UDK 514.112
514.12
Izvorni znanstveni članak

Prihvaćeno za tisak: 17.06.2003.

DIE ALLGEMEINE INVERSION IN DER ISOTROPEN EBENE

Vlasta Szirovicza, Ana Sliepčević

Unter einer isotropen Ebene $I_2(R)$ versteht man eine reelle affine Ebene $A_2(R)$, die durch eine Absolutfigur $\{f, F\}$ - bestehend aus einer Geraden $f \subset A_2$ und einem mit f inzidenten Punkt F - metrisiert ist. Die absolute Gerade f ist durch $x_0=0$ und der absolute Punkt durch $F(0{:}0{:}1)$ gegeben.

In einer isotropen Ebene existieren bekanntlich bezüglich einer Bewegungsgruppe B_3 acht Typen der ireduziblen Kegelschnitten [3]. Nicht jeder von diesen kann als Grundkegelschnitt einer isotropen Inversion betrachtet werden und nicht jeder Punkt dieser Ebene kann ein Pol der isotropen Inversion sein, da jede Transformation der isotropen Ebene die Absolutfigur $\{f, F\}$ als Ganzes festbleiben soll.

Nach kurzer Betrachtung schließt man folgendes:

a) Der Grundkegelschnitt soll den absoluten Punkt enthalten. Somit ist er entweder eine spezielle Hyperbel oder ein isotroper Kreis.

b) Der Inversionspol soll auf der absoluten Geraden liegen. Damit wird die absolute Gerade als der Inversionsstrahl sich selbst zugeordnet.

Man kann die isotrope Inversion auf folgende Weise definieren.

Definition 1. Die involutorische Verwandtschaft, in der die zugeordneten Punkte konjugiert bezüglich eines zirkulären Kegelschnittes c^2 sind und dabei auf der Geraden eines Geradenbüschels liegen, wobei $P \in f$ ist, heißt *allgemeine Inversion in der isotropen Ebene*.

Der feste Punkt P ist der Pol und der Kegelschnitt c^2 der Grundkegelschnitt der Inversion.

Im ersten Teil dieser Arbeit werden die Geraden durch verschiedene Typen der Inversion transformiert und im zweiten werden die Bedingungen zur Erzeugung der zirkulären Kurven 3. Ordnung nachgeprüft.

Nach der Wahl des Grundkegelschnittes unterscheidet man zwei Typen der allgemeinen Inversion je nachdem der Grundkegelschnitt eine spezielle Hyperbel oder ein isotroper Kreis ist.

Typ 1. Der erste Typ wird in projektiver Sicht in der Fig. 1 gegeben. Der Grundkegelschnitt c^2 ist eine spezielle Hyperbel und der Pol P liegt auf der absoluten Geraden f in allgemeiner Lage. Im speziellen Fall kann $P \equiv F$ sein. I. f. werden P, P_1

---

* University of Zagreb, Croatia, March 7, 2003
1991 Mathematics Subject Classification. 05B05.
MSC: 51N25

und P_2 als die Grundpunkte und ihre Polaren p, p_1 und p_2 als die Grundgeraden genannt.

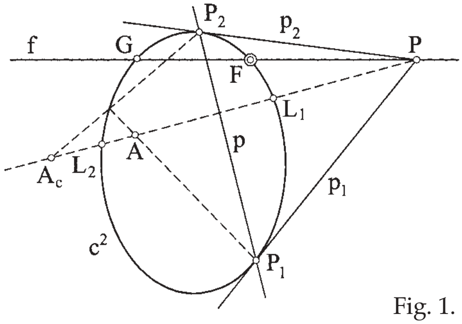

Fig. 1.

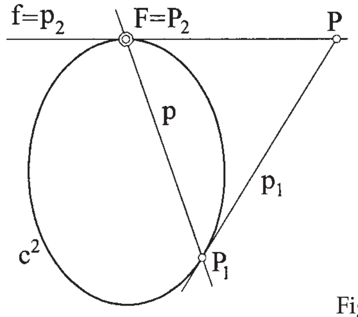

Fig. 2.

Typ 2. Der Grundkegelschnitt ist ein isotroper Kreis und der Pol $P \neq F$ liegt im allgemeiner Lage auf der Geraden f (Fig. 2). Im Fall $P \equiv F$ entsteht die gewöhnliche isotrope Inversion [3].

Zunächst werden die Inversionsgleichungen für jeden Typ bestimmt.

Typ 1.

Um die Gleichung des Grundkegelschnittes der allgemeinen isotropen Inversion zu bestimmen, wird man von den Kurven 2. Ordnung der affinen Ebene A_2 ausgehen. Diese lassen sich in einem affinen Koordinatensystem durch eine Gleichung der Bauart

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0 \tag{1}$$

mit $a_{i,j,} a_1, a_2, a_0 \in \mathbf{R}$ beschreiben.

Unter der Bedingung, daß eine spezielle Hyperbel den absoluten Punkt $F(0{:}0{:}1)$ enthält, folgt $a_{22}=0$. Somit lautet ihre Gleichung:

$$c^2 \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0. \tag{2}$$

Um die einfachste Gestalt zu erreichen, rechnet man durch $\dfrac{\partial c^2}{\partial x} = \dfrac{\partial c^2}{\partial y} = 0$ ihren Mittelpunkt mit den Koordinaten

$$x = -\frac{a_2}{a_{12}} \quad y = \frac{a_{11}a_2 - a_1a_{12}}{a_{12}^2}. \tag{3}$$

Mittels einer isotropen Bewegung kann man den Mittelpunkt der Hyperbel in den Ursprung des Koordinatensystems schieben, woraus folgt

$$a_2=0 \text{ und } a_{11}a_2-a_1a_{12}=0.$$

Wegen $a_{12}\neq 0$, folgt $a_1=0$ und aus (2) folgt

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_0=0.$$

Setzt man $a_{11}=1$, $a_{12}=:B$ und $a_0=:C$, erhält man

$$c^2 \equiv x^2+2Bxy+C=0 \text{ mit } B\neq 0, C\neq 0 \tag{4}$$

als Normalform des Grundkegelschnittes der Inversion, was offensichtlich eine spezielle Hyperbel 1. oder 2. Art ist [3]. Man findet sofort ihre Asymptoten, $x=0$ und $x+2By=0$, wobei $x=0$ eine isotrope Gerade ist. Die uneigentlichen Punkte der Hyperbel besitzen die Koordinaten $F(0{:}0{:}1)$ und $G(0{:}\text{-}2B{:}1)$.

