UDK 514.112.6
Izvorni znanstveni članak Prihvaćeno za tisak: 27.03.2005.

BEWEGUNGEN MIT EBENEN BAHNEN IM EINFACH ISOTROPEN RAUM – TEIL II

Helmut Wresnik (Graz)

O. Sei I_3^1 der einfach-isotrope Raum (siehe [2]) und B_k

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \overline{x} \\ \overline{y} \\ \overline{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ b & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ c & d & e & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{1}$$

ein k-dimensionaler Bewegungsvorgang. Ist nun $P: {}^t(x, y, z)$ ein Punkt des Gangraumes, der bei B_k in der Ebene

$$\varepsilon : u_0 + u_1\overline{x} + u_2\overline{y} + u_3\overline{z} = 0$$

des Rastraumes geführt wird[1], dann gilt, falls B_k die Identität enthält, die Bedingung

$au_1+bu_2+cu_3+d(u_3x)+e(u_3y)+\cos\varphi(u_1x+u_2y)+\sin\varphi(u_2x-u_1y)-(u_1x+u_2y)=0.$

Wir bilden nun sowohl die Bewegungen als auch die Flaggen, also inzidente Punkt-Ebenen-Paare des I_3^1 in einen jeweils 7-dimensionalen projektiven Raum B^7 bzw. F^7 vermöge

$${}^t(X^1 : X^2 : X^3 : X^4 : X^5 : X^6 : X^7 : X^8) = {}^t(a : b : c : d : e : \cos\varphi : \sin\varphi : 1)$$

und

$${}^t(Y^1 : Y^2 : Y^3 : Y^4 : Y^5 : Y^6 : Y^7 : Y^8) =$$
$${}^t(u1 : u2 : u3 : u3x : u3y : u_1x+u_2y : u_2x-u_1y : -(u_1x+u_2y)) \tag{2}$$

ab. Der Bilder der Bewegungken des I_3^1 liegen auf dem Hyperzylinder

$$\zeta : (X^6)^2+(X^7)^2-(X^8)^2=0$$

des B^7, die Bilder der Flaggen des einfach-isotropen Raumes auf der Fläche

$$\Phi : \begin{cases} H_6 : Y^6 + Y^8 = 0 \\ \Phi_1 : Y^1Y^4 + Y^2Y^5 - Y^3Y^6 = 0 \\ \Phi_2 : Y^1Y^5 - Y^2Y^4 + Y^3Y^7 = 0 \end{cases}$$

[1] Wie üblich denken wir uns den einfach-isotropen Raum in zwei Exemplaren, den Gang- und Rastraum, ausgeführt.

des F^7. Sie ist Teil der Hyperebene H_6 und daher kann man sich beim Studium von Φ und ihrer Schnitte mit linearen Räumen auf die Hyperebene H_6 beschränken. Weitere Eigenschaften vor Φ können in [4] nachgelesen werden.

Bemerkung 1 Wie die Parameterdarstellung (2) der Fläche Φ zeigt, spielen die z-Koordinate eines Punktes P und die u_0-Koordinate der Flaggenebene keine Rolle; d.h. Flaggen deren Punkte auf einer isotropen Geraden des I_3^1 liegen und deren Ebenen die selbe Stellung besitzen, haben den selben Bildpunkt auf Φ.

Das für die Punkte der beiden projektiven Räume B^7 und F^7 definierte innere Produkt

$$d(X,Y) := \sum_{i=1}^{8} X^i Y^i \tag{3}$$

besitzt für die Bilder von Flaggen und Bewegungen geometrische Bedeutung, da es für solche Paare genau dann verschwindet, wenn der zur Flagge gehörende Punkt bei der Bewegung in der Flaggenebene geführt wird.

Wie in [4] gezeigt wurde, findet man den zu einer Punktmenge $F \subset \Phi$ gehörenden maximalen Bewegungsvorgang, der die zu F gehörende Flaggenmenge respektiert, indem man zunächst in F^7 die lineare Hülle [F] von F bildet und dann das orthogonale Komplement B := $[F]^{-}$ bzgl. des inneren Produktes (3) mit dem Hyperzylinder ζ schneidet. Es genügt also für solche Fragestellungen die Schnitte der linearen Teilräume des F^7 mit Φ zu betrachten. Im ersten Teil [4] wurde dies für die 1- und 2-dimensionalen Teilräume bereits durchgeführt.

Ist F ein k-dimensionaler linearer Teilraum des F^7, dann entspricht ihm i.a. eine (5 – k)-parametrige Teilmenge von ζ; also ein (5 – k)-parametriger Bewegungsvorgang. Einzig jenen Teilräumen des F_7, die die Ausnahmsgerade $f \subset \Phi$ enthalten[2], entsprechen (6 – k)-parametrige Teilmenge von ζ.

Außerdem gehört zu linearen Teilräumen F des F^7, die mit der Ausnahmsgerade f genau einen Punkt gemeinsam haben, der selbe maximale Bewegungsvorgang wie zum Teilraum F + f. Im folgenden können wir also $f \cap F = 0$ oder $f \subset F$ voraussetzen.

Ist K eine Koordinatentransformation des I_3^1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \beta & \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ \gamma & \delta & \eta & 1 \end{pmatrix},$$

dann geht B_k in den zu B_k konjugierten Bewegungsvorgang KB_kK^{-1} über. Die zu B_k und KB_kK^{-1} gehörenden Elemente der Punkträume B^7 bzw. F^7 sind dann durch automorphe Kollineationen der Flächen ζ bzw. Φ miteinander gekoppelt.

[2] Die isotropen Flaggen des I_3^1, also die Flaggen mit isotroper Ebene, liegen allesamt im isotropen Ausnahmeraum $I_3 \subset \Phi$. Einzig die Punkte der in I_3 liegenden Ausnahmegeraden $f: t(0:0:0:0:0:t_1:t_2)$ sind keine Bilder von Flaggen.

Für das Weitere sind die dadurch in H_6 induzierten Hyperebenenabbildungen von Bedeutung für die in [4] die Darstellung

$$\begin{pmatrix} \overline{U_1} \\ \overline{U_2} \\ \overline{U_3} \\ \overline{U_4} \\ \overline{U_5} \\ \overline{U_6} \\ \overline{U_7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 & 0 & 0 & -\alpha & \beta \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 & 0 & 0 & -\beta & -\alpha \\ \delta & \eta & 1 & -\mathrm{A} & \mathrm{B} & E & F \\ 0 & 0 & 0 & \cos\psi & -\sin\psi & -C & -D \\ 0 & 0 & 0 & \sin\psi & \cos\psi & -D & C \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \end{pmatrix} \tag{4}$$

mit

$$\begin{gathered} A = \alpha \cos + \beta \sin \\ B = -\beta \cos \ + \alpha \sin \\ C = -\delta \cos \psi + \ \sin \psi \\ D = -\eta \cos \psi - \delta \sin \psi \\ E = -\delta \mathrm{A} + \eta \mathrm{B} \\ F = -\eta \mathrm{A} - \delta \mathrm{B} \end{gathered}$$

hergeleitet wurde.

Im ersten Teil [4] wurden bereits die den 1- und 2-dimensionalen Teilräumen entsprechenden maximalen Bewegungsvorgänge untersucht. Hier wollen wir uns nun den noch fehlenden Teilräumen, also den 3-, 4- und 5-dimensionalen Teilräumen des F^7 respektive H_6 (siehe Anmerkungen zu Φ weiter oben) widmen, wobei unter den 5-dimensionalen nur jene betrachtet werden müssen, die f enthalten.

Besonderes Augenmerk wollen wir dabei auf die echten Darboux-Bewegungen des einfach isotropen Raumes legen. Diese wurden bereits von J. TÖLKE in [3] untersucht, doch wird in 5 gezeigt, daß dabei eine zweiparametrige Darbouxbewegung nicht gefunden wurde.

1. Sei also F_3 ein 3-dimensionaler Teilraum des H_6. Jeder solche kann als Schnitt dreier Hyperebenen H_i, i = 1, 2, 3 dargestellt werden:

$$\begin{aligned} H_1 &: U_1Y^1 + U_2Y^2 + U_3Y^3 + U_4Y^4 + U_5Y^5 + U_6Y^6 + U_7Y^7 = 0 \\ H_2 &: V_1Y^1 + V_2Y^2 + V_3Y^3 + V_4Y^4 + V_5Y^5 + V_6Y^6 + V_7Y^7 = 0 \\ H_3 &: W_1Y^1 + W_2Y^2 + W_3Y^3 + W_4Y^4 + W_5Y^5 + W_6Y^6 + W_7Y^7 = 0 \end{aligned}$$

Bevor wir die einzelnen Fälle diskutieren, wollen wir einige für das weitere nützliche Überlegungen anstellen.

