„INS AND OUTS OF THE MAGIC MÖBIUS STRIP"

Grigor Špalj, XV. gimnazija, Zagreb

Učenici naše škole, XV. gimnazije iz Zagreba, sudjelovali su u dvogodišnjem Comenius projektu pod nazivom Ins and outs of the magic Möbius strip. Partneri u projektu bili su profesori i učenici iz škola Devonport High School for Girls iz Plymoutha u Velikoj Britaniji, Justus-von-Liebig Gymnasium iz Neusäβa u Njemačkoj i Moise Nicoara National College iz Arada u Rumunjskoj. Na četvrtom, ujedno i zadnjem projektnom tjednu, naši su učenici posjetili kolege iz Rumunjske. Nakon dolaska u Arad uputili smo se k našim domaćinima. Imali smo cijeli dan slobodno kako bismo se upoznali i razgledali Arad. Sljedeći dan zaputili smo se prema jednom od najvažnijih kulturnih i religijskih centara Rumunjske, gradu Sibiu (Sibinj).

Na putu do Sibiua prvo smo posjetili dvorac Hunedoara gdje je živio ugarski regent Janoš Hunjadi koji je u epskim narodnim pjesmama opjevan kao Sibinjanin Janko.

Također smo stali u gradu Alba Iulia gdje smo posjetili staru utvrdu. U Sibiuu smo proveli noć, nakon koje smo sljedeće jutro razgledali grad. Poslije razgledavanja zaputili smo se prema Sigisoari, gradu u kojem je 1431. godine rođen poznati vladar Vlad Tepeš, poznatiji kao grof Drakula. Gradska jezgra danas je pod zaštitom UNESCO-a.

Na putu do Turde, naše posljednje destinacije dana, posjetili smo grad Turgu Mures, gdje smo i noćili. U Turdi smo „napunili baterije" za sljedeći dan. Ujutro smo se zaputili prema rudniku soli koji se zove Salina Turda. Tu se sol vadila još od srednjega vijeka, a danas je rudnik turistička atrakcija u kojoj ima svega - raznih atrakcija, muzeja, pa sve do biljara, kuglanja i mogućnosti veslanja po podzemnim vodama.

Sljedeći dan posjetili smo školu naših domaćina, Moise Nicoara National College. Domaćini su organizirali radionicu u kojoj smo od različitih materijala izrađivali Kleinove boce. Zatim smo posjetili Nacionalni park u blizini Arada.

Idući dan zaputili smo se prema jednom od najvećih gradova Rumunjske, Timisoari, nama poznatijem kao Temišvaru, u posjet sveučilištu matematike i informatike Universitatea de Vest din Timisoara. Poslušali smo predavanje o vjerojatnosti i imali prilike pogledati jedno od najbržih računala na svijetu.

Posljednjeg smo dana održavali prezentacije i tako je, nažalost, završio posljednji tjedan našega projekta...

A sad malo matematike. Prema matematičaru Möbiusu (osim Möbiusove trake) ime je dobila i jedna funkcija.

Möbiusova funkcija

Möbiusova funkcija μ je funkcija koja prirodnim brojevima dodjeljuje vrijednosti iz skupa $\{-1, 0, 1\}$. Za 1 se posebno definira $\mu(1) = 1$.

Ako je prirodni broj različit od 1 djeljiv kvadratom nekog prirodnog broja, vrijednost Möbiusove funkcije je 0. Ako broj različit od 1 nije djeljiv kvadratom prirodnog broja, a ima paran broj prostih djelitelja, vrijednost funkcije je 1. Ako broj različit od 1 nije djeljiv kvadratom prirodnog broja, a ima neparan broj prostih djelitelja, vrijednost funkcije je -1.

Evo nekoliko primjera.

Primjer 1. Izračunajmo vrijednost Möbiusove funkcije za brojeve 56, 26, 165.