Man wählt o.B.d.A den Pol P als Fernpunkt der x-Achse mit den Koordinaten $P(0{:}1{:}0)$. Zwei Inversionsstrahlen sind die Tangenten p_1 und p_2 des Grundkegelschnittes c^2 mit den Gleichungen

$$p_1 \equiv y=\frac{\sqrt{C}}{B} \text{ und } p_2 \equiv y=-\frac{\sqrt{C}}{B}.$$

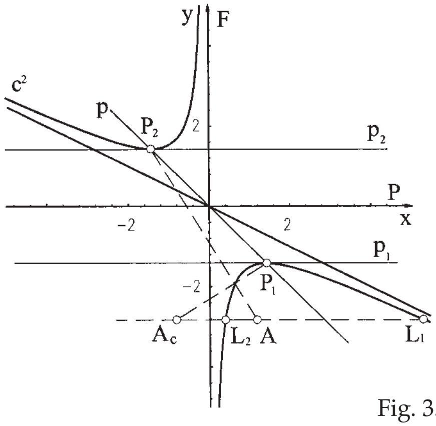

Fig. 3.

Die Hyperbelberührungspunkte dieser Tangenten sind

$$P_1\left(-\sqrt{C},\frac{\sqrt{C}}{B}\right) \text{und } P_2\left(\sqrt{C},-\frac{\sqrt{C}}{B}\right). \tag{5}$$

Die Polare p des Pols P bezüglich c^2 (Fig. 3) hat die Gleichung

$$p\equiv x+By=0. \tag{6}$$

Ein Punkt A und sein Inversionsbild A_c sollen die beiden Bedingungen erfüllen:
a) die Punkte A, A_c und P sind kollinear, d.h. $y'=y$.
b) für das Doppelverhältnis gilt $(L_1L_2AA_c)=-1$, wobei $L_1(x_1,y)$ und $L_2(x_2,y)$ konjugiert zu c^2 stehen.
Man sucht die Polarform zu (4)

$$xx'+B(xy+x'y)+C=0, \tag{7}$$

daraus folgen die Gleichungen einer **allgemeinen Inversion** in der isotropen Ebene

$$x'=-\frac{C+Bxy}{x+By} \qquad y'=y \tag{8}$$

1. Sofort bemerkt man, die Gerade $p_1\equiv y=\frac{\sqrt{C}}{B}$ bzw. $p_2\equiv y=-\frac{\sqrt{C}}{B}$ bildet sich in den Punkt $P_1\left(-\sqrt{C},\frac{\sqrt{C}}{B}\right)$, bzw. $P_2\left(\sqrt{C},-\frac{\sqrt{C}}{B}\right)$ ab.

2. Sei $q\equiv ax+by+c=0$ eine beliebige Gerade. Ihr Inversionsbild ist ein die Punkte P, P_1, P_2, Q_1, Q_2 enthaltender Kegelschnitt q_c^2 (Fig. 4). Dabei sind Q_1 und Q_2 die Schnittpunkte der Geraden q mit dem Grundkegelschnitt c^2. Seine Gleichung lautet

$$q_c^2\equiv bBy^2+(b-aB)xy+cx+cBy-aC=0.$$

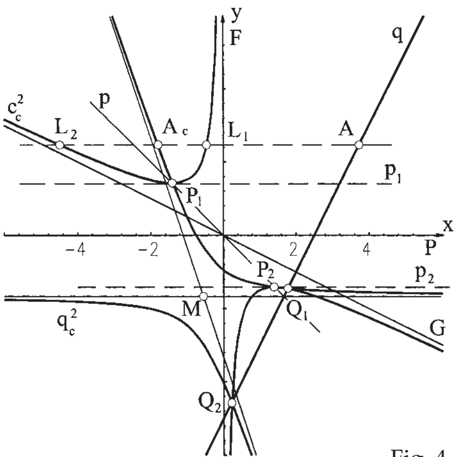

Fig. 4.

Es ist offensichtlich eine Hyperbel mit den Asymptotenrichtungen

$$y=0 \text{ und } \frac{y}{x}=-\frac{b-aB}{bB}.$$

Der Pol P und das Inversionsbild Q_c des Schnittpunktes Q der Geraden q mit der absoluten Geraden f sind ihre uneigentlichen Punkte. Man schließt daraus, daß das Inversionsbild einer Geraden immer eine den Pol P enthaltende Hyperbel 1. oder 2. Art ist.

Der Mittelpunkt dieser Hyperbel besitzt die Koordinaten

$$M\left(\frac{cB(b+aB)}{(b-aB)^2},-\frac{c}{b-aB}\right).$$

An der Fig. 4 wurde eine Hyperbel mit der Gleichung $q_c^2 \equiv y^2+3xy+5x+5y+$ $+4=0$ als Inversionsbild der Geraden $q \equiv 2x-y-5=0$ dargestellt, wobei B=1 und C=2 gewählt wurden.

Enthält die Gerade q einen der Grundpunkte, zerfällt die Hyperbel in eine Gerade und in die Polare dieses Grundpunktes.

3. Ist q eine isotrope Gerade, wird ihr Inversionsbild eine spezielle Hyperbel. Stimmt q mit der isotropen Asymptote des Grundkegelschnittes überein, wird sie ebenfalls die Asymptote des Kegelschnittes q_c^2.

