UDK 514.752.2
514.12
Izvorni znanstveni članak
Prihvaćeno za tisak: 17.6.2003.

ÜBER DIE ZIRKULÄREN KURVEN EINES VIERSEITS

Ana Sliepčević

Seien in der Ebene vier beliebige Geraden m, n, p, q gegeben, so daß keine drei kopunktal sind, die sich in den Punkten A, B, C, D, E, G schneiden (Fig. 1). Mit Einem solchen vollständigen Vierseit (m, n, p, q) lassen sich auf verschiedene Weise verschiedene Kurven in die Verbindung bringen. Dabei sind die zirkulären Kurven, wie auch die Brennpunktskurven in Büscheln solcher Kurven besonders interessant.

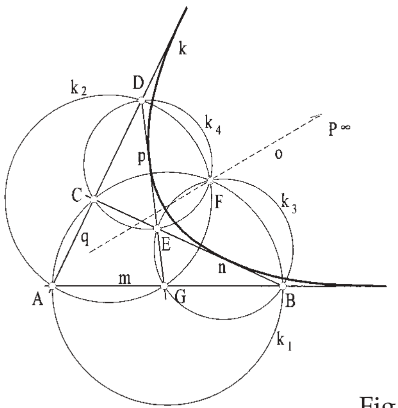

Fig. 1

1. Der Parabelbrennpunkt

Wie bekannt, bestimmen die vier Berührungsgeraden m, n, p, q eine einzige Parabel k. Der Brennpunkt dieser Parabel ist der gemeinsame Schnittpunkt F jener vier Kreise k_1, k_2, k_3, k_4, welche den Dreiecken ABC, AGD, BGE, CDE umgeschrieben sind (Fig. 1) [3]. Die Kreise k_1, k_2, k_3, k_4 sind nämlich, die Brennpunkskreise der vier durch die Grundtangenten m, n, q; m, p, q; m, n, p bzw. n, p, q bestimmten Parabelscharen, die die gemeinsame Parabel k enthalten [3].

2. Die Brennpunktskurve im KS-Schar

Betrachtet man die Geraden m, n, p, q als die Grundtangenten einer KS-Schar, enthält das *Brennpunktsgebilde* dieser Schar die Punkte A, B, C, D, E, F, G, die absolute Punkte und den Fernpunkt P^∞ der Parabel k. Es handelt sich dabei um eine *zirkuläre Kurve f^3 dritter Ordnung*, die im allgemeinen vom Geschlecht Eins oder Null sein kann, oder in eine Gerade und einen Kreis zerfällt [3], [4]. Der Typus dieser Kurve hängt nur davon ab, ob die gegebene KS-Schar keinen (Fig. 2a), einen oder zwei Kreise enthält. Existiert ein Kreis k in KS-Schar, wird der Kreismittelpunkt O zu einem Doppelpunkt der Brennpunktskurve (Fig. 2b). Existieren in KS-Schar zwei Kreise k_1, k_2, zerfällt die Brennpunktskurve in einen Kreis f^2 und eine Gerade f, die die Mittelpunkte 0_1, 0_2 dieser zwei Kreise enthalten (Fig. 2c). Es scheint interessant zu zeigen, auf welche Weise diese Brennpunktskurve konstruiert werden kann. Darüber aber etwas später.