Rješenje: Rastavimo brojeve na proste faktore:

$56 = 7 \cdot 8 = 7 \cdot 4 \cdot 2 = 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$. Broj 56 djeljiv je kvadratom broja 2 pa je $\mu(56) = 0$.

$26 = 13 \cdot 2$. Broj 26 nije djeljiv kvadratom i ima paran broj prostih djelitelja pa je $\mu(26) = 1$.

$165 = 3 \cdot 5 \cdot 11$. Broj 165 nije djeljiv kvadratom nekog prirodnog broja i ima neparan broj prostih djelitelja pa je $\mu(165) = -1$.

Zadatak 1. Izračunajte vrijednost Möbiusove funkcije brojeva:

a) 13 b) 12 c) 100 d) 2014.

Möbiusova funkcija ima neka zanimljiva svojstva.

Uzmimo na primjer broj $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$. Koliko djelitelja ima broj 70?

Djelitelji su brojevi 1, 2, 5, 7, $(2 \cdot 5)$, $(2 \cdot 7)$, $(5 \cdot 7)$, $(2 \cdot 5 \cdot 7)$. Izračunajmo vrijednosti Möbiusove funkcije za sve djelitelje i zbrojimo dobivene vrijednosti.

$\mu(1) + \mu(2) + \mu(5) + \mu(7) + \mu(2 \cdot 5) + \mu(2 \cdot 7) + \mu(5 \cdot 7) + \mu(2 \cdot 5 \cdot 7) =$

$= 1 + (-1) + (-1) + (-1) + 1 + 1 + 1 + (-1) = 0.$

Zadatak 2. Izračunajte zbroj vrijednosti Möbiusove funkcije za sve djelitelje brojeva:

a) 210 b) 140 c) 2310.

Zadajte sami neki broj i izračunajte zbroj. Rezultat će uvijek biti nula. Možete li objasniti zašto?

Pogledajmo sada umnoške prirodnih brojeva i vrijednosti Möbiusove funkcije.

Zadatak 3. Popunite tablicu:

n	m	$\mu(n)$	$\mu(m)$	$\mu(n \cdot m)$
4	6			
15	10			
30	35			
455	5			
125	18			
110	27			

Zadatak 4. Pronađite još neke primjere brojeva n, m za koje će vrijednost Möbiusove funkcije umnoška $n \cdot m$ biti nula.

Vidimo da je vrijednost Möbiusove funkcije umnoška $n \cdot m$ nula ako je broj n ili broj m djeljiv kvadratom prirodnog broja ili ako brojevi n i m imaju zajednički prosti djelitelj.

Uzmimo sada brojeve koji su relativno prosti i nisu djeljivi kvadratom nekog prirodnog broja.

Zadatak 5. Popunite tablicu:

n	m	$\mu(n)$	$\mu(m)$	$\mu(n \cdot m)$
15	14			
10	231			
5	78			
330	35			

Uočite pravilnost. Kada je vrijednost funkcije $\mu(n \cdot m)$ jednaka 1, a kada je -1?

Možemo zaključiti da za brojeve n i m koji su relativno prosti vrijedi

$$\mu(n \cdot m) = \mu(n) \cdot \mu(m).$$

Možete li objasniti zašto?

Koliko ima brojeva koji su manji od zadanog prirodnog broja n, a nisu djeljivi kvadratom nekog priodnog broja?

Zadatak 6. Koristili smo računalo i dobili ove podatke:

Među brojevima od 1 do 999 950 ima 392 052 brojeva koji su djeljivi kvadratom nekog prirodnog broja. Izračunajte postotak brojeva koji nisu djeljivi kvadratom.

Među brojevima od 1 do 1 000 000 ima 392 074 broja djeljivih kvadratom. Koliki je postotak brojeva koji nisu djeljivi kvadratom?

Za velike brojeve n postotak brojeva između 1 i n koji nisu djeljivi kvadratom približno je $\frac{6}{\pi^2}$ %.

Usporedite postotke koje ste izračunali s brojem $\frac{6}{\pi^2}$ %.