4. Stimmt der Pol P mit dem absoluten Punkt F überein, wird die Polare p eine isotrope Asymptote x=0 der Grundhyperbel c^2. Damit bilden die Inversionsstrahlen ein Büschel der isotropen Geraden. Fällt einer der beiden Schnittpunkte jedes Strahles mit c^2 in den Punkt F (z.B. L_2), folgt

$$\frac{AL_1}{A_cL_1}=-1, \tag{9}$$

woraus

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= -\frac{x^2+C}{Bx}-y \end{aligned} \tag{10}$$

die entsprechenden Inversionsgleichungen sind.

Jede beliebige Gerade q bildet sich mittels der Inversion (10) in eine spezielle Hyperbel ab, die die beiden Schnittpunkte Q_1 und Q_2 der Geraden q mit der Grundkurve enthält. Diese Hyperbel und die Grundhyperbel besitzen die isotrope Polare p als die gemeinsame Asymptote (Fig. 5).

Typ 2.

Als Grundkegelschnitt der Inversion sei ein isotroper Kreis ausgewählt, der mittels einer isotropen Bewegung die Normalform

$$x^2-2ty=0 \text{ mit } t \neq 0 \tag{11}$$

erreicht [2]. Da der Pol $P \in f$ entweder $P \neq F$ oder P=F sein kann, soll man im beiden Fällen die Inversionsgleichungen feststellen.

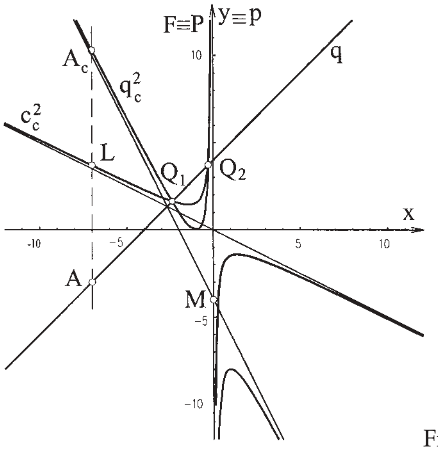

Fig. 5.

a) O.B.d.A. kann man den Pol $P \neq F$ in den Punkt $P(0{:}1{:}0)$ legen. Daraus folgt: $p \equiv y$ und weiters $p_2 \equiv f$, $p_1 \equiv x$.

Die Polarform zu (11) gibt gleich

$$x' = \frac{2ty}{x}, y' = y. \tag{12}$$

Mittels dieser Inversion abbildet sich eine beliebige Gerade q in eine spezielle Hyperbel. Daraus ist zu sehen, dass die horizontale Asymptote dieser Hyperbel den Schnittpunkt der Geraden q mit der y-Achse durchläuft (Fig. 6).

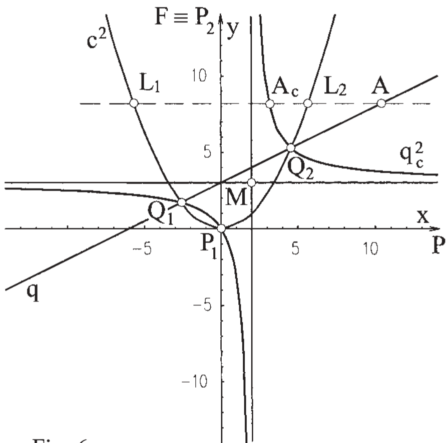

Fig. 6.

Ist die Gerade q isotrop, zerfällt der Kegelschnitt q_c^2 in die absolute Gerade f und in eine den Punkt P_1 enthaltende isotrope Gerade q_c.

b) Im Fall $P=F$, entsteht die gewöhnliche isotrope Inversion mit den Gleichungen

$$x'=x, \quad y'=Kx^2\text{-}y, \tag{13}$$

wobei die Inversionskonstante K die Wert $K=\frac{1}{t}$ erreicht [2].

Der Schnittpunkt jedes Inversionstrahles mit dem isotropen Kreis halbiert den isotropen Abstand zweier parallelen Punkte A und A_c. Ihre Spanne ist gleich ihrem euklidischen Abstand [3].

Mittels einer solchen Inversion übergeht eine beliebige Gerade in eine Kurve 2. Ordnung, die im absoluten Punkt die absolute Gerade berührt und somit ein isotroper Kreis wird (Fig. 7).

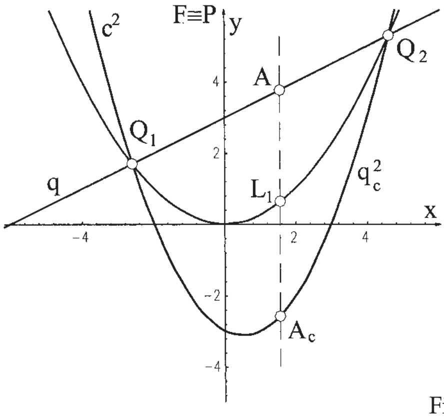

Fig. 7.

Aus obigen Betrachtungen folgt:

Satz 1. Das Inversionsbild jeder beliebigen Geraden der isotropen Ebene wird eine der drei Hyperbelarten oder ein isotroper Kreis. Enthält die Gerade einen der Grundpunkte, zerfällt der Kegelschnitt in zwei Geraden.

Die bisherigen Betrachtungen ermöglichen die Untersuchungen der zirkulären Kurven in der isotropen Ebene durchzuführen.

Die zirkuläre Kurven 3. Ordnung

***Definition* 2.** Eine Kurve in der isotropen Ebene heißt zirkulär, wenn sie den absoluten Punkt enthält. Besitzt die Kurve n-ter Ordnung den absoluten Punkt als r-fachen Schnittpunkt mit den absoluten Geraden, wird sie zum Zirkularitätsgrad $r\,(r \leq n)$. Im Fall $r=n$ heißt sie vollständig zirkulär.

Aus der Definition 2. folgt, die zirkuläre Kurven 3. Ordnung (i.f. Kubik) können vom Zirkularitätsgrad 1, 2 oder 3 sein. Daraus kann man schließen, dass eine 1-zirkuläre Kubik im Bezug auf die absolute Gerade sechs Lagen erreichen kann (Fig. 8).

