oben muß dann w_2, $x_3^2+y_3^2 \neq 0$ gelten.

Man erhält daher in B^7 die Hyperebenen

$$X^1 = X^3 = X^2 + \frac{w_3x_3}{w_2}X^4 + \frac{w_3y_3}{w2}X^5 + \frac{w_1x_3+w_2y_3}{w_2}(X^6-X^8) + \frac{w_2x_3-w_1y_3}{w_2}X^7 = 0$$

und damit den 3-parametrigen Bewegungsvorgang

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & 0 \\ -\frac{w_3x_3}{w_2}t_1 - \frac{w_3y_3}{w_2}t_2 - \frac{w_1x_3+w_2y_3}{w_2}(\cos\varphi-1) - \frac{w_2x_3-w_1y_3}{w_2}\sin\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & t_1 & 1 \end{pmatrix}$$

der die Punkte der isotropen Geraden ${}^t(0, 0, z)$ auf Geraden der Richtung ${}^t(0:1:0)$ und die Punkte der isotropen Gerden ${}^t(x_3y_3, z)$ in Ebenen $(-(w_1x_3 + w_2y_3 + w_3z) : w_1 : w_2 : w_3)$ führt.

A2: Gilt hingegen $u_3^2+v_3^2=0$ - die Richtung von F_1F_2 ist isotrop-, so kann man durch eine Transformation (11)

$$F_1 : {}^t(1:0:0:0:0:0:0)$$
$$F_2 : {}^t(v_1:1:0:0:0:0:0)$$
$$F_3 : {}^t(0:0:1:x_3:y_3:0:0)$$

erreichen.

A2a: Gibt es eine Gerade $F\,F_3$ in $\varepsilon \cap \Phi$, $F \in F_1F_2$, dann kann sie vom Typ 1 oder 2 sein. Im ersten Fall ($x_3 = y_3 = 0$) liegt dann die ganze Ebene auf Φ - ε ist Ebene der ersten Schar-, der zweite Fall ist nicht möglich, da $w_3 = 0$ gelten müßte, nach Voraussetzung aber $u_3^2+v_3^2+w_3^2 \neq 0$ sein muß.

A2b: Gibt es keine Gerade $F\,F_3$ auf Φ - es muß wegen vorhin $x_3^2+y_3^2 \neq 0$ sein -, so sind F_1F_2 und F_3 der Schnitt von ε mit Φ. Man erhält mittels des inneren Produktes (9) die Hyperebenen

$$X^1 = X^2 = X^3 + x_3X^4 + y_3X^5 = 0$$

und daraus im Schnitt mit ζ den 3-parametrigen Bewegungsvorgang

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ -x_3t_1-y_3t_2 & t_1 & t_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Er führt die isotrope Gerade ${}^t(0, 0, z)$ in sich und die Punkte der istropen Geraden ${}^t(x_3, y_3, z)$ in horizontalen Ebenen.

Satz 6 *Eine nicht auf Φ liegende Ebene ε, die mit der Fläche zumindest eine Gerade vom Typ 1 und einen nicht auf ihr liegenden Punkt gemeinsam hat, schneidet Φ im allgemeinen in keinem weiteren Punkt mehr. Im speziellen kann aber noch eine durch diesen Punkt gehende Gerade vom Typ 2 ausgeschnitten werden.*

Bei dem ε entsprechenden Bewegungsvorgang sind dann die Punkte einer isotropen Geraden geradläufig und im allgemeinen werden die Punkte einer isotropen Ebene zutreffen.

B: Ist F_1F_2 vom Typ 2, dann gilt $(u_1 : u_2 : u_3) = (v_1 : v_2 : v_3)$ und man kann durch eine geeignete Transformation (11) $x_1 = y_1 = y_2 = 0$ erreichen.