Setzt man die Parameterdarstellung (2) der Fläche Φ in die Hyperebenen ein und ordnet nach den Ebenenkoordinaten $(u_1 : u_2 : u_3)$ der Flaggenebene, so erhält man das lineare homogene.

Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} U_1+U_6x-U_7y & U_2+U_7x+U_6y & U_3+U_4x+U_5y \\ V_1+V_6x-V_7y & V_2+V_7x+V_6y & V_3+V_4x+V_5y \\ W_1+W_6x-W_7y & W_2+W_7x+W_6y & W_3+W_4x+W_5y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}=0. \tag{5}$$

Es läßt sich wie folgt interpretieren:

Setzt man für x und y die ersten beiden Koordinaten eines Punktes P des einfach-isotropen Raumes I_3^1 ein, so wird er bei dem mittels des inneren Produktes (3) aus F_3 gewonnenen Bewegungsvorgang genau dann in einer Ebene der Stellung ($u_1 : u_2 : u_3$) bewegt, wenn der Rang des Gleichungssystems (5) kleiner als 3 ist.

Die Lösungen des Systems (5) liefern dann wegen Bem. 1 die Bahnebenen der Punkte der isotropen Geraden $^t(x, y, z)$. Dabei gilt genauer:

- Ist der Rang von (5) gleich 2, so besitzt das System genau eine Lösung und jeder Punkt der durch P gehenden isotropen Geraden läuft in einer Ebene der Stellung ($u_1 : u_2 : u_3$).
- Ist der Rang von (5) gleich 1, so besitzt das System ∞^1 Lösungen und jeder Punkt der durch P gehenden isotropen Geraden läuft in einem Büschel von Ebenen, ist also geradläufig. Der Teilraum F_3 enthält in diesem Fall eine Gerade vom Typ 1 von Φ.
- Ist der Rang von (5) gleich 0, so besitzt das System ∞^2 Lösungen, d.h. jede Ebenenstellung erfüllt das Gleichungssystem und die durch P gehende isotrope Gerade ist Fixpunktsgerade. Der Teilraum F_3 enthält in diesem Fall eine Ebene vom Typ 1 von Φ.

Punkte mit ebenen Bahnen können somit nur solche sein, für deren Koordinaten die Matrix des Gleichungssystems (5), wir wollen sie im weiteren als *erste Flaggenmatrix des* Bewegungsvorganges bezeichnen, singulär ist. Da die Koordinaten des Punktes *P* nur linear in die Komponenten der Flaggenmatrix eingehen, haben wir

Satz 1 *Bei dem zu einem 3-dimensionalen Unterraum F_3 des F^7 gehörenden Bewegungsvorgang werden im allgemeinen die Punkte eines Zylinders dritter Ordnung mit isotroper Erzeugendenrichtung in Ebenen geführt.*

Man kann das Gleichungssystem (5) aber auch anders interpretieren. Hält man nämlich die Koordinaten ($u_1 : u_2 : u_3$) der Ebenenstellung fest und läßt die Koordinaten des Punktes *P* variabel - wir verwenden projektive Punktkoordinaten -, dann ist das homogene Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} u_1U_1+u_2U_2+u_3U_3 & u_1U_6+u_2U_7+u_3U_4 & -u_1U_7+u_2U_6+u_3U_5 \\ u_1V_1+u_2V_2+u_3V_3 & u_1V_6+u_2V_7+u_3V_4 & -u_1V_7+u_2V_6+u_3V_5 \\ u_1W_1+u_2W_2+u_3W_3 & u_1W_6+u_2W_7+u_3W_4 & -u_1W_7+u_2W_6+u_3W_5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}=0 \tag{6}$$

genau dann nichttrivial lösbar - wir wollen seine Matrix als *zweite Flaggenmatrix* des Bewegungsvorganges bezeichnen -, wenn es einen Punkt *P* gibt, der bei dem zu F_3 gehörenden Bewegungsvorgang in einer Ebene der gegebenen Stellung läuft. Notwendig und hinreichend für die (nicht unbedingt eindeutige) Lösbarkeit von (6) ist aber, daß sein Rang kleiner als 3 ist. Genauer gilt:

- Ist der Rang von (6) gleich 2, so gibt es genau eine Lösung und die Punkte der isotropen Geraden ${}^t(x, y, z)$ laufen in Ebenen der gegeben Stellung.
- Ist der Rang von (6) gleich 1, so gibt es ∞^1 Lösungen und die Punkte einer isotropen Ebene laufen in Ebenen der gegebenen Stellung. Der Teilraum F_3 enthält in diesem Fall eine Gerade vom Typ 2 von Φ.
- Ist der Rang von (6) gleich 0, so sind alle Paare (x, y) Lösungen und alle Punkte des einfach-isotropen Raumes laufen in Ebenen der gegebenen Stellung. Es liegt also eine unechte Darbouxbewegung vor. Der Teilraum F_3 enthält in diesem Fall eine Ebene vom Typ 2 von Φ.

Wir werden die zweite Flaggenmatrix vor allem dazu benutzen, um unechte Darbouxbewegangen zu erkennen.

Gemäß der Überlegungen aus [4], siehe auch den einführenden Abschnitt, haben wir nun zwei Fälle zu unterscheiden:

Fall I: Gilt $f \cap F_3 = 0$, dann liegen in dem von F_3 aufgespannten Hyperebenenbüschel auch die folgenden drei Hyperebenen[3]

$$
\begin{aligned}
H_1 &: U_1Y^1 + U_2Y^2 + U_3Y^3 + U_4Y^4 + U_5Y^5 + Y^7 = 0 \\
H_2 &: V_1Y^1 + V_2Y^2 + V_3Y^3 + V_4Y^4 + V_5Y^5 + Y^6 = 0 \\
H_3 &: W_1Y^1 + W_2Y^2 + W_3Y^3 + W_4Y^4 + W_5Y^5 = 0.
\end{aligned}
$$

A: Ist $W_1^2 + W_2^2 \neq 0$, dann kann durch eine geeignete Transformation (4)

$$(W_1 : W_2 : W_3) = (0 : 1 : 0) \text{ und } U_1 = V_1 = 0$$

erreicht werden.[4]

Somit liegen im Büschel um F_3 auch die Hyperebenen

$$
\begin{aligned}
H_1 &: U_3Y^3 + U_4Y^4 + U_5Y^5 + Y^7 = 0 \\
H_2 &: V_3Y^3 + V_4Y^4 + V_5Y^5 + Y^6 = 0 \\
H_3 &: Y_2 + W_4Y^4 + W_5Y^5 = 0.
\end{aligned}
$$

und der Teilraum F3 wird von den Punkten

$$
\begin{aligned}
F_1 &: {}^t(1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0) \\
F_2 &: {}^t(0 : 0 : 1 : 0 : 0 : -V_3 : -U_3) \\
F_3 &: {}^t(0 : -W_4 : 0 : 1 : 0 : -V_4 : -U_4) \\
F_4 &: {}^t(0 : -W_5 : 0 : 0 : 1 : -V_5 : -U_5)
\end{aligned}
$$

[3] Wir bezeichnen diese wiederum mit H_i, $i = 1, 2, 3$.

[4] Durch geeignete Wahl von ψ bzw. β und η in (4) ist $W_1 = W_3 = 0$ und durch geeignete Wahl von α bzw. β ist $U_1 = 0$ bzw. $V_1 = 0$ möglich.

aufgespannt. Aus diesen gewinnt man nun mittels des inneren Produktes (3) zunächst die Hyperebenen

$$X^1 = 0$$
$$X^3 - V^3(X^6 - X^8) - U_3X^7 = 0$$
$$-W_4X^2 + X^4 - V_4(X^6-X^8) - U_4X^7 = 0$$
$$-W_5X^2 + X_5 - V_5(X^6-X^8) - U_5X^7 = 0$$

und im Schnitt mit ζ schließlich den 2-parametrigen Bewegungsvorgang

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ t & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ V_3(\cos\varphi - 1) + U_3\sin\varphi & \alpha_{31}(t,\varphi) & \alpha_{32}(t,\varphi) & 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

wobei $\alpha_{3i}(t, \varphi) = W_{i+3}t + V_{i+3}(\cos\varphi - 1) + U_{i+3}\sin\varphi$, $i = 1, 2$ gesetzt wurde. Als seine Flaggenmatrizen ergeben sich:

$$\begin{pmatrix} -y & x & U_3 + U_4x + U_5y \\ x & y & V_3 + V_4x + V_5y \\ 0 & 1 & W_3 + W_4x + W_5y \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} u_3U_3 & u_2 + u_3U_4 & -u_1 + u_3U_5 \\ u_3V_3 & u_1 + u_3V_4 & u_2 + u_3V_5 \\ u_2 & u_3W_4 & u_3W_5 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Bemerkung 2 Die Determinante der ersten Flaggenmatrix (8) liefert

$$\Phi_3 : (x^2 + y^2)(W_4x + W_5y) - (U_4x^2 + (U^5 + V_4)xy + V_5y^2 + U_3x + V_3y) = 0. \tag{9}$$

(9) stellt den in Satz 1 angesprochenen Zylinder dritter Ordnung Φ_3 mit isotroper Erzeugendenrichtung dar. Die Stellung der Bahnebene eines Punktes von Φ_3 berechnet sich zu

$$(u_1 : u_2 : u_3) = (U_3 + U_4x + U_5y - W_4x^2 - W_5xy : -y(W_4x + W_5y) : y)$$

mit der Nebenbedingung (9). Genau die Punkte der Erzeugenden $^t(0, 0, z)$ von Φ_3 besitzen isotrope Bahnebenen der Stellung (1 : 0 : 0).