Im Fall der 2-zirkulären Kubik entstehen in diesem Sinn vier Fälle (Fig. 9). Der absolute Punkt kann, entweder ein Berührungspunkt der Kurve mit den absoluten Geraden oder ein singulärer Punkt sein.

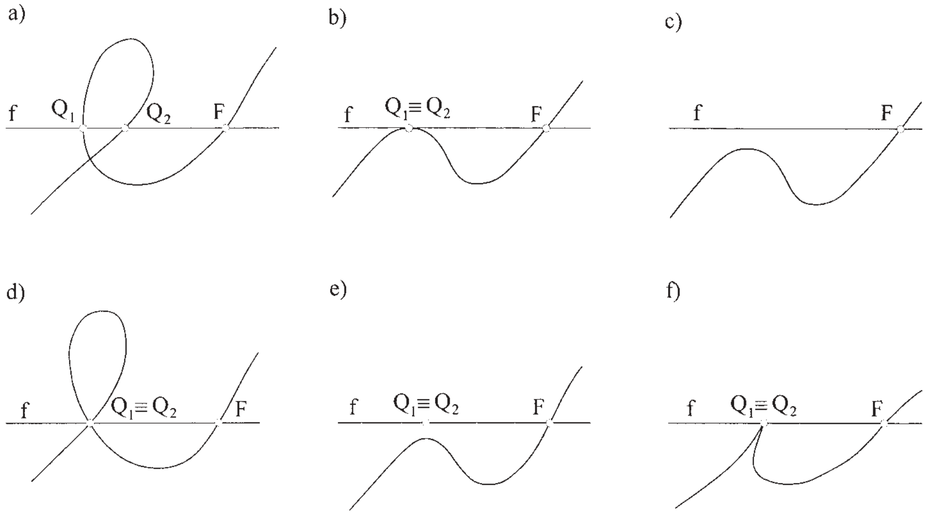

Fig. 8.

Bekanntlich besitzt die 3-zirkuläre Kubik den absoluten Punkt als dreifach zählenden Schnittpunkt mit der absoluten Geraden [2]. Dieser wird entweder ein Wendepunkt mit den absoluten Geraden als Wendetangente, oder eine Spitze 1. Art mit den absoluten Geraden als die Spitzentangente, oder ein Knotenpunkt mit der absoluten Geraden als die Tangente eines Zweiges (Fig. 10).

Das Inversionsbild eines Kegelschnittes k^2 ist bekanntlich eine Kurve 4. Ordnung vom Geschlecht Null. Um eine Kubik zu erzeugen, soll dieser Kegelschnitt einen der Grundpunkte enthalten.

Das Ziel der folgenden Betrachtungen ist die Bedingungen zu finden, um die Kubik des bestimmten Zirkularitätsgrades zu erreichen.

Zuerst werden solche Bedingungen auf syntetische Weise durchgeführt, danach mittels der isotropen Inversion die Normalform jeder Kubik gewonnen und dann solche Kubik für die konkrete Parameterswerte graphisch dargestellt. Man erreicht die folgende Ergebnisse.

Eine **1-zirkuläre Kubik** entsteht nur in folgenden Fällen:

1.1. Der Grundkegelschnitt c^2 ist eine spezielle Hyperbel und der Pol $P \neq F$. Der Kegelschnitt k^2 ist ebenso eine spezielle Hyperbel, die einen der Grundpunkte, z.B.

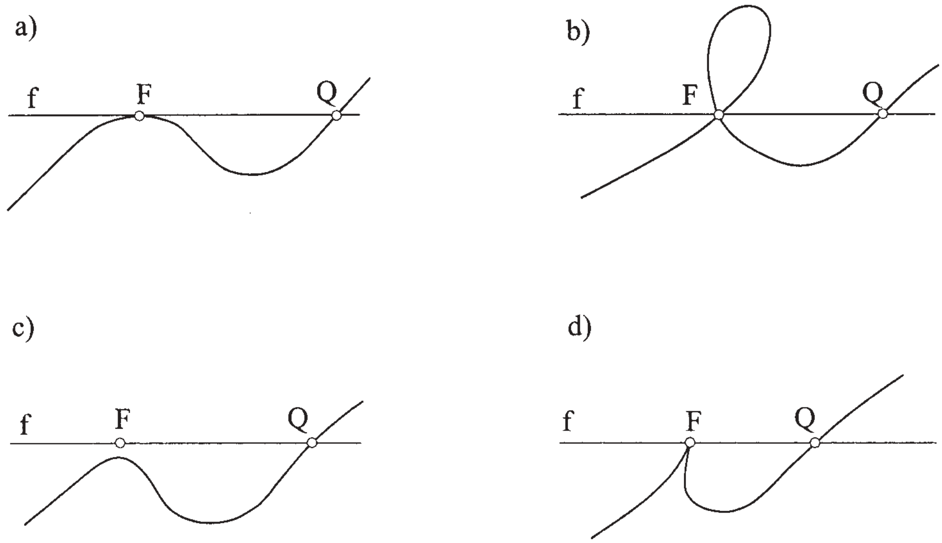

Fig. 9.

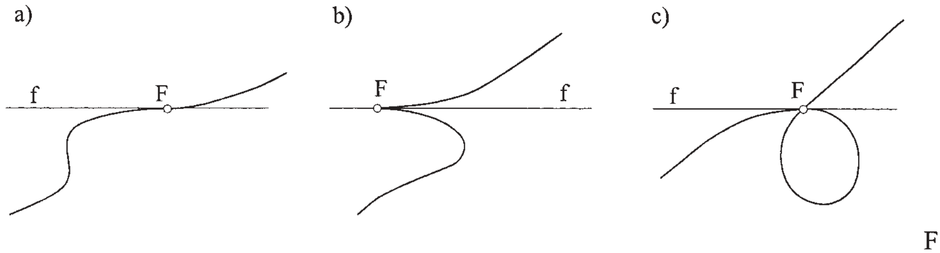

Fig. 10.