B1: Ist $u_3 \neq 0$, kann noch

$$F_1 : {}^t(0:0:1:0:0:0:0)$$
$$F_2 : {}^t(0:0:1:x_2:0:0:0)$$
$$F_3 : {}^t(w_1 : w_2 : w_3 : w_3x_3 : w_3y_3 : w_1x_3 + w_2y_3 : w_1x_3 - w_2y_3)$$

mit $x_2 \neq 0$ erzielt werden.

B1a: Wieder suchen wir zunächst nach Bedingungen dafür, daß die Verbindungsgerade von F_3 mit einem Punkt $F \subset F_1F_2$ ganz auf Φ liegt.

Ist diese Gerade vom Typ 1, dann ist dies genau dann der Fall, wenn $y_3 = 0$ ist. Die Ebene ε hat mit Φ also eine Gerade des Typs 1 und eine des Typs 2 gemeinsam, was bereits in A1a behandelt wurde.

Ist FF_3 aber vom Typ 2 (genau dann, wenn $w_1^2 + w_2^2 = 0$ und $y_3 \neq 0$ gilt), dann liegt ε auf Φ und ist aus der zweiten Schar.

B1b: Gibt es aber keine Gerade FF_3 im Schnitt von ε mit Φ, $F \in F_1F_2$, dann muß nach oben $w_1^2 + w_2^2, y^3 \neq 0$ gelten. Die Ebene wird auch von den folgenden Punkten aufgespannt

$$F_1 : {}^t(0:0:1:0:0:0:0)$$
$$F_2 : {}^t(0:0:0:1:0:0:0)$$
$$F_3 : {}^t(w_1 : w_2 : 0 : 0 : w_3y_3 : w_1x_3 + w_2y_3 : w_2x_3 - w_1y_3),$$

was sofort mittels des inneren Produktes (9) die Hyperebenen

$$X^3 = X^4 = w_1X^1 + w_2X_2 + w_3y_3X^5 + (w_1x_3 + w_2y_3)(X^6 - X^8) + (w_2x_3 - w1y3)X^7 = 0$$

und damit für $w_1 \neq 0$ den 3-parametrigen Bewegungsvorgang

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{w_2}{w_1}t_1 - \frac{w_3y_3}{w_1}t_2 - \frac{w_1x_3}{w_1}(\cos\varphi - 1) - \frac{w_2x_3}{w_1} - \frac{w_2x_3 - w_1y_3}{w_1}\sin\varphi & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ & 0 & t_2 & 1 \\ t_1 & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

bzw. für $w_1 = 0$ auf

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ t_1 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ -\dfrac{w_3 y_3}{w_2} t_2 - y_3(\cos\varphi - 1) - x_3 \sin\varphi & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & t_2 & 1 \end{pmatrix}$$

liefert. Sie führen die Punkte der isotropen Ebene $y = 0$ in horizontalen Ebenen und die Punkte der isotropen Geraden ${}^t(x_3, y_3, z)$ in der Ebene $(-(w_1x_3 + w_2y_3 + w_3z) : w_1 : w_2 : w_3z)$ bzw. $(-(w_2y_3 + w_3z) : 0 : w_2 : w_3)$.

B2. Ist $u_3 = 0$, dann muß $u_1v_2 - u_2v_1 = 0$ gelten und man kann

$$F_1 : {}^t(1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0)$$
$$F_2 : {}^t(1 : 0 : 0 : 0 : 0 : y_2 : 0)$$
$$F_3 : {}^t(w_1 : w_2 : w_3 : w_3x_3 : w_3y_3 : w_1x_3 + w_2y_3 : w_1x_3 - w_2y_3)$$

erreichen. Die Ebene hat daher mit der Geraden f einen Punkt gemeinsam und dieser Fall wird in [16] behandelt werden.

