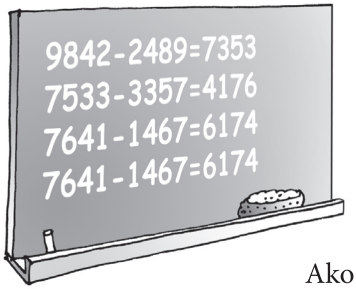
Matka 22 (2013./2014.) br. 87

KAPREKAROV BROJ

Željko Brčić, Vinkovci

Prirodni brojevi imaju mnogo različitih svojstava, a one koji nam mogu biti korisni pri izvođenju različitih matematičkih postupaka učimo u osnovnoj školi. No, postoje i svojstva koja nisu posebno korisna, ali su vrlo zanimljiva. U ovom članku riječ je o jednom takvom, zanimljivom, pa možda i čudnovatom svojstvu prirodnih brojeva.

Izaberite bilo koji četveroznamenkasti broj koji ima barem dvije različite znamenke. Preuredite redoslijed znamenki izabranog broja tako da prvo dobijete najveći mogući broj (znamenke u padajućem nizu), a zatim i najmanji mogući broj (znamenke u rastućem nizu). Oduzmite manji broj od većeg i ponovite opisani postupak s dobivenom razlikom brojeva. U jednom trenutku (nakon najviše sedam ponavljanja) dobit ćete rezultat 6174 i taj se broj više neće mijenjati daljnjim izvođenjem opisanog postupka.



Pokažimo to na dva primjera:

Krenimo, primjerice, od broja 2894. Od tih znamenki formiramo brojeve 9842 i 2489, te izračunamo razliku 7353. U drugom krugu dobit ćemo brojeve 7533 i 3357, čija je razlika 4176. Treći krug daje brojeve 7641 i 1467, a njihova je razlika 6174. U daljnji postupak nije potrebno ići jer ćemo opet dobiti brojeve 7641 i 1467 te, naravno, jednaku razliku: 6174.

Ako uzmemo neki drugi broj, primjerice 3057, najprije ćemo od brojeva 7530 i 0357 dobiti razliku 7173. Sljedeći krug daje brojeve 7731 i 1377, odnosno razliku 6354. U trećem krugu imamo razliku brojeva 6543 i 3456, odnosno 3087. Četvrti krug daje 8730 i 0378, odnosno 8352. I konačno, u petom krugu imamo 8532 – 2358, što ponovno iznosi 6174.

Opisani postupak otkrio je 1949. godine indijski matematičar **Dattaraya Ramchandra Kaprekar** (1905. – 1986.), pa je po njemu postupak i nazvan Kaprekarov proces. Također, broj 6174 nazvan je Kaprekarov broj (ili Kaprekarova konstanta).

Opisani postupak moguće je primijeniti i na troznamenkaste brojeve, odnosno postoji i troznamenkasti Kaprekarov broj. To je broj 495.

Uzmimo, primjerice, broj 619. Od njegovih znamenaka napravimo najveći i najmanji mogući broj te ih oduzmimo. Od znamenaka dobivene razlike ponovno napravimo najveći i najmanji broj te ponovimo postupak nekoliko puta. Dobit ćemo:

$$961 - 169 = 792$$
$$972 - 279 = 693$$
$$963 - 369 = 594$$
$$954 - 459 = 495$$

Zanimljivo!? Pokušajmo shvatiti zašto se to događa.

Izaberimo bilo koji troznamenkasti broj koji ima barem dvije različite znamenke. Najveću znamenku označimo s a, a najmanju s c. Formiramo dva broja:

$$\overline{abc} = 100a + 10b + c$$

$$\overline{cba} = 100c + 10b + a$$

$$\overline{abc} - \overline{cba} = 100a + 10b + c - 100c - 10b - a = 99a - 99c = 99\,(a - c)$$

Vidimo da dobivena razlika u prvom krugu ne ovisi o vrijednosti znamenke b. S obzirom da su a i c (različite) znamenke, razlika $a - c$ može biti najviše 9, a najmanje 1. Dakle, bez obzira koji troznamenkasti broj izabrali (od 900 mogućih), već u prvom krugu računanja broj mogućih rezultata reducirao se na samo devet. To su brojevi: 099, 198, 297, 396, 495, 594, 693, 792 i 891. Daljnjom primjenom Kaprekarova procesa nad tim brojevima ponovno dobivamo brojeve tog oblika, ali ne sve, nego samo neke od njih. Moguća rješenja u drugom krugu su brojevi 495, 594, 693, 792 i 891, u trećem krugu brojevi 495, 594, 693 i 792, u četvrtom 495, 594 i 693, u petom 495 i 594, a u posljednjem, šestom krugu (ako do njega uopće dođe) moramo dobiti ranije navedeni Kaprekarov broj 495.

Vrlo je slično objašnjenje Kaprekarovog postupka i za četveroznamenkaste brojeve, samo je broj mogućih rješenja, a time i koraka koji vode do Kaprekarovog broja, nešto veći.

Na kraju, pokažimo da dvoznamenkasti Kaprekarov broj ne postoji.

Izaberimo bilo koji dvoznamenkasti broj koji ima različite znamenke. Neka je veća znamenka a, a manja b. Formiramo dva broja:

$$\overline{ab} = 10a + b$$

$$\overline{ba} = 10b + a$$

$$\overline{ab} - \overline{ba} = 10a + b - 10b - a = 9a - 9b = 9\,(a - b)$$

Razlika $a - b$ mora biti broj između 1 i 9, pa je u prvom krugu primjene Kaprekarovog procesa moguće dobiti također devet brojeva: 09, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72 i 81. U drugom krugu moguće je dobiti samo neparne rezultate, odnosno brojeve 09, 27, 45, 63, i 81. Daljnjom se primjenom Kaprekarova procesa broj mogućih rješenja ne smanjuje, točnije, ponovno dobivamo iste te brojeve, samo se oni ciklički izmjenjuju.

Primjerice, 63 – 36 = 27, 72 – 27 = 45, 54 – 45 = 09, 90 – 09 = 81, 81 – 18 = 63, i tako beskonačno u krug... Dvoznamenkasti Kaprekarov broj, dakle, ne postoji.