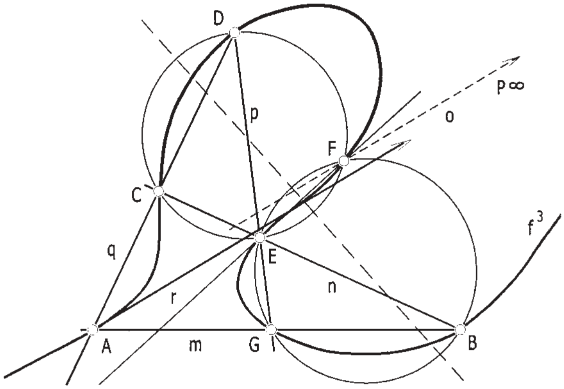

Fig. 2a

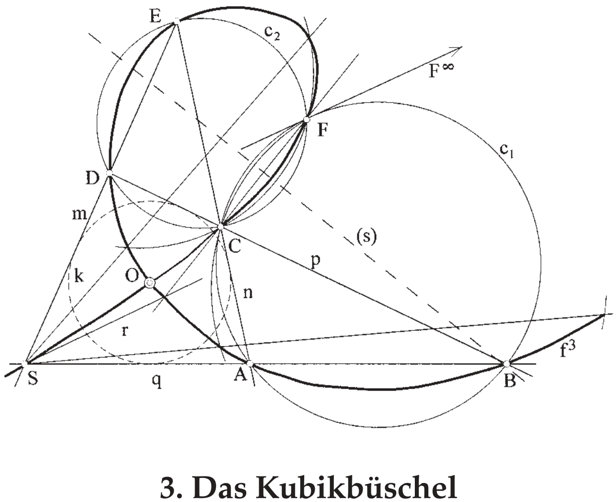

Fig. 2b

3. Das Kubikbüschel

Durch die Schnittpunkte A, B, C, D, E, F, G gegebener Geraden wird ein Büschel (K^3) zirkulärer Kurven dritter Ordnung bestimmt. Die Brennpunktskurve f^3 der oben erwähnter KS-Schar is nur eine der Kurven aus diesem Büschel (K^3). Man be-

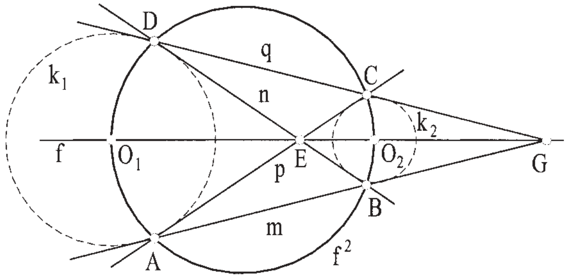

Fig. 2c

achte, dass das Büschel (K^3) vier entartete zirkuläre Kurven dritter Ordnung enthält, die sich in je einen Kreis und eine Gerade zerfallen. Es sind dies genau die folgenden Kurven: $K_1 = \{k_1 + p\}$, $K_2 = \{k_2 + n\}$, $K_3 = \{k_3 + q\}$, $K_4 = \{k_4 + m\}$ (Fig. 3). Somit kann dieses Büschel durch beliebige zwei dieser vier entarteten Kurven aufgespannt werden. [3].

Jede Kubik aus dem Büschel (K^3) besitzt bekanntlich einen einzigen vierfachen (singulären) Brennpunkt und alle diese Brennpunkte zum Büschel (K^3) bilden eine neue zirkuläre Kurve. In [3] [4] wurde folgendes beweisen. Die singulären Brennpunkte aller zirkulären Kubiken liegen auf einem Kreis f der im vorliegenden Fall