Satz 7 *Eine nicht auf Φ liegende Ebene ε, die mit der Fläche zumindest eine Gerade vom Typ 2 und einen nicht auf ihr liegenden Punkt gemeinsam hat, schneidet Φ im allgemeinen in keinem weiteren Punkt mehr. Im speziellen kann aber noch eine durch diesen Punkte gehende Gerade vom Typ 1 ausgeschnitten werden. Im allgemeinen Fall - der spezielle wurde bereits unter* **A1a** *abgehandelt -, werden bei dem ε entsprechenden Bewegungsvorgang die Punkte einer isotropen Ebene σ und die Punkte einer nicht in σ liegenden isotropen Geraden in jeweils zueinander parallelen Ebenen bewegt.*

C: Wir wollen nun noch annehmen, daß die Gerade F_1F_2 im Ausnahmeraum I_3 liege, aber weder vom Typ 1 noch vom Typ 2 sei. Da der Punkt F_3 nicht auch in I_3 liegen darf, wird ε von folgenden Punkten

$$F_1 : {}^t(u_1 : u_2 : 0 : 0 : 0 : u_1x_1 + u_2y_1 : u_2x_1 - u_1y_1)$$
$$F_2 : {}^t(v_1 : v_2 : 0 : 0 : 0 : v_1x_2 : v_2y_2 : v_2x_2 - v_1y_2)$$
$$F_3 : {}^t(w1 : w_2 : 1 : x3 : y3 : w_1x_3 + w_2y_3 : w_1x_3 - w_2y_3)$$

aufgespannt, wobei $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - x_2)^2$, $u_1v_2 - u_2v_1 \neq 0$ sein muß.

Durch eine Transformation (11) kann nun

$$F_1 : {}^t(1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0)$$
$$F_2 : {}^t(v1 : 1 : 0 : 0 : 0 : v_1x_2 + y_2 : x_2 - v_1y_2)$$
$$F_3 : {}^t(0 : 0 : 1 : x_3 : y_3 : 0 : 0)$$

mit $v_2 \neq 0$ erreicht werden, weshlab ε auch durch die folgenden Punkte

$$F_1 : {}^t(1:0:0:0:0:0:0)$$
$$F_2 : {}^t(0:1:0:0:0:v_1x_2+y_2:x_2-v_1y_2)$$
$$F_3 : {}^t(0:0:1:x_3:y_3:0:0)$$

aufgespannt wird.

C1: Nehmen wir zunächst an, daß es einen Punkt F auf der Geraden F_1F_2 so gibt, daß die Gerade FF_3 ganz auf Φ liegt. Diese kann nur vom Typ 1 sein, da die zu den Punkten von F_1F_2 gehörenden Flaggen im isotropen Raum I_3^1 alle isotrope Ebenen besitzen.

Nach den Ergebnissen von Bem. 8 existiert daher genau dann eine Gerade $F\,F_3 \subset \Phi$ (vom Typ 1), wenn die isotrope Gerade ${}^t(x_3, y_3, z)$ Erzeugende des zu F_1F_2 gehörenden Kreiszylinders (8) ist. x_3 und y_3 besitzen dann nach (7) eine Darstellung der Form:

$$x_3 = \frac{\alpha\beta(v_1x_2+y_2)+\beta^2(x_2-v_1y_2)}{\alpha^2+\beta^2}$$
$$y_3 = \frac{\beta^2(v_1x_2+y_2)+\alpha\beta(x_2-v_1y_2)}{\alpha^2+\beta^2} \tag{13}$$

mit einem festen $(\alpha:\beta) \neq (0:0)$.

Der 3-parametrige Bewegungsvorgang

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ -(v_1x_2+y_2)(\cos\varphi-1)-(x_2-v_1y_2)\sin\varphi & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ -x_3t_1-y_3t_2 & t_1 & t_2 & 1 \end{pmatrix},$$

mit x_3, y_3 wie in (13), der als Schnitt der Hyperebenen

$$X^1 = X^3 + x_3X^4 + y_3X^5 = X^2 + (v_1x_2+y_2)(X^6-X^8) + (x_2-v_1y_2)X^7 = 0$$

mit ζ erhalten wird, führt die Punkte dieses Kreiszylinders in isotropen Ebenen und die Punkte der isotropen Erzeugenden ${}^t(x_3, y_3, z)$ auf horizontalen Geraden. Die Grundrißbewegung ist eine Ellipsenbewegung mit dem Leitkreis des Kreiszylinders als Gangpolkurve.