Gilt nun $W_4^2 + W_5^2 = 0$, dann degeneriert Φ_3 in einen Zylinder 2. Ordnung Φ_2

$$\Phi_2 : U_4x^2 + (U_5 + V_4)xy + V_5y^2 + U_3x + V_3y = 0)$$

mit isotropen Erzeugenden. Für die Stellung der Bahnebene eines Punktes von Φ_2 findet man nach kurzer Rechnung

$$(u_1 : u_2 : u_3) = (U_3 + U_4x + U_5y : 0 : y)$$

mit der Nebenbedingung (10). Genau die Punkte der Erzeugenden ${}^t(0, 0, z)$ von Φ_2 besitzen isotrope Bahnebenen der Stellung (1 : 0 : 0).

Gilt neben $W_4^2 + W_5^2 = 0$ noch $U_4 = U_5 + V_4 = V_5 = 0$, so degeneriert der Zylinder Φ_2 in die isotrope Ebene

$$\Phi_1 : U_3 x + V_3 y = 0$$

und ihre Punkte besitzen Bahnebenen der Stellung

$$(u_1 : u_2 : u_3) = (U_3 + U_5 y : 0 : y)$$

mit der Nebenbedingung (11). Genau die Punkte der isotropen Geraden ${}^t(0, 0, z)$ besitzen isotrope Bahnebenen der Stellung (1 : 0 : 0).

Bemerkung 3 Wie die erste Flaggenmatrix (8) zeigt, siehe auch die allgemeinen Uberlegungen zu Beginn dieses Abschnitts, gibt es keine Fixpunkte und nur für $U_3 = V_3 = 0$ sind die Punkte der isotropen Geraden ${}^t(0, 0, z)$ geradläufig mit der Richtung ${}^t(0 : 1 : 0)$.

Bemerkung 4 Unechte Darbouxbewegungen liegen nach den einführenden Bemerkungen genau dann vor, wenn die zweite Flaggenmatrix (8) den Rang 0 besitzt. Das hat sofort $u_2 = 0$ zur Folge. Wäre nun auch $u_3 = 0$, dann müßte dies auch für u_1 gelten, was aber keine Ebenenstellung kennzeichnet. Also muß

$$U_3 = U_4 = V_3 = V_5 = W_4 = W_5 = 0 \text{ und } V_4 = -U_5$$

sein und die zugehörige Ebenenstellung berechnet sich zu $(U_5 : 0 : 1)$.

B: Gilt $W_1^2 + W_2^2 = 0$, so kann man durch geeignete Wahl von ψ bzw. δ und η in der Transformationsmatrix (4) stets $W_5 = 0$ bzw. $U_5 = V_5 = 0$ erreichen. Werden desweiteren

$$\alpha = \frac{U_2 + V_1}{2}\cos\varphi + \frac{U_1 - V_2}{2}\sin\varphi \quad \text{und} \quad \beta = \frac{U_1 - V_2}{2}\cos\varphi + \frac{U_2 + V_1}{2}\sin\varphi$$

gewählt, so ist auch noch $U_1 = V_2$ und $U_2 = -V_1$ möglich. Im allgemeinen wird nach der Transformation $W_3 \neq 0$ gelten, weshalb wir von den Hyperebenen

$$\begin{aligned} &H_1 : U_1 Y^1 + U_2 Y^2 + U_4 Y^4 + Y^7 = 0 \\ &H_2 : -U_2 Y^1 + U_1 Y^2 + V_4 Y^4 + Y^6 = 0 \\ &H_3 : Y^3 + W_4 Y^4 = 0, \end{aligned}$$

ausgehen können. Nur wenn

$$2W_3 - (U_2 + V_1)W_4 + (U_1 - V_2)W_5 = 0$$

gilt, wird nach der Transformation $W_3 = 0$ sein; die Hyperebene H_3 also die Gestalt $Y_4 = 0$ besitzen. Diese Ausnahme wollen wir im Anschluß diskutieren.

Im allgemeinen Fall wird somit der Schnittraum von den Punkten

$$\begin{aligned}&F_1 : {}^t(1 : 0 : 0 : 0 : 0 : U_2 : \text{-}U_1)\\ &F_2 : {}^t(0 : 1 : 0 : 0 : 0 : \text{-}U_1 : \text{-}U_2)\\ &F_3 : {}^t(0 : 0 : \text{-}W_4 : 1 : 0 : \text{-}V_4 : \text{-}U_4)\\ &F_4 : {}^t(0 : 0 : 0 : 0 : 1 : 0 : 0),\end{aligned}$$

aufgespannt. Aus diesen erhalten wir nun mittels des inneren Produktes (3) die Hyperebenen

$$\begin{aligned}&X^1 + U_2(X^6 - X^8) - U_1X^7 = 0\\ &X^2 - U_1(X^6 - X^8) - U_2X^7 = 0\\ &-W_4X^3 + X^4 - V_4\,(X^6 - X^8) - U_4X^7 = 0\\ &X^5 = 0\end{aligned}$$

und im Schnitt mit ζ ergibt sich schließlich der 2-parametrige Bewegungsvorgang

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ -U_2(\cos\varphi-1)+U_1\sin\varphi & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ U_1(\cos\varphi-1)+U_2\sin\varphi & \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ t & W_4t+V_4(\cos\varphi-1)+U_4\sin\varphi & 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{12}$$

Seine Flaggenmatrizen berechnen sich zu

$$\begin{pmatrix} U_1-y & U_2+x & U_4x\\ -U_2+x & U_1+y & U_4x\\ 0 & 0 & 1+W_4x\end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} u_1U_1+u_2U_2 & u_2+u_3U_4 & -u_1\\ -u_1U_2+u_2U_1 & u_1+u_3V_4 & u_2\\ u_3 & u_3W_4 & 0\end{pmatrix}.$$

Bemerkung 5 Die Determinante der ersten Flaggenmatrix liefert

$$[x^2 + y^2 - (U_1^2 + U_2^2)]\,(1 + W_4x) = 0.$$

Der Zylinder dritter Ordnung aus Satz 1 zerfällt somit in einen (euklidischen) Kreiszylinder und eine isotrope Ebene. Für $U_1^2+U_2^2=0$ zerfällt auch der Kreiszylinder und zwar in das Minimalebenenpaar durch die z-Achse.

Bemerkung 6 Die Grundrißbewegung des obigen Bewegungvorganges ist für $U_1^2+U_2^2 \neq 0$ eine Ellipsenbewegung mit dem in der Ebene $z = 0$ liegenden Leitkreis des Kreiszylinders als Gangpolkurve, während für $U_1^2+U_2^2=0$ eine Drehung vorliegt.

Die Punkte des Kreiszylinders sind genau die Punkte mit isotroper Bahnebene. Die Bahnebenen des mittels des Polarwinkels Θ parametrisierten Kreiszylinders besitzen die Darstellung

$$
\begin{aligned}
u_0 &= U_1^2 + U_2^2 - \sqrt{U_1^2 + U_2^2}\,(U_1 \sin\Theta - U_2 \cos\Theta)\\
u_1 &= U_2 + \sqrt{U_1^2 + U_2^2}\,\cos\Theta\\
u_2 &= -U_1 + \sqrt{U_1^2 + U_2^2}\,\sin\Theta\\
u_3 &= 0
\end{aligned}
$$

und gehören einem Büschel an, dessen Achse eine Erzeugende des Kreiszylinders ist. Für $U_1^2 + U_2^2 = 0$ wird die z-Achse in sich übergeführt.