P, enthält (Fig. 11a). Im allgemeinen enthält die erzeugte Kubik an der absoluten Geraden, außer F und P, noch einen Punkt, der bei diesem Fall mit P zusammenfällt. Somit wird P ein Knotenpunkt, eine Spitze, bzw. ein isolierter Punkt der Kubik, nachdem sind die Schnittpunkte der Polaren p mit k^2 zwei verschiedene reelle oder zwei zusammenfallende Punkte bzw. ein konjugiert imaginäres Punktepaar.

Die Asymptotengleichung der erzengten kurve

$$k_c^3 \equiv Bxy^2 - Dxy - BDy^2 - Ex + (C - BE)y = 0$$

mit dem Knotenpunkt im Fernpunkt P (Fig. 11b) lautet $x{=}D$.

1.2. Der Grundkegelschnitt c^2 ist ein isotroper Kreis und Pol $P \neq F$. Der Kegelschnitt k^2 ist eine den Pol P enthaltende 0-zirkuläre Kurve, aber keine Parabel (Fig.

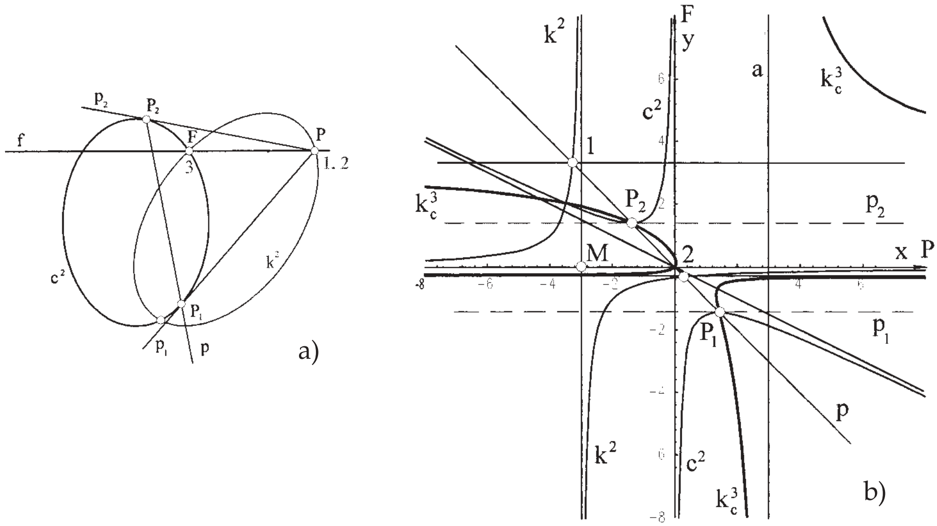

Fig. 11.

12a). Die erzeugte Kubik hat in P einen singulären und in $F \equiv P_2$ den einfachen Punkt.

In Fig 12b) ist ein Beispiel solcher Kurve mit dem isolierten Doppelpunkt P dargestellt. Die Gleichung dieser Kurve hat die Form

$$k_c^3 \equiv xy^2 + 4tDy^2 + Ex = 0$$

und ihre Asymptote $x = -4tD$.

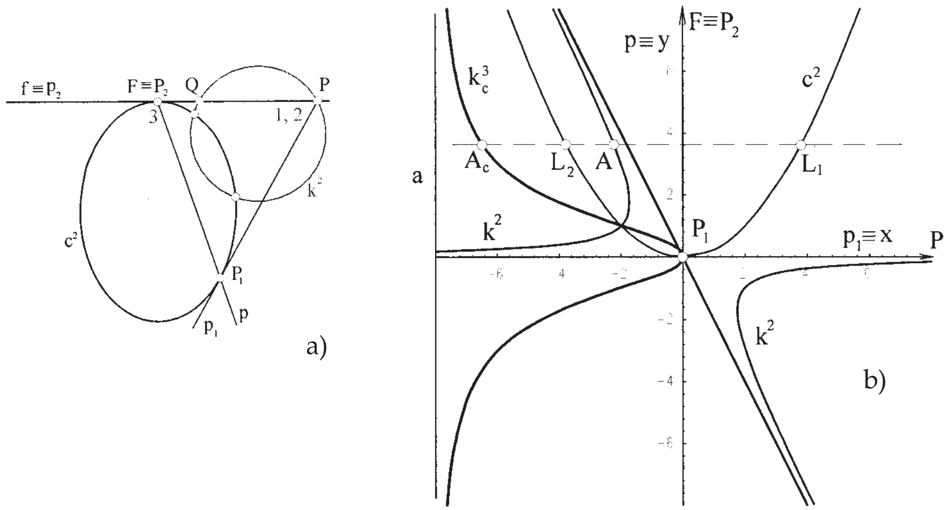

Fig. 12.

1.3. Der Grundkegelschnitt c^2 ist ein isotroper Kreis und Pol $P \neq F$. Der Kegelschnitt k^2 ist eine spezielle Hyperbel (Fig 13a). Die erzeugte Kubik hat in P_1 einen Doppelpunkt und in P einen Wendepunkt mit den absoluten Geraden als Wendetangente. Der Punkt P_1 in Fig. 13b) ist ein isolierter Doppelpunkt der Kurve

