Matka 22 (2013./2014.) br. 87

TRI RJEŠENJA JEDNE KVADRATNE DIOFANTSKE[1] JEDNADŽBE

Šefket Arslanagić, Sarajevo, BiH

Rješavanje linearnih Diofantskih jednadžbi s dvije ili više nepoznanica ne predstavlja nam neki veliki problem jer tu postoje „uhodani putovi" kako doći do rješenja u skupu $\boldsymbol{N}$ ili u skupu $\boldsymbol{Z}$. No, rješavanje nelinearnih Diofantskih jednadžbi s dvije ili više nepoznanica često predstavlja kudikamo teži posao jer tu nema nekih poznatih metoda njihovog rješavanja nego su bitne ideje koje će nas dovesti do rješenja.

U ovom članku bavit ćemo se rješavanjem jedne kvadratne Diofantske jednadžbe čija rješenja pripadaju skupu prirodnih brojeva. Riječ je o sljedećoj jednadžbi:

$$2(x+y)+xy=x^2+y^2;\ (x, y \in \boldsymbol{N}) \tag{1}$$

Sada ćemo prikazati tri različita načina rješavanja ove jednadžbe.

Rješenje 1. Dana jednadžba je nakon množenja brojem 2 ekvivalentna jednadžbi

$$2x^2+2y^2-2xy-4x-4y=0,$$

odnosno

$$\left(x^2-4x+4\right)+\left(y^2-4y+4\right)+\left(x^2-2xy+y^2\right)=8$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-2)^2+(x-y)^2=8.$$

Broj 8 možemo napisati kao zbroj triju kvadrata na jedan od sljedećih načina:

$$4+4+0=8$$
$$4+0+4=8$$
$$0+4+4=8$$

Dakle, imamo ova tri slučaja:

1° $x-2=2$, $y-2=2$, $x-y=0$, odakle je $x=4$ i $y=4$, tj. $(x, y)=(4, 4)$.

2° $x-2=2$, $y-2=0$, $x-y=2$, odakle je $x=4$ i $y=2$, tj. $(x, y)=(4, 2)$.

3° $x-2=0$, $y-2=2$, $x-y=-2$, odakle je $x=2$ i $y=4$, tj. $(x, y)=(2, 4)$.

Znači, imamo sljedeća rješenja jednadžbe (1):

$$(x, y) \in \{(4, 2), (2, 4), (4, 4)\}.$$

[1]Diofant (3. st.), starogrčki matematičar

Rješenje 2. Dana jednadžba (1) ekvivalentna je sljedećoj jednadžbi:

$$8\left(x+y\right)=4x^2-4xy+4y^2,$$

odnosno, budući da je $3\left(x-y\right)^2\geq 0$, vrijedi

$$8\left(x+y\right)=\left(x+y\right)^2+3\left(x-y\right)^2\geq\left(x+y\right)^2.$$

Dakle, dobivamo:

$$8\left(x+y\right)\geq\left(x+y\right)^2, \text{ tj.}$$

$$x+y\leq 8. \qquad (2)$$

Napišemo li danu jednadžbu (1) u obliku:

$$x^2-xy+y^2=2\left(x+y\right),$$

a budući da je $2(x+y)$ paran broj, zaključujemo da i broj x^2-xy+y^2 također mora biti paran broj, što je ispunjeno samo u slučaju kada su brojevi x i y oba parni. Zbog (2) u obzir dolaze samo sljedeći parovi:

(2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 2), (6, 2), (4, 4).

Izravnom provjerom u (1) lako utvrđujemo da u obzir dolaze samo parovi: (4, 2), (2, 4) i (4, 4), što znači da su rješenja jednadžbe (1): $(x, y)\in\{(4, 2), (2, 4), (4, 4)\}$.

Rješenje 3. Ovo je rješenje nešto teže, ali je vrlo zanimljivo i poučno. Napišimo danu jednadžbu (1) u obliku:

$$x^2-\left(y+2\right)x+\left(y^2-2y\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x-\frac{y+2}{2}\right)^2-\left(\frac{y+2}{2}\right)^2+y^2-2y=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\quad-\frac{y+2}{2}\right)+\frac{3y\quad-12y-4}{4}=$$

$$\Leftrightarrow\left(x-\frac{y+2}{2}\right)^2=\frac{-3y^2+12y+4}{4}$$

$$\Leftrightarrow x-\frac{y+2}{2}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{-3y^2+12y+4}.$$

Mora biti $-3y^2+12y+4\geq 0$, odnosno $3y^2-12y-4\leq 0$, a odavde:

$$3\left(y^2-4y-\frac{4}{3}\right)\leq 0$$

$$\Leftrightarrow 3\left[\left(y-2\right)^2-4-\frac{4}{3}\right]\leq 0$$

$$\Leftrightarrow (y-2)^2 - \frac{16}{3} \le 0$$

$$\Leftrightarrow (y-2)^2 \le \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow |y-2| \le \frac{4}{\sqrt{3}},$$

odnosno zbog $\frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$:

$$|y-2| \le \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{4\sqrt{3}}{3} \le y-2 \le \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow 2-\frac{4\sqrt{3}}{3} \le y \le 2+\frac{4\sqrt{3}}{3},$$

a odavde zbog $y \in \boldsymbol{N}$:

$$y \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Sada imamo ova četiri slučaja:

1° $$y = 1 \Rightarrow 2(x+1) + x = x^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{13}{4}$$

$$\Leftrightarrow x-\frac{3}{2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{13}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2} \notin \boldsymbol{N}.$$

Dakle, ovaj slučaj otpada.

2°
$$y=2\Rightarrow 2(x+2)+2x=x^2+4$$
$$\Leftrightarrow x^2-4x=0$$
$$\Leftrightarrow x(x-4)=0$$
$$\Leftrightarrow x=0 \ \vee \ x=4.$$

Budući da je $x = 0 \notin \boldsymbol{N}$, to je $x = 4$, pa je rješenje jednadžbe (1): $(x, y) = (4, 2)$.

3°
$$y=3\Rightarrow 2(x+3)+3x=x^2+9$$
$$\Leftrightarrow x^2-5x+3=0$$
$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}+3=0$$
$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{13}{4}$$
$$\Leftrightarrow x-\frac{5}{2}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{13}$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{13}}{2}\notin \boldsymbol{N}.$$

Znači da i ovaj slučaj otpada.

4°
$$y=4\Rightarrow 2(x+4)+4x=x^2+16$$
$$\Leftrightarrow x^2-6x+8=0$$
$$\Leftrightarrow (x-4)(x-2)=0$$
$$\Leftrightarrow x=4 \ \vee \ x=2.$$

Za $x = 4$ dobivamo iz (1): $y = 4$, a za $x = 2$ slijedi iz (1) da je $y = 4$, tj.

$$(x, y) \in \{(4, 4), (2, 4)\}.$$

Dakle, iz slučaja 2° i 4° dobivamo rješenja dane jednadžbe (1):

$$(x, y) \in \{(4, 2), (2, 4), (4, 4)\}.$$

Literatura

1. Arslanagić, Š., *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.