Ist $W_4 \neq 0$, dann berechnen sich die Bahnebenen der Punkte der isotropen Ebene $1 + W_4 x = 0$ zu

$$
\begin{aligned}
u_o = {} & V_4\,[1 - W_4\,(U_2 + yW_4\,(U_1 - y))] + \\
& + W_4\,[U_1U_4 + z\,(1 - W_4^2\,(U_1^2 + U_2^2)) - yW_4\,(U_2U_4 - yzW_4)]\\
u_1 = {} & -W_4\,[U_4 W_4\,(y + U_1) + V_4\,(1 - U_2W_4]\\
u_2 = {} & W_4\,[V_4 W_4\,(y - U_1) - U_4\,(1 + U_2W_4)]\\
u_3 = {} & W_4\,[1 + (y_2 - U_1^2 + U_2^2)\,W_4^2].
\end{aligned}
$$

Wie die Bewegungsmatrix (12) zeigt, sind die Bahnkurven der Punkte dieser Ebene i.a. Ellipsen.

Bemerkung 7 Wie die erste Flaggenmatrix zeigt, besitzt der Bewegungsvorgang keine Fixpunkte und nur für $U_1^2 + U_2^2 = 0$ gibt es geradläufige Punkte, da in diesem Fall die isotrope Gerade ${}^t(0, 0, z)$ in sich abgebildet wird.

Bemerkung 8 Eine Untersuchung der zweiten Flaggenmatrix zeigt, daß es keine unechten Darbouxbewegungen gibt, da die zweite Flaggenmatrix nur für $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ den Rang 0 besitzt.

Bemerkung 9 Der Zylinder Φ_3 im Fall **A** kann bei geeigneter Wahl der Größen U_i, V_i und W_i ebenfalls in einen (euklidischen) Kreiszylinder und in eine isotrope Ebene zerfallen. Dort allerdings ist die Grundrißbewegung zweiparametrig und daher keine Ellispenbewegung.

Nun wollen wir noch den oben ausgeschlossenen Fall betrachten, für den

$$2W_3 - (U_2 + V_1)\,W_4 + (U_1 - V_2)\,W_5 = 0$$

gilt. Dann ist W_3 nach der Transformation Null und für H_3 ergibt sich die Darstellung $Y^4 = 0$. Als Bewegungsvorgang erhält man daher

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0\\
-U_2(\cos\varphi - 1) + U_1 \sin\varphi & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\
U_1(\cos\varphi - 1) + U_2 \sin\varphi & \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\
V_3(\cos\varphi - 1) + U_3 & t & 0 & 1
\end{pmatrix}
\tag{13}
$$

mit den zu oben analogen Bemerkungen.

Zusammenfassend haben wir

Satz 2 *Zu 3-dimensionalen Teilräumen F_3 des F^7, die zur Ausnahmegeraden f windschief liegen, gehören zwei Typen von 2-parametrigen Bewgungsvorgängen (7) bzw. (12) und (13) mit ebenen Bahnen. Dabei werden i.a. die Punkte eines Zylinders 3. Ordnung in ebenen Bahnen geführt, wobei für Bewegungen (12) und (13) der Zylinder 3. Ordnung in einen Kreiszylinder und eine isotrope Ebene zerfällt.*

Fall II: Wir betrachten nun 3-dimensionale Teilräume F_3, für die $f \subset F_3$ gilt. Dann kann F_3 als Schnitt der drei Hyperebenen

$$\begin{aligned} &H_1 : U_1Y^1 + U_2Y^2 + U_3Y^3 + U_4Y^4 + U_5Y^5 = 0\\ &H_2 : V_1Y^1 + V_2Y^2 + V_3Y^3 + V_4Y^4 + V_5Y^5 = 0\\ &H_3 : W_1Y^1 + W_2Y^2 + W_3Y^3 + W_4Y^4 + W_5Y^5 = 0 \end{aligned}$$

dargestellt werden. Nun sind mehrere Unterfälle zu behandeln:

A: Gilt $U_1^2 + V_1^2 + W_1^2 \neq 0$, dann liegen im Büschel um F_3 o.B.d.A. Hyperebenen H_2 und H_3 mit $V_1 = W_1 = 0$.

A1: Ist auch $V_2^2 + W_2^2 \neq 0$, dann gibt es um F_3 o.B.d.A. auch eine Hyperebene mit $W_2 = 0$. d.h. wir haben:

$$\begin{aligned} &H_1 : Y^1 + U_3Y^3 + U_4Y^4 + U_5Y^5 = 0\\ &H_2 : Y^2 + V_3Y^3 + V_4Y^4 + V_5Y^5 = 0\\ &H_3 : W_3Y^3 + W_4Y^4 + W_5Y^5 = 0. \end{aligned}$$

Wir können nun o.B.d.A. $W_3 \neq 0$ und $W_5 = 0$ annehmen[5], sodaß im Büschel um F_3 stets die Hyperebenen

$$\begin{aligned} &H_1 : Y^1 + U_4Y^4 + U_5Y^5 = 0\\ &H_2 : Y^2 + V_4Y^4 + V_5Y^5 = 0\\ &H_3 : Y^3 + W_4Y^4 = 0, \end{aligned}$$

liegen, aus denen man mittels des inneren Produktes (3) den 3-parametrigen Bewegungsvorgang

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ t_1 & 1 & 0 & 0\\ t_2 & 0 & 1 & 0\\ t_3 & U_4t_1 + V_4t_2 + W_4t_3 & U_5t_1 + V_5t_2 & 1 \end{pmatrix} \tag{14}$$

[5] Durch geeignete Wahl des Drehwinkels ψ in (4) kann stets $W_5 = 0$ erreicht werden. Und gilt $W_3 = 0$ - in diesem Fall muß $W_4^2 + W_5^2 \neq 0$ sein -, kann man α und β so wählen, daß $W_3 \neq 0$ wird.

mit den Flaggenmatrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & U_4x+U_5y \\ 0 & 1 & V_4x+V_5y \\ 0 & 0 & 1+W_4x \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} u_1 & u_3U_4 & u_3U_5 \\ u_2 & u_3V_4 & u_3V_5 \\ u_3 & u_3W_4 & 0 \end{pmatrix}$$

erhält.

Bemerkung 10 Bei obigem Bewegungsvorgang werden für $W_4 \neq 0$ die Punkte der isotropen Ebene $\sigma : 1 + W_4x = 0$ in Ebenen

$$(-U_4 + y\mathrm{W}_4\,(U_5 + V_4 - yV_5W_4) + zW_4^2) : W_4\,(U_4 - yU_5W_4) : W_4\,(V_4 - \mathrm{y}V_5W_4) : W_4^2)$$

geführt. Genau für $U_5^2 + V_5^2 = 0$ ist die Ebenenstellung für alle Punkte von σ die selbe. F_3 hat in diesem Fall mit Φ also eine Gerade vom Typ 2 gemeinsam.

Ist aber $W_4 = 0$, dann gibt es keine Punkte mit ebenen Bahnen.

Bemerkung 11 Es gibt keine unechten Darbouxbewegungen, da die zweite Flaggenmatrix nur dann den Rang 0 besitzt, wenn $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ ist.

A2: Gilt aber $V_2^2 + W_2^2 = 0$ und $V_3^2 + W_3^2 \neq 0$, dann liegt im Büschel um F_3 o.B.d.A. auch eine Hyperebene mit $W_3 = 0$.

Wegen $(U_1 : U_2) \neq (0 : 0)$ kann nun in (4) durch geeignete Wahl von ψ $U_2 = 0$ erzwungen werden und i.a. wird nach der Transformation $W_4 \neq 0$ sein, sodaß im Büschel um F_3 auch die Hyperebenen

$$\begin{aligned} &H_1 : Y^1 + U_5Y^5 = 0 \\ &H_2 : Y^3 + V_5Y^5 = 0 \\ &H_3 : Y^4 = 0 \end{aligned}$$

liegen. Einzig für $U_1\, W_4 + U_2\, W_5 = 0$ wird nach der Transformation $W_4 = 0$ und damit $W_5 \neq 0$ gelten, was wir im Anschluß behandeln.

Mittels des inneren Produktes (3) folgt nun der 3-parametrige Bewegungsvorgang

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ t_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ t_2 & t_3 & U_5t_1+V_5t_2 & 1 \end{pmatrix} \tag{15}$$

mit den Flaggenmatrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & U_5y \\ 0 & 0 & 1+V_5y \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} u_1 & 0 & u_3U_5 \\ u_3 & 0 & u_3V_5 \\ 0 & u_3 & 0 \end{pmatrix}$$

Bemerkung 12 Wie die zweite Flaggenmatrix zeigt, liegt eine unechte Darbouxbewegung vor, bei der alle Punkte des I_3^1 in Bahnebenen der Stellung (0 : 1 : 0) geführt werden. Für $V_5 \neq 0$ sind die Punkte der isotropen Geraden ${}^t\left(0, -\frac{1}{\sqrt{5}}, z\right)$ - sie gehört zum Schnittpunkt der beiden Geraden $1 + V_5\, y = x = 0$ - sogar geradläufig mit der Richtung ${}^t(V_5 : 0 : -U_5)$.