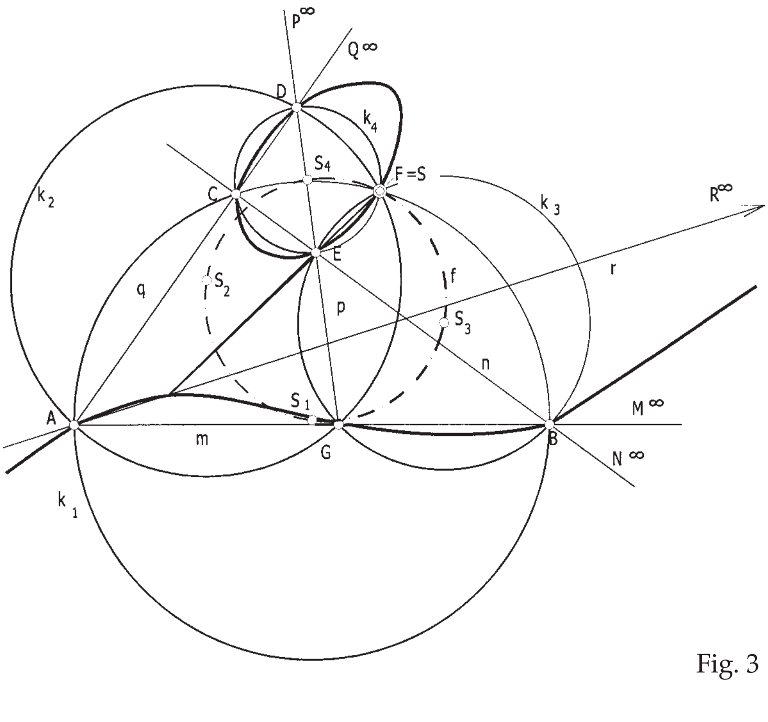

Fig. 3

die Mittelpunkte S_1, S_2, S_3, S_4 der kreisförmigen Komponenten k_1, k_2, k_3, k_4 der singulären Kubiken des Büschels enthält (Fig. 3). Dieser Brennpunktskreis enthältt den Punkt F, woraus folgt, im Kubikbüschel (K^3) existiert immer eine Strophoidale (Fokale) mit singulären Brennpunkt im Punkt F, die im speziellen Fall eine Strophoide sein kann. Man zeigt, diese Fokale ist die genau erwähnte Brennpunktskurve f^3 der durch m, n, p, q gegebener KS-Schar $\{K^2\}$.

Der Brennpunktskreis f aller vierfachen Brennpunkte des Kubikbüschels (K^3) ermöglicht den vierfachen Brennpunkt jeder zirkulären Kubik aus dem Büschel (K^3) konstruktiv einfach zu bestimmen. Man kann nämlich, eine projektive Zuordnung unter die reellen Fernpunkte der Kubiken und die zu den Kubiken gehörigen vierfachen Brennpunkte herstellen. Diese Zuordnung wird z.B. durch die Mittelpunkte S_1, S_2, S_3 der Kreise k_1, k_2, k_3 als den singulären Brennpunkten der entarteten Kubiken des Büschels und den zugeordneten Fernpunkten der Geraden p, n, q, bestimmt: $S_1 \Leftrightarrow P^\infty$, $S_2 \Leftrightarrow N^\infty$, $S_3 \Leftrightarrow Q^\infty$. Jede zirkuläre Kubik des Büschels (K^3) besitzt einen reellen Fernpunkt R^∞ dem ihr singulärer Brennpunkt $S \in f^3$ projektiv zugeordnet ist und mittels dieser Projektivität konstruiert werden kann.

Es stellt sich die Frage, wie man eine bestimmte, einen beliebigen Punkt enthaltende zirkuläre Kubik des Büschels (K^3) konstruieren kann. Diese Konstruktion kann durch eine Projektivität der Kreise eines Kreisbüschels, z.B. (k^2) mit den Grundpunkten E und F und der Geraden eines Geradenbüschels (A) ausgeführt werden (Fig. 3). Dabei sind die Kreise k_4 und k_3 den Geraden q und m zugeordnet, und dem entarteten Kreis $EF \cup p^\infty \in (k^2)$ ist eine beliebige Gerade $r \in (A)$ zugeordnet. Der Fernpunkt $R^\infty \in r$ wird dann ein einziger reeller Fernpunkt der so erzeugten Kubik. Enthält die Gerade r speziell den Fernpunkt der Parabel k, so wird die erzeugte Kubik die Brennpunktskurve f^3 der KS-Schar $\{K^2\}$ und der dem Punkt R^∞ zugeordneter singulärer Brennpunkt fählt in den Punkt F.

4. Die Brennpunktskurve im Quartikbüschel

Mit vier gegebenen Geraden m, n, p, q kann man noch einen Büschel und zwar *bizirkulärer Kurven vierter* Ordnung in Verbindung bringen.

Die Fußpunktkurve einer Kurve zweiter Klasse ist bekanntlich eine rationale bizirkuläre Kurve vierter Ordnung mit dem reellen Doppelpunkt in dem Fußpunkterzeugungspol [2]. Mit einem fixen Pol R der Fußpunkerzeugung erhält man so aus der gegebenen KS-Schar $\{K^2\}$ ein Büschel rationaler bizirkulärer Kurven vierter Ordnung (K^4). Alle solche Fußpunktkurven enthalten den Fußpunkterzeugungspol R als den gemeinsammen Doppelpunkt und die vier Fußpunkte M, N, P, Q, der Normalen, die aus dem Pol R auf diese Grundtangenten gezogen sind.

So kann man beweisen den folgenden Satz.

Satz 1. *Durch einen Doppelpunkt R und vier einfache Punkte M, N, P, Q sei ein Büschel rationaler bizirkulären Kurven vierter Ordnung (K^4) gegeben. Die vierfachen Brennpunkte aller Quartiken dieses Büschles bilden eine zirkuläre Kurve dritter Ordnung. Im all-*

gemeinen ist diese Brennpunktskurve vom Geschlecht Eins. Enthält das Quartikbüschel (K^4) eine Pascal-Schnecke, so ist die Brennpunktskurve vom Geschlecht Null. Falls das Quartikbüschel zwei Pascal-Schnecken enthält, entartet die Brennpunktskurve in einen Kreis und eine Gerade (Fig. 4).