$$k_c^3 \equiv 4tBxy^2 + Cx^2 + 4r^2y^2 = 0.$$

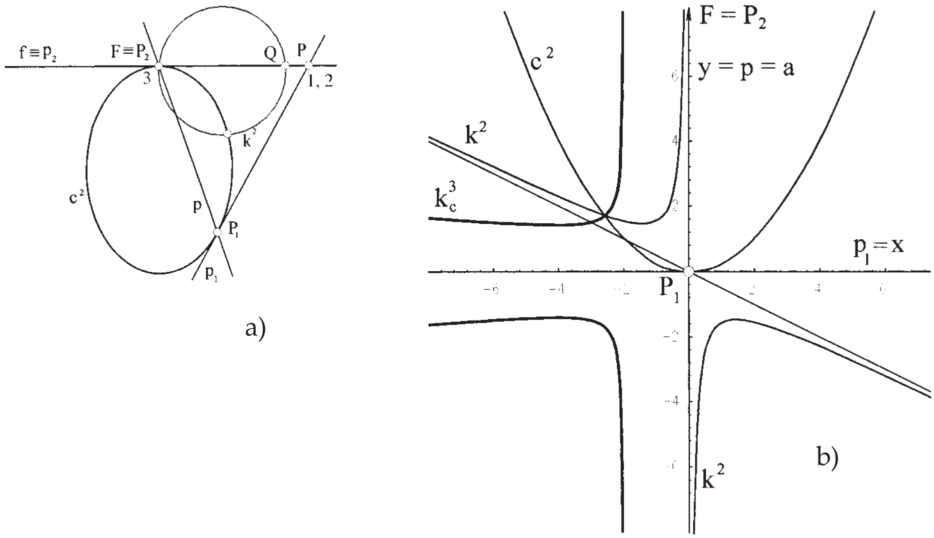

Fig. 13.

Eine **2-zirkuläre Kubik** entsteht nur in folgenden Fällen:

2.1. Der Grundkegelschnitt c^2 ist eine spezielle Hyperbel und Pol $P \neq F$. Der Kegelschnitt k^2 ist einer den Punkt P_1 (oder P_2) enthaltender isotroper Kreis. Damit wird P_2 (bzw. P_1) ein Doppelpunkt der Kubik die im F die absolute Gerade berührt. Fig. 14 stellt eine Kubik mit der Gleichung

$$k_c^3 \equiv Bx^2y - 2B\sqrt{C}xy - B^2\sqrt{C}y^2 - BCy - C\sqrt{C} = 0$$

dar, die im P_2 einen isolierten Doppelpunkt enthält.

2.2. Der Grundkegelschnitt c^2, wie auch k^2 sind isotrope Kreise und Pol $P \neq F$. Damit wird P_1 ein Doppelpunkt der Kubik, die im Punkt F die absolute Gerade berührt. Solche Kubik (Fig. 15) hat die Gleichung

$$k_c^3 \equiv x^2y + Dx^2 - 4At^2y^2 = 0$$

2.3. Der Grundkegelschnitt c^2, wie auch k^2 sind spezielle Hyperbeln und Pol $P \equiv F$. Somit entsteht im Punkt F ein Knotenpunkt der erzeugten Kubik (Fig. 16).

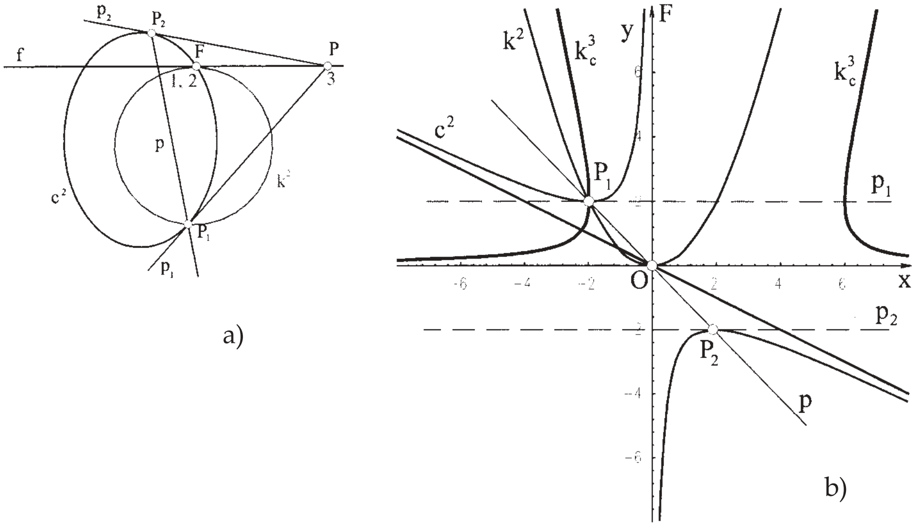

Fig. 14.

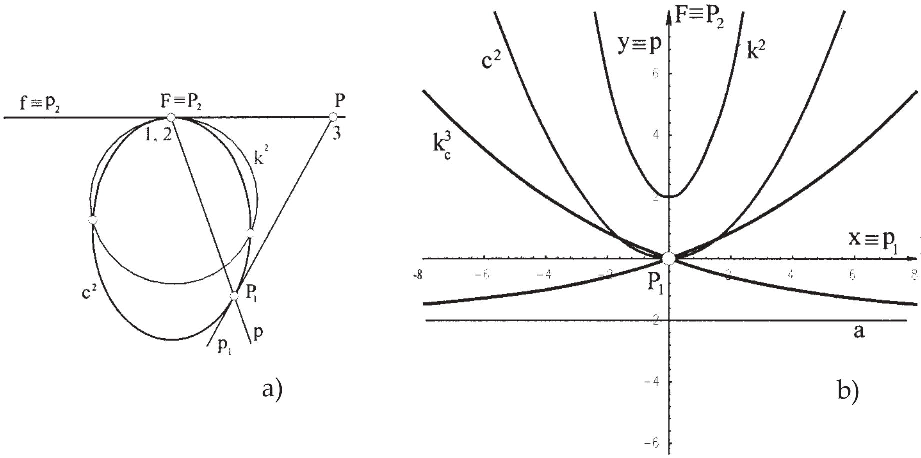

Fig. 15.