Ist aber $W_4 + U_2\, W_5 = 0$, dann erhält man den 3-parametrigen Bewegungsvorgang

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ t_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ t_2 & U_4 t_1 + V_4 t_2 & t_3 & 1 \end{pmatrix} \tag{16}$$

für den die analogen Bemerkungen gelten.

A3: Ist endlich $V_2^2 + W_2^2 = V_3^2 + W_3^2 = 0$, aber $V_4^2 + W_4^2 \neq 0$, dann kann durch eine geeignete Transformation (4) $V_3, W_4 \neq 0$ erreicht werden, ohne die Gestalt von H_1 zu ändern. Dies wurde aber bereits im Fall **A2** behandelt.

B: Für $U_1^2 + V_1^2 + W_1^2 = 0$ und $U_2^2 + V_2^2 + W_2^2 \neq 0$ kann o.B.d.A. $U_2 \neq 0$ angenommen werden. Durch eine geeignete Transformation (4) ist dann aber $U_1 \neq 0$ möglich, sodaß wir die Bedingungen des Falles **A** vorliegen haben.

C: Gilt schließlich $U_1^2 + V_1^2 + W_1^2 = U_2^2 + V_2^2 + W_2^2 = 0$, aber $U_3^2 + V_3^2 + W_3^2 \neq 0$, dann liegen im Büschel um F_3 o.B.d.A. auch Hyperebenen H_2 und H_3 mit $V_3 = W_3 = 0$.

Also muß $V_4\, W_5 - V_5 W_4 \neq 0$ gelten, weshalb man um F_3 auch die Hyperebenen

$$\begin{aligned} H_1 &: Y^3 = 0 \\ H_2 &: Y^4 = 0 \\ H_3 &: Y^5 = 0 \end{aligned}$$

findet. Daraus folgt der 3-parametrige Bewegungsvorgang

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ t_1 & t_2 & t_3 & 1 \end{pmatrix}, \tag{17}$$

der alle isotropen Geraden in sich überführt.

Fassen wir zusammen, so haben wir

Satz 3 *Zu 3-dimensionalen Teilräumen F_3 des F^7, die die Ausnahmegerade f enthalten, gibt* es *drei Typen von 3-parametrigen Bewegungsvorgängen (14) bzw. (15), (16) bzw. (17)*

mit ebenen Bahnen. Bei den Bewegungsvorgängen (14) werden i.a. die Punkte einer isotropen Ebene in Ebenen geführt, Bewegungsvorgänge (15) und (16) sind unechte Darbouxbewegungen und bei Bewegungsvorgängen (17) werden alle isotropen Geraden des I_3^1 in sich bewegt.

3. Wir wollen nun 4-dimensionale Teilräume F_4 des F^7 betrachten und die ihnen vermöge des inneren Produktes (3) zugeordneten Bewegungsvorgänge suchen. Die den Gleichungssystemen (5) und (6) aus 2 entsprechenden Gleichungssysteme lauten:

$$\begin{pmatrix} U_1+U_6x-U_7y & U_2+U_7x-U_6y & U_3+U_4x+U_5y \\ V_1+V_6x-V_7y & V_2+V_7x-V_6y & V_3+V_4x+V_5y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}=0.$$

und

$$\begin{pmatrix} u_1U_1+u_2U_2+u_3U_3 & u_1U_6+u_2U_7+u_3U_4 & -u_1U_7+u_2U_6+u_3U_5 \\ u_1V_1+u_2V_2+u_3V_3 & u_1V_6+u_2V_7+u_3V_4 & -u_1V_7+u_2V_6+u_3V_5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}=0.$$

Sie sind beide i.a. eindeutig lösbar, d.h. bei dem dem Teilraum F_4 entsprechenden Bewegungsvorgang wird jeder Punkt des I_3^1 in einer Ebene geführt. Im Speziellen kann er auch geradläufig oder ein Fixpunkt sein.

Umgekehrt gibt es zu jeder Ebene e i.a. einen eindeutig bestimmten Punkt des I_3^1, dessen Bahn in ε liegt. Die Bewegungsvorgänge dieses Abschnittes sind also allesamt (unechte) Darbouxbewegungen.

Fall I: Zunächst studieren wir jene Teilräume F_4, für die $f \cap F_4 = 0$ gilt. Sie können als der Schnitt zweier Hyperebenen

$$\begin{aligned} H_1 &: U_1Y^1 + U_2Y^2 + U_3Y^3 + U_4Y^4 + U_5Y^5 + Y^7 = 0 \\ H_2 &: V_1Y^1 + V_2Y^2 + V_3Y^3 + V_4Y^4 + V_5Y^5 + Y^6 = 0 \end{aligned}$$

dargestellt und durch eine Transformation (4) auf die Gestalt

$$\begin{aligned} H_1 &: U_3Y^3 + Y^7 = 0 \\ H_2 &: V_2Y^2 + V_3Y^3 + V_4Y^4 + V_5Y^5 + Y^6 = 0. \end{aligned}$$

gebracht werden.[6] Daher wird der Teilraum F_4 von den folgenden Punkten

$$\begin{aligned} F_1 &: {}^t(1:0:0:0:0:0:0) \\ F_2 &: {}^t(0:1:0:0:0:-V_2:0) \\ F_3 &: {}^t(0:0:1:0:0:-V_3:-U_3) \\ F_4 &: {}^t(0:0:0:1:0:-V_4:0) \\ F_5 &: {}^t(0:0:0:0:1:-V_5:0) \end{aligned}$$

[6] Durch geeignete Wahl von α und β bzw. γ und δ bzw. ψ erreicht man $U_1 = U_2 = 0$ bzw. $U_4 = U_5 = 0$ bzw. $V_1 = 0$.

aufgespannt, die mittels des inneren Produktes (3) die Hyperebenen

$$
\begin{aligned}
&X^1 = 0\\
&X^2 - V_2\,(X^6 - X^8) = 0\\
&X^3 - V_3\,(X^6 - X^8) - U_3X^7 = 0\\
&X^4 - V_4\,(X^6 - X^8) = 0\\
&X^5 - V_5\,(X^6 - X^8) = 0
\end{aligned}
$$

im B^7 liefern. Schneidet man diese mit dem Hyperzylinder ζ, so ergibt sich der 1-parametrige Bewegungsvorgang

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0\\
0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\
V_2(\cos\varphi-1) & \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\
V_3(\cos\varphi-1)+U_3\sin\varphi & V_4(\cos\varphi-1) & V_5(\cos\varphi-1) & 1
\end{pmatrix}
\tag{18}
$$

mit den Flaggenmatrizen

$$
\begin{pmatrix}
-y & x & U_3\\
x & V_2+y & V_3+V_4x+V_5y
\end{pmatrix}
\ und\
\begin{pmatrix}
u_3U_3 & u_2 & -u_1\\
u_2V_2+u_3V_3 & u_1+u_3V_4 & u_2+u_3V_5
\end{pmatrix}.
$$

Es liegt eine i.a. echte Darbouxbewegung vor, die wir später noch genauer studieren wollen (siehe 5). Also haben wir

Satz 4 *Zu 4-dimensionalen Teilräumen F_4 des F^7, die zur Ausnahmegeraden f windschief liegen, gehört der 1-parametrige Bewegungsvorgang (18), der eine i.a. echte Darbouxbewegung darstellt und in 5 noch genauer untersucht werden wird.*

Fall II: Wir betrachten nun jene 4-dimensionalen Teilräume F_4, für die $f \subset F_4$ gilt. Dann kann F_4 als Schnitt der beiden Hyperebenen

$$
\begin{aligned}
&H_1 : U_1Y^1 + U_2Y^2 + U_3Y^3 + U_4Y^4 + U_5Y^5 = 0\\
&H_2 : V_1Y^1 + V_2Y^2 + V_3Y^3 + V_4Y^4 + V_5Y^5 = 0
\end{aligned}
$$

dargestellt werden. Es sind mehrere Unterfälle zu behandeln:

A: Ist $U_1V_2 - U_2V_1 \neq 0$, dann gilt $U_1^2 + U_2^2 \neq 0$, und man kann durch eine geeignete Transformation (4) $(U_1 : U_2 : U_3) = (0 : 1 : 0)$ und $V_3 = 0$ erreichen.[7] Man hat daher die Hyperebenen

$$
\begin{aligned}
&H_1 : Y^2 + U_4Y^4 + U_5Y^5 = 0\\
&H_2 : Y^1 + V_4Y^4 + V_5Y^5 = 0
\end{aligned}
$$

und erhält daraus nach kurzer Rechnung den 2-parametrigen Bewegungsvorgang

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ t_1 & 1 & 0 & 0 \\ t_2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & V_4 t_1 + U_4 t_2 & V_5 t_1 + U_5 t_2 & 1 \end{pmatrix} \tag{19}$$

zu dem die Flaggenmatrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & U_4 x + U_5 y \\ 1 & V_2 & V_4 x + V_5 y \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} u_2 & u_3 U_4 & u_3 U_5 \\ u_1 & u_3 V_4 & u_3 V_5 \end{pmatrix}$$

gehören. Es handelt sich auch hier um eine i.a. echte Darbouxbewegung, der wir uns später (siehe 5) noch ausführlicher widmen werden.