C2: Existiert hingegen keine Gerade $FF_3 \subset \Phi$, dann hat ε mit Φ nur die Gerade F_1F_2 und den Punkt F_3 gemeinsam und der 3-parametrige Bewegungsvorgang

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ -(v_1x_2+y_2)(\cos\varphi-1)-(x_2-v_1y_2)\sin\varphi & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ -x_3t_1-y_3t_2 & t_1 & t_2 & 1 \end{pmatrix}$$

führt die Punkte des Kreiszylinders (8) in isotropen Ebenen und die Punkte der nicht auf dem Zylinder liegenden isotropen Geraden ${}^t(x_3, y_3, z)$ in horizontalen Ebenen. Für die Grundrißbewegung gilt das vorhin Gesagte.

Satz 8 *Eine Ebene ε, die eine Fläche F nach einer Geraden g des isotropen Ausnahmeraumes, die weder den Typ 1 noch den Typ 2 besitzt und nach einem nicht im Ausnahmeraum liegenden Punkt schneidet, hat mit F im allgemeinen keine weiteren Punkte gemeinsam. Im speziellen kann der Schnitt aber auch aus einer weiteren Geraden vom Typ 1 durch diesen Punkt bestehen.*

Die zugehörigen Bewegungsvorgänge führen dann die Punkte eines Kreiszylinders in isotropen Ebenen, wobei im allgemeinen noch die Punkte einer nicht am Zylinder liegenden isotropen Ceraden in nichtisotropen Ebenen geführt werden und im speziellen die Punkte einer Erzeugenden des Zylinders geraldäufig mit nichtisotroper Richtung sind.

Fall II: Wir nehmen nun an, daß keine Seite des Dreiecks $F_1F_2F_3$ auf F liegt. Da $u_3^2+v_3^2+w_3^2 \neq 0$ gelten muß, kann man o.B.d.A.

$$F_1 : {}^t(0:0:1:0:0:0:0)$$
$$F_2 : {}^t(0:v_2:v_3:v_3x_2:v_3y_2:v_2y_2:v_2x_2)$$
$$F_3 : {}^t(w_1:w_2:w_3:w_3x_3:w_3y_3:w_1x_3+w_2y_3:w_2x_3-w_1y_3)$$

erreichen. Damit ergeben sich die folgenden Bedingungen:

$$x_2^2+y_2^2,\, x_3^2+y_3^2, (x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2, v_2, w_1^2+w_2^2, w_1^2+(v_2w_3-v_3w_2)^2, v_3^2+w_3^2 \neq 0. \qquad (14)$$

In den ersten drei Fällen wäre eine Dreiecksseite Gerade vom Typ 1, in den zweiten drei Fällen eine Gerade vom Typ 2 auf Φ und im letzten Fall lägen F_2 und F_3 im isotropen Teilraum von Φ, was $F_2F_3 \subset \Phi$ zur Folge hätte.

Wir fragen nun, ob es einen Punkt $F \in F_2F_3$ so gibt, daß die Gerade $g = F_1F$ mit Φ einen weiteren Punkt gemeinsam hat.[7] Für den allgemeinen Punkt F von g gilt die Darstellung

$$F = \alpha F_1 + \beta F_2 + \gamma F_3,\ \alpha,\beta,\gamma \in R.$$

Schneidet man g mit den beiden Flächen Φ_1 und Φ_2, so ergibt sich für jedes $\beta:\gamma$, je ein Schnittpunkt mit Φ_1 bzw. Φ_2, also ein α_1 bzw. α_2. Für diese findet man nach kurzer Rechnung:

$$\alpha_1 = \frac{\beta\gamma\left[v_3w_1(x_2-x_3)-(v_2w_3-v_3w_2)(y_2-y_3)\right]}{\beta v_2y_2+\gamma(w_1x_3+w_2y_3)}$$

$$\alpha_2 = \frac{\beta\gamma\left[(v_3w_2-v_2w_3)(x_2-x_3)-v_3w_1(y_2-y_3)\right]}{\beta v_2x_2+\gamma(w_2x_3-w_1y_3)}$$