Der dritte Schnittpunkt der Kubik mit der absoluten Geraden f ist das Inversionsbild des zweiten reellen Schnittpunktes der Hyperbel k^2 mit f. Die beiden Kegelschnitte haben außer den Punkt F, nur noch einen Osculationspunkt G gemeinsam. Die Kubik in diesem speziellen Fall hat die Gleichung

$$k_c^3 \equiv x^2 y + 2Exy + 2Cx - Fx + 4CE = 0$$

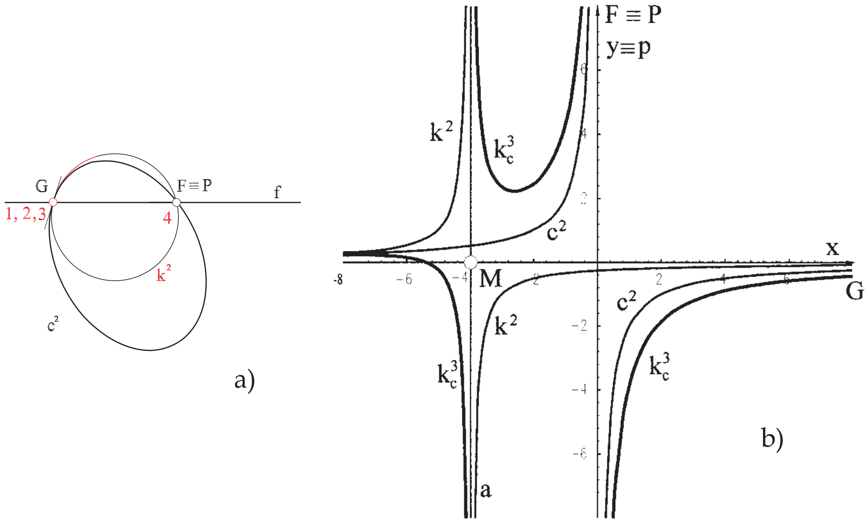

Fig. 16.

2.4. Der Grundkegelschnitt c^2 ist ein isotroper Kreis und der Pol $P \neq F$. Der Kegelschnitt k^2 ist eine den eigentlichen Grundpunkt P_1 enthaltende 0-zirkuläre Kurve (Fig. 17). Die beiden Schnittpunkte Q_1 und Q_2 des Kegelschnittes k^2 mit der Ge-

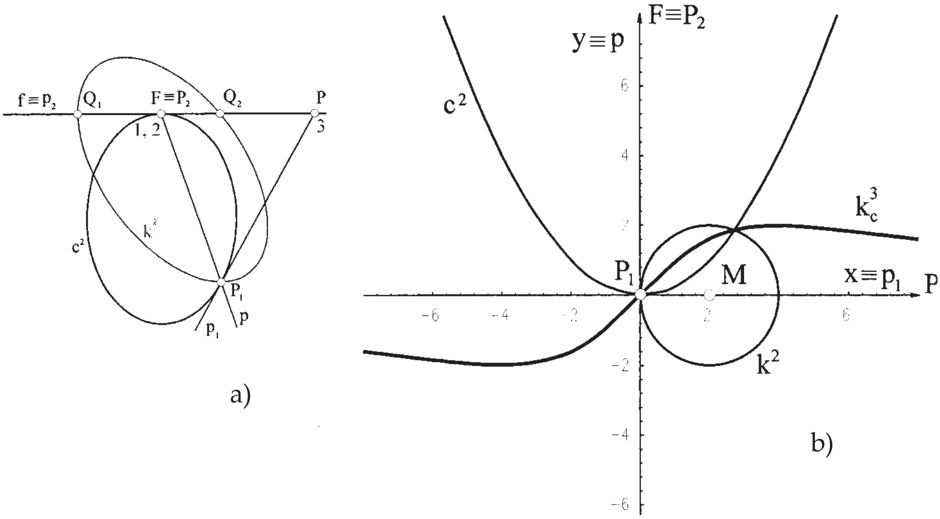

Fig. 17.

rade f bilden sich in den Punkt $F \equiv P_2$ ab. Somit wird F ein Doppelpunkt der Kubik k_c^3 mit der Gleichung

$$k_c^3 \equiv Bx^2y - 2B\sqrt{C}xy - B^2\sqrt{C}y^2 - Bcy - C\sqrt{C} = 0\,.$$

Diese 2-zirkuläre Kubik berührt die absolute Gerade im absoluten Punkt F und schneidet sie im Pol P, der offensichtlich ein Wendepunkt der Kurve mit der x-Achse als Wendetangente ist. Man kann beweisen, die Doppelpunktsart hängt nur von dem Vorzeichen des Parameters C ab. Die Kubik in Fig 17 besitzt in P_2 einen isolierten Doppelpunkt.

Eine **3-zirkuläre Kubik** entsteht in folgenden Fällen:

3.1. Der Grundkegelschnitt c^2 ist eine spezielle Hyperbel und der Pol $P \equiv F$. Der Kegelschnitt k^2 ist ein isotroper Kreis, der die isotrope Polare p in einem Punkt Q schneidet. Die erzeugte Kubik berührt die absolute Gerade f in Punkt $P \equiv F$ und der Punkt Q bildet sich in den Punkt P ab. Daraus folgt, der Punkt $P \equiv F$ ist ein dreizuzählender Schnittpunkt der Kubik mit der Geraden f. Dieser Punkt wird zum Knotenpunkt der Kubik k_c^3, wobei f die Tangente eines Zweiges und die Polare p die Tangente ihres anderen Zweiges im Punkt F ist (Fig. 18). Ihre Gleichung lautet