B: Ist aber $U_1V_2 - U_2V_1 = 0$; dann liegt im Büschel um den Teilraum F_4 auch die Hyperebene $H_2 : V_3Y^3 + V_4Y^4 + V_5Y^5 = 0$.

B1: Gilt nun $U_1^2 + U_2^2 \neq 0$, dann ist durch eine Transformation (4) $(U_1 : U_2 : U_3) = (0 : 1 : 0)$ möglich, da durch geeignete Wahl von ψ bzw. δ und η $U_1 = 0$ bzw. $U_3 = 0$ erreicht wird.

Ist außerdem $V_3 = 0$, dann muß $V_4^2 + V_5^2 \neq 0$ sein und durch geeignete Wahl der noch freien. Größen α und β in der soeben angesprochenen Transformation (4) kann noch $V_3 \neq 0$ erreicht werden, sodaß wir immer von den Hyperebenen

$$H_1 : Y^2 + U_4Y^4 + U_5Y^5 = 0$$
$$H_2 : Y^3 + V_4Y^4 + V_5Y^5 = 0$$

ausgehen können. Diese liefern den 2-parametrigen Bewegungsvorgang

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ t_1 & 0 & 1 & 0 \\ t_2 & U_4 t_1 + V_4 t_2 & U_5 t_1 + V_5 t_2 & 1 \end{pmatrix} \tag{20}$$

mit den Flaggenmatrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & U_4 x + U_5 y \\ 0 & 0 & 1 + V_4 x + V_5 y \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} u_2 & u_3 U_4 & u_3 U_5 \\ u_3 & u_3 V_4 & u_3 V_5 \end{pmatrix}.$$

Die zweite Flaggenmatrix zeigt sofort

[7] Zunächst wird mittels einer Transformation durch geeignete Wahl von ψ $(U_1 : U_2) = (0 : 1)$ gemacht. Da die Bedingung $U_1V_2 - U_2V_1 \neq 0$ dabei erhalten bleibt, muß $V_1 \neq 0$ gelten, und durch geeignete Wahl von η bzw. δ kann dann durch eine weitere Transformation $U_3 = 0$ bzw. $V_3 = 0$ erreicht werden.

Bemerkung 13 Bei obigem Bewegungsvorgang handelt es sich um eine unechte Darbouxbewegung mit Bahnebenen der Stellung ${}^t(1:0:0)$. Für $V_4^2 + V_5^2 \neq 0$ sind die Punkte der isotrapen Ebene $1 + V_4x + V_5y = 0$ sogar geradläufig mit der Richtung ${}^t(0:1:U_4x + U_5y)$.

B2: Sei nun $U_1^2 + U_2^2 = 0$. Ist $U_3 = 0$; dann gilt $U_4^2 + U_5^2 \neq 0$ und durch eine geeignete Transformation (4) kann man $U_3 \neq 0$ sowie $V_5 = 0$ erreichen[8], sodaß im Büschel um F_4 die Hyperebenen

$$\begin{aligned} H_1 &: Y^3 + U_5Y^5 = 0 \\ H_2 &: Y^4 = 0 \end{aligned}$$

liegen, die mittels des inneren Produktes (3) nach kurzer Rechnung den 2-parametrigen Bewegungsvorgang

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ t_1 & t_2 & U_5t_1 & 1 \end{pmatrix} \tag{21}$$

liefern.

Bemerkung 14 Die isotropen Geraden des I_3^1 werden bei diesem Bewegungsvorgang in sich bewegt.

Fassen wir zusammen dann ergibt sich

Satz 5 *Zu 4-dimensionalen Teilräumen F_4 des F^7, die die Ausnahmegeraden f enthalten. gehören 3 Typen 2-parametriger Bewegungsvorgänge (19) bzw. (20) bzw. (21). Im ersten Fall (19) handelt es sich um eine i.a. echte Darbouxbewegung, die in* **5** *noch genauer untersucht werden wird, der zweite Fall (20) stellt eine unechte Darbouxbewegung dar und im dritten Fall (21) werden die isotropen Geraden des I_3^1 in sich bewegt.*

4. Es bleiben nun noch die 5-dimensionalen Teilräume des H_6 zu behandeln, die die Ausnahmegerade f enthalten. Sie besitzen die Darstellung

$$U_1Y^1 + U_2Y^2 + U_3Y^3 + U_4Y^4 + U_5Y^5 = 0.$$

A. Ist $U_1^2 + U_2^2 \neq 0$, so läßt sich durch eine Transformation (4) $(U_1 : U_2 : U_3) = (0:1:0)$ erreichen[9], was zum 1-parametrigen Bewegungsvorgang

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ t & 0 & 1 & 0 \\ 0 & U_4t & U_5t & 1 \end{pmatrix} \tag{22}$$

führt.

[8] Die erste Bedingung legt α und β, die zweite ψ in der Transformationsmatrix (4) fest.

[9] U_1 bzw. U_3 wird durch geeignete Wahl ψ bzw. β und η in (4) zu Null gemacht.

Bemerkung 15 Es handelt sich dabei um eine Bewegung, bei der alle Punkte auf Geraden bewegt werden. Für die Richtung der Bahngeraden findet man ${}^{t}(0 : 1 : U_4x + U_5y)$.

B. Gilt aber $U_1^2 + U_2^2 = 0$, dann läßt sich durch eine geeignete Transformation (4) stets $U_3 \neq 0$ und $U_5 = 0$ erreichen[10], sodaß wir immer von der Hyperebene

$$Y^3 + U_4Y^4 = 0$$

ausgehen können, die den 1-parametrigen Bewegungsvorgang

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ t & U_4t & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{23}$$

liefert.

Bemerkung 16 Die isotropen Geraden des I_3^1 werden bei diesem Bewegungsvorgang in sich bewegt, wobei für $U_4 \neq 0$ die Punkte der isotropen Ebene $1 + U_4x = 0$ sogar Fixpunkte sind.

Zusammenfassend haben wir

Satz 6 *Zu 5-dimensionalen Teilräumen F_5 des F^7, die die Ausnahmsgeraden f enthalten, gehören 2 Typen 1-parametriger Bewegungsvorgänge (22) bzw. (23). Im ersten Fall (22) sind alle Punkte des I_3^1 geradläufig, im zweiten Fall (23) werden die isotropen Geraden des I_3^1 in sich bewegt.*

5. Wir haben in **4** zwei echte Darbouxbewegungen gefunden, die wir nun näher studieren wollen. Die Frage der echten Darbouxbewegungen des einfach isotropen Raumes wurde bereits von J. TÖLKE in [3] behandelt. Da er aber auf den Drehwinkel φ in der Darstellung (1) der isotropen Bewegungen parametrisierte, würde der folgende Fall **A** nicht gefunden.

Typ A: Dabei handelt es sich um den 2-parametrigen Bewegungsvorgang (siehe **3**; Fall II, A)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ t_1 & 1 & 0 & 0 \\ t_2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & V_4t_1 + U_4t_2 & V_5t_1 + U_5t_2 & 1 \end{pmatrix} \tag{24}$$

[10] Ist $U_3 \neq 0$, dann muss nur, falls nötig, ψ in (4) so gewählt werden, daß $U_5 = 0$ wird. Ist aber $U_3 = U$, dann gilt $U_4^2 + U_5^2 \neq 0$ und durch geeignete Wahl von α und β kann noch zusätzlich $U_3 \neq 0$ erreicht werden.

zu dem die Flaggenmatrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & U_4x+U_5y \\ 1 & V_2 & V_4x+V_5y \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} u_2 & u_3U_4 & u_3U_5 \\ u_1 & u_3V_4 & u_3V_5 \end{pmatrix}$$

gehören.