[7]Da ε mit Φ_1 und Φ_2 in diesem Fall je einen regulären Kegelschnitt gemeinsam hat, wird es i.a. genau einen solchen Punkt *F* geben.

g schneidet Φ nun genau dann in einem von F_1 verschiedenen Punkt, wenn $\alpha_1 = \alpha_2$ ($\neq 0$) gilt. Dafür erhält man unschwer die Bedingung

$$\beta\gamma\{\gamma w_1 x_3 + \beta v_2 y_2 + \gamma w_2 y_3)\ [(v_3 w_2 - v_2 w_3)\ (x_2 - x_3) - v_3 w_1\ (y_2 - y_3)] +$$

$$+\ (\beta v_2 x_2 + \gamma w_2 x_3 - \gamma w_1 y_3)\ [(v_2 w_3 - v_3 w_2)\ (y_2 - y_3) - v_3 w_1\ (x_2 - x_3)]\} = 0$$

die natürlich für $\beta = 0$ den Punkt F_3 und $\gamma = 0$ den Punkt F_2 liefert. Im allgemeinen wird aus dem Rest eindeutig $\beta : \gamma$ errechnet werden können, sodaß die Ebene mit Φ genau vier Punkte gemeinsam hat.

Verschwinden aber die Koeffizienten von β und γ - ε hat mit Φ dann ∞^1 Punkte gemeinsam - d.h. gilt.

$$\left[v_2 w_2 w_3 - v_3 (w_1^2 + w_2^2)\right](x_3 y_2 - x_2 y_3) + v_2 w_1 w_3 (x_3^2 + y_3^2 - x_2 x_3 - y_2 y_3) = 0$$

$$(v_2 w_3 - v_2 w_2)(x_3 y_2 - x_2 y_3) - v3w1(x_2^2 + y_2^2 - x_2 x_3 - y_2 y_3) = 0$$

dann läßt sich daraus v_3 zu

$$v_3 = \frac{v_2 w_3 \left[w_2 (x_3 y_2 - x_2 y_3) + w_1 (x_3^2 + y_3^2 - x_2 x_3 - y_2 y_3)\right]}{(w_1^2 + w_2^2)(x_3 y_3 - x_2 y_3)}$$

bzw.

$$v_3 = \frac{v_2 w_3 (x_2 y_3 - x_3 y_2)}{w_2 (x_2 y_3 - x_3 y_2) - w_1 (x_2^2 + y_2^2 - x_2 x_3 - y_2 y_3)}$$

berechnen. Vergleicht man, so ergibt sich die Bedingung

$$v_2 w_1 w_3\ [x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)2]\ [w_2(x_2 y_3 - x_3 y_2) + w_1(x_2 x_3 + y_2 y_3)] = 0.$$

$v_2 = 0$ und $(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 = 0$ sind nach [14] nicht möglich. Gleiches gilt für $w_1 = 0$, da dies im Widerspruch zu [14] $v_3 w_2 - v_2 w_3 = 0$ nach sich zieht. Ist schließlich $w_3 = 0$, dann folgt $v_3 = 0$, was erneut wegen (14) unmöglich ist.

$$w_1 : w_2 = x_3 y_2 - x_2 y_3 : x_2 x_3 + y_2 y_3$$

und damit $v_3 = \dfrac{v_2 w_3}{\lambda (x_2^2 + y_2^2)} \neq 0, \lambda \neq 0 \in R$ gelten. Die Ebene wird daher von den