$$k_c^3 \equiv x^3 + 2txy + 4tC = 0.$$

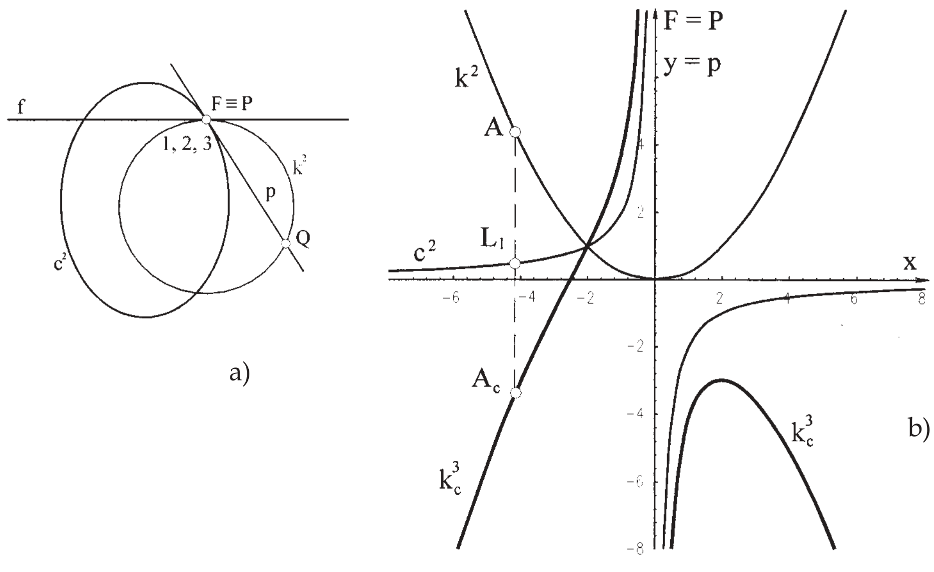

Fig. 18.

3.2. Der Grundkegelschnitt c^2 ist ein isotroper Kreis; der Pol $P \equiv F$; der Kegelschnitt k^2 ist eine spezielle Hyperbel (Fig. 19). Wieder entsteht eine vollständig zirkuläre Kubik der gleichen Art, bzw. eine Tridenskurve deren Gleichung lautet

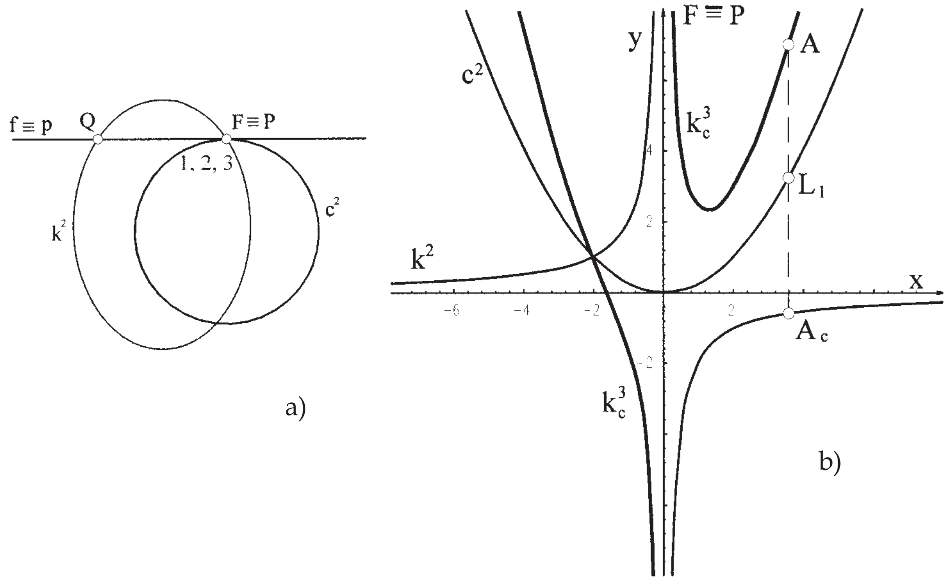

Fig. 19.

$$k_c^3 \equiv x^3 - pxy + pC = 0.$$

Man soll bemerken, dass in diesem Fall eine gewöhnliche Inversion eintritt.

Es bleibt noch zu betonen, im letzten Teil dieser Abhandlung sind alle Bedingungen über die Lage des Urkegelschnittes im Bezug an die Grundelemente (Pol und Grundkegelschnitt) zur Erzeugung der zirkulären Kubiken mittels der isotropen Inversion in Betracht genommen.

Literatur

[1] Cesarec, R., Analitička geometrija I, Zagreb, 1957.
[2] Palman, D., Über zirkulare Kurven 3. Ordnung der isotropen Ebene, Rad JAZU 444 (1989),222-251.
[3] Sachs, H., Ebene isotrope Geometrie, Braunschweig-Wiesbaden, 1987.
[4] Sliepčević, A., Szirovicza, V., Die projektive Erzeugung der vollständig zirkulären Kurven 3. Ordnung in der isotropen Ebene, Mathematica Pannonica 11/2 (2000), 223-237.

[5] Szirovicza, V., Sliepčević, A., Ein Analogon des Czuberschen Satzes in der isotropen Ebene, KoG 4(1999),11-14.

Abstract

In this paper the inversion in the isotropic plane is defined. Using the syntetical and analitical method it is shown that the fundamental conic of inversion can only be a special hyperbola or an isotropic circle. The pole of the inversion has to be a point of the absolute straight line.

It is proved that the inversion image of a straight line will always be one of the three types of the isotropic hyperbola or an isotropic circle.

Furthermore, all conditions for generating the cubics of all degrees of circularity are studied.

Poopćena inverzija u izotropnoj ravnini

Vlasta Szirovicz i Ana Sliepčević

SAŽETAK

Korištenjem sintetičke i analitičke metode pokazuje se da temeljna konika poopćene inverzije u izotropnoj ravnini može biti samo specijalna hiperbola ili kružnica, a pol te inverzije može biti samo točka na apsolutnom pravcu. Inverzna slika pravca je uvijek jedna od triju vrsti hiperbola ili izotropna kružnica. Istražuju se uvjeti za tvorbu krivulja trećeg reda raznih stupnjeva cirkularnosti.

Key words: isotropic plane, inversion, circular cubics

Vlasta Szirovicza,
Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu,
10000 Zagreb, Kačićeva 26, Croatia
E-mail: szvlasta@grad.hr

Ana Sliepčević,
Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu,
10000 Zagreb, Kačićeva 26, Croatia
E-mail: anas@grad.hr