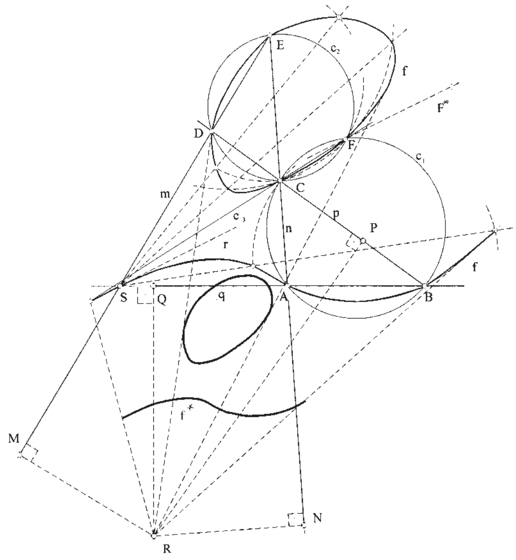

Fig. 4

Beweis.

Wir fassen M, N, P, Q als Fußpunkte eines Vierseits $\{m, n, p, q\}$ für den Punkt R als Pol auf. Jede der in Satz 1 genannten Kurven des Büschels (K^4) besitzt bekanntlich zwei singuläre Brennpunkten, die die Abstände zwischen dem Fußpunkterzeugungspol R und den beiden Brennpunkten des bestimmten Kegelschnittes halbieren [2].

So folgt, alle singuläre Brennpunkte aller bizirkulären Kurven des Büschels (K^4) befinden sich auf einer Kurve die homothetisch zu der Brennpunktskurve der zum Vierseit $\{m, n, p, q\}$ gehörigen KS-Schar steht. Das Homothetiezentrum befindet sich dabei im Doppelpunkt R und der Homothetie-Koefizient beträght $k=1/2$. Im allgemeinen ist also die Brennpunktskurve aller vierfachen Brennpunkte im Büschel (K^4) eine zirkuläre Kurve dritter Ordnung vom Geschlecht Eins.

Im Fall, wann die Grundkegelschnittschar einen Kreis enthält, ist die Fußpunktkurve dieses Kreises eine Pascal-Schnecke. Aus bisherigen Betrachtungen folgt daß in diesem Fall die Brennpunktskubik vom Geschlecht Null wird (vgl. Fig. 2b). Die Existenz zweier Paschal-Schneken verursacht deutlich, den Zerfall der Brennpunktskurve (vgl. Fig. 2c).

LITERATUR:

[1] Cesarec, R: *Analitička geometrija linearnog i kvadratnog područja*, Školska knjiga, Zagreb, 1957.

[2] Niče, V.: *O fokalnim osobinama bicirkularnih krivulja i nekih ciklida 4. reda*, RAD JAZU, 296, (1953), 184-197.

[3] Sliepčević, A: *Žarišne krivulje u pramenovima krivulja u realnoj projektivnoj, hiperboličkoj i izotropnoj ravnini*, doktorska disertacija, Zagreb, 1998.

[4] Sliepčević, A.: *Das Brennpunktsgebilde im Büschel zirkulärer Kurven dritter Ordnung*, RAD JAZU, mat. (444)8(1989), 93-96.

Abstract

By one fixed quadrangle is brought the pencil of conics, pencil of the circular cubics and the pencil from bicircular curve of the fourth degree. Constructivelly, some curves are derived from these pencils as well as their focal curves. It is proved the focal curve in the pencil of bicircular quartics is a circular cubic.

O cirkularnim krivuljama četverostrana

Ana Sliepčević

SAŽETAK

U vezi s danim četverostranom promatraju se: pramen konika, pramen cirkularnih kubika i pramen bicirkularnih kvartika. Tim pramenovima konstruirane su fokalne i još neke druge krivulje. Dokazuje se da fokalna krivulja pramena bicirkularnih kvartika jedna cirkularna kubika.

Key words: quadrangle, pencil of conics, circular cubic, bicircular quartic, focal curve

Ana Sliepčević,
Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu,
10000 Zagreb, Kačićeva 26, Croatia
E-mail: anas@grad.hr