Einem Punkt $P : {}^t(x^0 : x^1 : x^2 : x^3)$ des I_3^1 - wir verwenden projektive Punktkoordinaten - wird dabei die Ebene

$$\begin{aligned} u_0 &= x^0x^3 - x^1 (x^1V_4 + x^2V_5) - x^2 (x^1U_4 + x^2U_5) \\ u_1 &= -x^0 (x^1 V_4 + x^2 V_5) \\ u_2 &= -x^0 (x^1 U_4 + x^2 U_5) \\ u_3 &= (x^0)^2 \end{aligned} \tag{25}$$

als Bahnebene zugeordnet, während jeder (nichtisotropen) Ebene e : $(u_0 : u_1 : u_2 : u_3)$ der Bahnpunkt P mit den Koordinaten

$$\begin{aligned} x^0 &= u_3^2 \ (U_4V_5 - U_5V_4) \\ x^1 &= u_3 \ (u_1U_5 - u_2V_5) \\ x^2 &= u_3 \ (u_1U_4 - u_2V_4) \\ x^3 &= u_0 \ u_3 \ (U_5V_4 - U_4V_5) - u_1 \ [u_1 + u_3V_4) \ U_5 - u_2V_5] + u_2 \ [(u_1 + u_3V_4) \ U_4 - u_2V_4] \end{aligned} \tag{26}$$

entspricht.

(25) und (26) zeigen, daß die Beziehung zwischen den Punkten und ihren Bahnebenen birational quadratisch ist. Beide Richtungen besitzen Singularitäten; d.h. als Bild ergibt sich (0 : 0 : 0 : 0) die im Fall voll (25) genau die Fernpunkte mit

$$x^0 = x^1(x^1V_4 + x^2V_5) + x^2(x^1U_4 + x^2U_5) = 0$$

sind, während sich für (26) und $U_4V_5 - U_5V_4 \neq 0$ - den Fall $U_4V_5 - U_5V_4 = 0$ behandeln wir später (siehe Bem. 19) - genau jene isotropen Ebenen als singulär erweisen, für die

$$u_3 = u_1 \ (u_2V_5 - u_1U_5) + u_2 \ (u_1U_4 - u_2V_4) = 0 \tag{27}$$

gilt.

Bemerkung 17 Da der Grundrißzwanglauf die volle Translationsgruppe der Ebene $z = 0$ ist, werden alle Bahnebenen - sie sind nichtisotrop - vollständig durchlaufen. Es kann also keine geradläufigen Punkte bzw. Fixpunkte geben, was auch dadurch bestätigt wird, daß die Singularitäten von (25) ausnahmslos Fernpunkte sind.

Bemerkung 18 Wie die zweite Flaggenmatrix zeigt, liegt in (24) genau dann eine unechte Darbouxbewegung vor, wenn

$$U_4 = U_5 = V_4 = V_5 = 0 \text{ und } u_1 = u_2 = 0$$

gilt. Die Bahnebenen besitzen somit die Stellung $(0:0:1)$. Der zum Bewegungsvorgang (24) gehörende Teilraum $F_4 \subset F^7$ enthält dann eine Ebene vom Typ 2 der Fläche Φ.

Bemerkung 19 Gilt in (24) U_4V_5 - $U_5V_4 = 0$, ohne daß alle Koeffizienten gleichzeitig verschwinden - dies wurde bereits in Bem. 18 untersucht -, dann liegt in (26) neben den zu (27) gehörenden Singularitäten genau dann eine weitere Singularität vor, wenn noch

$$u_1U_5 - u_2V_5 = 0,$$

gilt.

Setzen wir nun

$$U_4 := \lambda U,\ U_5 := \mu U,\ V_4 := \lambda V,\ V_5 := \mu V \text{ mit } \lambda^2+\mu^2,\ U^2+V^2 \neq 0$$

dann wird für $U \neq 0$ der einfach-isotrope Raum I_3^1 so durch parallele isotrope Ebenen gefasert. daß die Punkte der isotropen Ebene

$$\lambda x + \mu y + \frac{u_2}{u_3 U} = 0$$

in Ebenen der Stellung $(u_2V : u_2U : u_3U)$ laufen.

Ist aber $U = 0$ und damit $V \neq 0$, dann wird der Raum I_3^1 durch parallele isotrope Ebenen so gefasert, daß die Punkte der isotropen Ebene

$$\lambda x + \mu y + \frac{u_1}{u_3 V} = 0$$

beim Bewegungsvorgang (24) in den Ebenen der Stellung $(u_1 : 0 : u_3)$ geführt werden. In beiden Fällen muß $u_3 \neq 0$ sein.

Der zum Bewegungsvorgang (24) gehörende Teilraum $F_4 \subset F^7$ enthält in diesem Fall also ∞^1 Geraden vom Typ 2 der Fläche Φ.

Typ B: Hierbei handelt es sich um den bereits von J. TÖLKE gefundenen 1-parametrigen Zwanglauf (siehe **3**; Fall I)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ V_2(\cos\varphi-1) & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ V_3(\cos\varphi-1)+U_3\sin\varphi & V_4(\cos\varphi-1) & V_5(\cos\varphi-1) & 1 \end{pmatrix} \tag{28}$$

zu dem die Flaggenmatrizen

$$\begin{pmatrix} -y & x & U_3 \\ x & V_2+y & V_3+V_4x+V_5y \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} u_3U_3 & u_2 & -u_1 \\ u_2V_2+u_3V_3 & u_1+u_3V_4 & u_2+u_3V_5 \end{pmatrix} \tag{29}$$

gehören.

Einem Punkt P : ${}^t(x^0 : x^1 : x^2 : x^3)$ des I_3^1 wird dabei die Ebene

$$\begin{aligned} u_0 &= x^0\,(x^2\,x^3 + x^0\,x^1\,U_3)\,V_2 - (x^0\,V_3 + x^1\,V_4 + x^2\,V_5 - x^3)\,[(x^1)^2 + (x^2)^2] \\ u_1 &= x^0\,[x^0(x^0V_2 + x^2)\,U_3 = x^1\,(x^0V_3 + x^1V_4 + x^2V_5)] \\ u_2 &= x^0\,[-x^0\,x^1\,U_3 - x^2\,(x^0\,V_3 + x^1\,V_4 + x^2\,V_5)] \\ u_3 &= x^0\,[(x^1)^2 + (x^2)^2 + x^0\,x^2\,V_2] \end{aligned} \tag{30}$$

als Bahnebene zugeordnet, während jeder Ebene e : $(u_0 : u_1 : u_2 : u_3)$ der Bahnpunkt P mit den Koordinaten

$$\begin{aligned} x^0 &= u_3\,[u_1^2 + u_2^2 + u_3\,(u_1\,V_4 + u_2V_5)] \\ x^1 &= -u_3\,[u_3\,(u_2 + u_3V_5)\,U_3 + u_1\,(u_2V_2 + u_3V_3)] \\ x^2 &= u_3\,[u_3\,(u_1 + u_3V_4)\,U_3 - u_2\,(u_2V_2 + u_3V_3)] \\ x^3 &= u_0[u_1^2 + u_2^2 + u_3\,(u_1V_4 + u_2V_5)] - (u_1^2 + u_2^2)\,(u_2V_2 + u_3V_3) + u_3^2\,(u_2V_4 - u_1V_5)\,U_3 \end{aligned} \tag{31}$$

entspricht.

(30) und (31) zeigen, daß die Beziehung zwischen den Punkten und ihren Bahnebenen birational kubisch ist. Beide Richtungen besitzen Singularitäten, d.h. als Bild ergibt sich (0 : 0 : 0 : 0). die im Fall von (30) neben den durch

$$x^0 = (x^1V_4 + x^2V_5 - x_3)\,[(x^1)^2 + (x^2)^2] = 0$$

erfaßten Fernpunkten genau die eigentlichen Punkte des I_3^1 mit

$$\begin{aligned} (x^1)^2 + (x^2)^2 + x^0x^2V_2 &= 0 \\ x^0x^1U_3 + x^2\,(x^0V_3 + x^1V_4 + x^2V_5) &= 0 \end{aligned} \tag{32}$$

sind, während sich für (31) neben der Fernebene $u_0 = 0$ genau jene Ebenen als singuläre erweisen, für die

$$u_3 = u_0 - u_2 V_2 = 0 \tag{33}$$

bzw.

$$\begin{gathered} u_1^2 + u_2^2 + u_3 (u_1 V_4 + u_2 V_5) = 0 \\ u_3 (u_2 + u_3 V_5) U_3 + u_1 (u_2 V_2 + u_3 V_3) = 0 \end{gathered} \tag{34}$$

gilt.

Bemerkung 20 Da der zu (28) gehörende Grundrißzwanglauf entweder eine Ellipsenbewegung - $V_2 \neq 0$ - oder eine Drehung - $V2 = 0$ - ist, sind die Bahnkurven der Punkte des einfach isotropen Raumes I_3^1 bei dem Bewegungsvorgang (28) i.a. Ellipsen.