Punkten

$$F_1 : {}^t(0:0:1:0:0:0:0$$
$$F_2 : {}^t(0:\lambda(x_2^2+y_2^2):w_3:x_2w_3:y_2w_3:\lambda\, y_2\,(x_2^2+y_2^2):\lambda x_2(x_2^2+y_2^2))$$
$$F_3 : {}^t(\lambda(x_3y_2-x_2y_3):\lambda(x_2x_3+y_2y_3):w_3:w_3x_3:w_3y_3:\lambda y_2(x_3^2+y_3^2):\lambda x_2(x_2^2+y_3^2))$$

aufgespannt. daraus ergeben sich mittels des inneren Produktes (9) die Hyperebenen

$X^3 = 0$

$\lambda(x_2^2+y_2^2)X^2+x_2w_3X^4+y_2w_3X^5+\lambda(x_2^2+y_2^2)[y_2(X^6-X^8)+x_2X^7]=0$

$\lambda^* x_3y_2 - x_2y_3)X^1 + \gamma(x_2x_3+y_2y_3)X^2 + w_3x_3X^4 + w_3y_3X^5 +$

$+\lambda(x_3^2+y_3^2)[y_2(X^6-X^8)+x_2X^7]=0$

und im Schnitt mit z der 3-paramterige Bewegungsvorgang

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ -\dfrac{w_3y_2t_1-w_3x_2t_2}{\lambda(x_2^2+y_2^2)}+\dfrac{x_3^2+y_3^2-x_2x_3-y_2y_3}{x_2y_3-x_3y_2}[y_2(\cos\varphi-1)+x2\sin\varphi] & 0 & 0 & 0 \\ & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ -\dfrac{w_3x_2t_1+w_3y_2t_2}{\lambda(x_2^2+y_2^2)}-y^2(\cos\varphi-1)-x_2\sin\varphi & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ & t_1 & t_2 & 1 \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Er führt die Punkte

$$x(\beta,\gamma)=\frac{(\beta x_2+\gamma x_3)[\beta(x_2^2+y_2^2)+\gamma(x_3^2+y_3^2)]}{(\beta x_2+\gamma x_3)^2+(\beta y_2+\gamma y_3)^2}$$

$$y(\beta,\gamma)=\frac{(\beta y_2+\gamma y_3)[\beta(x_2^2+y_2^2)+\gamma(x_3^2+y_3^2)]}{(\beta x_2+\gamma x_3)^2+(\beta y_2+\gamma y_3)^2}$$

$$z = z$$

des (euklidischen) Kreiszylinders mit isotroper Erzeugendenrichtung und dem in z = 0 liegenden Leitkreis k: (M, r)

$$M : {}^t\left(\frac{y_2(x_3^2+y_3^2)-y_3(x_2^2+y_2^2)}{2(x_3y_2-x_2y_3)},\frac{x^3(x_2^2+y_2^2)-x_2(x_3^2+y_3^2}{2(x_3y_2-x_2y_3)}\right)$$

$$r^2=\frac{(x_2^2+y_2^2)(x_3^2+y_3^2)[(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2]}{4(x_3y_2-x_2y_3)^2}$$

in ebenen Bahnen. Die Bahnebenen berechnen sich zu

$$u_o = \lambda y_2[\beta(x_2^2+y_2^2)+\gamma(x_3^2+y_3^2)]^2 + zw_3[\beta(x_2+\gamma x_3)^2+(\beta y_2+\gamma y_3)^2]$$
$$u_1 = \lambda\gamma(x_3y_2-x_2y_3)[\beta(x_2^2+y_2^2)+\gamma(x_3^2+y_3^2)]$$

$$u_2 = \lambda[\beta(x_2^2+y_2^2)+\gamma(x_2x_3+y_2y_3)][\beta(x_2^2+y_2^2)+\gamma(x_3^2+y_3^2)]$$
$$u_3 = w_3[(\beta x_2+\gamma x_3)^2+(\beta y_2+\gamma y_3)^2]$$

und da $u_3 = 0$ nur komplexe Lösungen $\beta : \gamma$ besitzt, gibt es keine isotropen Bahnebenen. Somit haben wir