Bemerkung 21 Für $V_4 = V_5 = 0$ liegt, wie ein Vergleich mit [1] zeigt, eine Darbouxbewegung des euklidischen Dreiraumes vor.

Bemerkung 22 Die Darstellung (30) der Bahnebenen zeigt, daß die Punkte mit isotroper Bahnebene den (euklidischen) Kreiszylinder

$$\xi : x^2 + y^2 + V_2 y = 0 \tag{35}$$

erfüllen. Er besitzt isotrope Erzeugenden und zerfällt für $V_2 = 0$ in ein Paar von Minimalebenen. Der in $z = 0$ liegende Leitkreis des Zylinders ist übrigens der Gangpolkreis der Grundrißellipsenbewegung. Die Bahnebenen der Punkte von ξ gehören einem Ebenenbüschel an, dessen Träger eine Erzeugende von ξ ist.

Bemerkung 23 Die Darbouxbewegung (28) besitzt genau dann eine Fixpunktsgerade, wenn die erste Flaggenmatrix den Rang 0 besitzt, also alle Elemente der ersten Flaggenmatrix verschwinden. Dies hat dann $x = y = U_3 = V_2 = V_3 = 0$ zur Folge, sodaß genau für $U_3 = V_2 = V_3 = 0$ eine Fixpunktsgerade, nämlich die isotrope Gerade $^t(0, 0, z)$, existiert. Der zum Bewegungsvorgang (24) gehörende Teilraum $F_4 \subset F^7$ enthält dann eine Ebene vem Typ 1 der Fläche Φ.

Bemerkung 24 Wie die zweite Flaggenmatrix zeigt, liegt in (28) eine unechte Darbouxbewegung genau dann vor, wenn

$$U_3 = V_3 = V_4 = V_5 = 0$$

gilt. Ihre Bahnebenen sind horizontal. Der zum Bewegungsvorgang (28) gehörende Teilraum $F_4 \subset F^7$ enthält in diesem Fall eine Ebene vom Typ 2 der Fläche Φ.

Bemerkung 25 Die Punkte einer isotropen Geraden $^t(x, y, z)$ sind bei (28) genau dann geradläufig, wenn sie Singularitäten von (30) sind, also wenn (32) gilt. Der zum Bewegungsvergang gehörende Teilraum $F_4 \subset F^7$ enthält dann eine Gerade vom Typ 1 der Fläche Φ.

Die beiden Gleichungen (32) stellen zwei Kegelschnitte

$$k_1 : x^2 + y^2 + V_2 y = 0$$
$$k_2 : U_3 x + y(V_3 + V_4 x + V_5 y) = 0$$

der Ebene z = 0 dar. Die isotropen Geraden durch die Schnittpunkte dieser beiden Kegelschnitte tragen dann genau jene Punkte, die beim Bewegungsvorgang (28) auf Geraden geführt werden. Einzig für den auf beiden Kegelschnitten liegenden Punkt ${}^t(0, 0)$ muß dafür noch zusätzlich $U_3 V_2 = 0$ gelten.

Ist $U_3 = 0$, so zerfällt k_2, was wir später noch genauer studieren wollen (siehe Bem. 26). Ist aber $V_2 = 0$, dann zerfällt k_1 in ein Minimalgeradenpaar und genau die Punkte der isotropen Geraden ${}^t(0, 0, z)$ sind geradläufig (die Gerade wird in sich bewegt bzw. sie ist Fixpunktsgerade (siehe Bem. 23)).

Da die beiden Kegelschnitte den Punkt ${}^t(0, 0)$ gemeinsam haben und sich in diesem nur für $U_3 = 0$ berühren können, gibt es zumindest einen weiteren reellen Schnittpunkt und damit bei jedem Bewegungsvorgang (28) zumindest eine isotrope Gerade, deren Punkte geradläufig sind. Man überzeugt sich leicht (siehe auch Bem. 26), daß durch Spezialisierung der Größen $U_3, \ldots, V_5$ auch alle vier Schnittpunkte reell sein können und daher bis zu drei isotrope Geraden existieren, die geradläufige Punkte tragen.

Bemerkung 26 Wir wollen nun noch das Zerfallen des Kegelschnittes k_2 näher studieren. Dabei setzen wir $V_2 \neq 0$ voraus, was k_1 zerfallen läßt und bereits behandelt wurde.

Aus der Gleichung von k_2 erhält man nach kurzer Rechnung, daß ein Zerfallen genau für

$$U_3 \, (V_3 V_4 - U_3 V_5) = 0$$

eintritt.

Ist $U_3 = 0$, dann berechnen sich die Schnittpunkte von k_1 und k_2 zu:

$$S_1 :{}^t(0,0),\, S_{2,3} = {}^t\left(\frac{-2V_3V_4 + V_5\left(V_2V_4 \pm \sqrt{D}\right)}{2\left(V_4^2 + V_5^2\right)}, \frac{-V_2V_4^2 - 2V_3V_5 \mp V_4\sqrt{D}}{2\left(V_4^2 + V_5^2\right)} \right),$$

mit $D = V_4^2 V_4^2 + 4V_3(V_2V_5 - V_3)$. Je nach dem Vorzeichen von D gibt es dann eine, zwei oder drei isotrope Geraden, deren Punkte bei (28) geradläufig sind. Als Richtungen findet man

$${}^t\left(0 : V_2 : V_3\right) \text{und } {}^t\left(-2V_3V_4 + V_5\left(V_2V_4 \pm \sqrt{D}\right) : -V_2V_4^2 - 2V_3V_5 \mp V_4\sqrt{D} : 0\right).$$

Ist aber $U_3 \neq 0$ und damit $V_3V_4 - U_3V_5 = 0$, dann muß $V_5 = \frac{V_3V_4}{U_3}$ gelten und k_2 zerfällt für $V_4 \neq 0$ in die beiden Geraden $U_3 + V_4y = U_3x + V_3y = 0$.

Diese schneiden k_1 abgesehen vom Punkt ${}^t(0, 0)$, der wegen der Voraussetzungen für U_3 und V_2 zu keinen geradläufigen Punkten führen kann, in den drei Punkten

$$ {}^t\left(\pm\frac{\sqrt{U_3\left(V_2V_4-U_3\right)}}{V_4}, \frac{-U_3}{V_4}\right) \text{ und } {}^t\left(\frac{U_3V_2V_3}{U_3^2+V_3^2}, \frac{-U_3^2V_2}{U_3^2+V_3^2}\right), $$

wobei die ersten beiden nur für $U_3(V_2V_4 - U_3) \geq 0$ reell sind. Diese führen auf isotrope Geraden. deren Punkte geradläufig sind. Als Richtungen findet man nach kurzer Rechnung

$$ {}^t\left(U_3 \pm\sqrt{U_3\left(V_2V_4-U_3\right)} : U_3V_4\right) \text{ und } {}^t\left(U_3V_2 : V_2V_3 : U_3^2+V_3^2\right). $$

Für $V_4 = 0$ hingegen degeneriert k_2 in die Gerade $U_3x + V_3y = 0$ und schneidet k_1 in den beiden Punkten

$$ {}^t(0,0) \text{ und } {}^t\left(\frac{U_3V_2V_3}{U_3^2+V_3^2}, \frac{-U_3^2V_2}{U_3^2+V_3^2}\right). $$

Nur die Punkte der isotropen Geraden durch den zweiten Schnittpunkt sind geradläufig mit der Richtung ${}^t\left(U_3V_2 : V_2V_3 : U_3^2+V_3^2\right)$.

Zusammenfassend haben wir den folgenden

Satz 7 *Im einfach-isotropen Raum I_3^1 gibt es zwei Typen von echten Darbouxbewegungen. Der erste Typ (24) ist zweiparametrig und jeder Punkt durchläuft seine Bahnebene vollständlig. Der zweite Typ (28) ist einparametrig und die Bahnkurven der Punkte des I_3^1 sind im allgemeinen Ellipsen. Als Sonderfall können dabei auch Geraden als Bahnkurven auftreten.*

Literatur

[1] O. BOTTEMA und B. ROTH. *Theoretical Kinematics.* Dover Publications, New York. (1981).

[2] H. SACHS. *Isotrope Geometrie des Raumes.* Vieweg-Verlag, Wiesbaden, (1987).

[3] J. TÖLKE. Die isotropen Gegenstücke der Darboux-Bewegungen. *Sb. d. Oesterr. Akad. d. Wiss.*, 187:289-296, (1978).

[4] H. WRESNIK. Bewegungen mit ebenem Bahnen im einfach-isotropen Raum - Teil I. im *Druck*, .