Satz 9 *Hat eine Ebene mit Φ keine linearen Teilräume gemeinsam, dann scheidet sie Φ im allgemeinen in 4 Punkten. Im Speziellen kann sie mit Φ aber auch eine reguläre Kurve 2. Ordnung gemeinsam haben.*

Der zum speziellen Fall gehörende 3-parametrige Bewegungsvorgang führt die Punkte eines Kreiszylinders mit isotroper Erzeugendenrichtung in ebenen Bahnen, wobei die Punkte jeder Erzeugenden zueinander parallele Bahnebenen besitzen.

6. Damit sind die Schnitte der Fläche Φ mit ein- und zweidimensionalen linearen Teilräumen des F^7 vollständig diskutiert.

Der zweite Teil [16] dieser Arbeit ist den 3-, 4- und 5-dimensionalen Teilräumen des F^7 gewidmet, wobei uns vor allem jene Bewegungsvorgäng interessieren werden, bei denen alle Punkte des Raumes in ebenen Bahnen laufen, ohne daß die Fortsetzung einer ebenen Bewegung in den Raum vorliegt - wir sprechen dann von echten Darabouxbewegungen.

Literatur

[1] E. BOREL. Mémoire sur les déplacements a trajectoires sphériques. *Mém. savants étrangers Paris* (2), 33:1 128, (19008).
[2] O. BOTTEMA und B. ROTH. *Theoretical Kinematics*. Dover Publications, New York, (1981.).
[3] R. BRICARD. Sur un déplacement remarquable. *Comptes rendus des Séances, séance du 30. nov.*, (1896).
[4] R. BRICARD. Mémoire sur les deplacements a trajectoires spériques. *Journal de l'école polytechnique, II série, 11 cahier*, Seiten: 1-93, (1906).
[5] G. DARBOUX. Sur le déplacement d'un figure invariable. *Comptes rendus de l'Académie des sciences,* XCII:118 121, (1887).
[6] A. GFRERRER und J. LANG. Äquiforme Bündelbbewegungen im E_3 mit sphärischen Bahnen I. Im. Druck
[7] A. GFRERRER und J. LANG. Äquiforme Bündelbbewegungen im E_3 mit sphärischen Bahnen II. Im. Druck
[8] O. GIERING. Vorlesungen über höhere Geometrie, Teubner, Lepzig, (1990).
[9] J. LANG. Bewegungsvorgänge des Flaggenraumes mit sphärischen Bahnen - Ein Übertragungsprinzip. Journal of Geometry, 47:94-106, 1993.
[10] J. LANG. Bewegungsvorgänge des Flaggenraumes mit sphärischen Bahnen I: Die vierparametrigen Bewegungsvorgange. Mathematica Pannonica, 4:3-22, (1993.)

[11] J. LANG. Bewegungsvorgänge des Flaggenraumes mit sphärischen Bahnen II: Die dreiparametrigen Bewegungsvorgange. Mathematica Pannonica, 5:91-104, (1993.)

[12] O. RÖSCHEL. Räumliche Zwangläufe mit einer einparametrigen Schar ebener Bahnkurven I. Sb. d. Oesterr. Akad. d. Wiss., 193:471 484, (1984).

[13] O. RÖSCHEL. Räumliche Zwangläufe mit einer einparametrigen Schar ebener Bahnkurven II. Sb. d. Oesterr. Akad. d. Wiss., 193:557-567, (1984).

[14] H. SACHS. Isotrope Geometrie des Raumes. Vieweg-Verlag, Wiesbaden, (1987).

[15] J. TÖLKE. Die isotropen Gegenstücke der Darboux-Bewegungen. Sb. d. Oesterr. Akad. d. Wiss., 187: 289-296, (1978).

[16] H. WRESNIK. Bewegungen mit ebenen Bahnen im einfach-isotropen Raum-Teil II. Im. Druck