

PICKOVA FORMULA

Tomislav Buhiniček, 4. razred, XV. gimnazija, Zagreb



Matka 22 (2013./2014.) br. 88

Georg Alexander Pick bio je austrijski matematičar židovskog porijekla koji je studirao na sveučilištu u Beču. Poznat je i po tome što je Einsteina upoznao s djelima talijanskih matematičara Curbastra i Civita, koja su Einsteinu pomogla u formiranju teorije opće relativnosti. U svom životu dokazao je mnogo teorema, a neki od njih su formula za likove s cjelobrojnim koordinatama (Pickova formula), Schwarz-Pick lema vezana uz kompleksne brojeve i drugi. Umro je u koncentracijskom logoru Theresienstadt 1942. godine. U ovome članku govorit ćemo o njegovom najpoznatijem teoremu – Pickovoj formuli.

Pick je proučavao trokute čiji su vrhovi u čvorovima mreže, kao što je trokut na slici desno.

Promatrao je tri veličine:

1. površinu trokuta
2. broj čvorova na stranicama trokuta (na slici su to „pune” točke; njihov ćemo broj označavati s B)
3. broj čvorova unutar trokuta (na slici su to „prazne” točke; njihov ćemo broj označavati s I)

Točke je lako prebrojiti pa možemo reći da je u ovome primjeru $B = 4$, a $I = 10$.

Pick je našao povezanost između te tri veličine. Mi ćemo pokušati otkriti tu formulu.

Prvo se podsjetimo kako određujemo površinu trokuta.

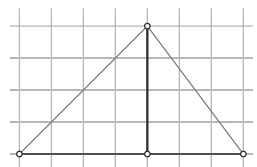
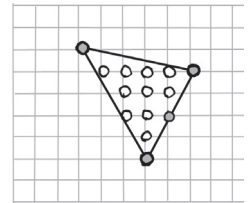
Neka je zadan sljedeći trokut (slika desno).

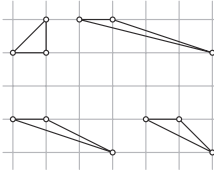
Površina trokuta jednaka je polovini umnoška duljine stranice i duljine visine na tu stranicu. Duljina stranice nacrtanoga trokuta je 7, a duljina pripadne visine 4, pa je površina ovoga trokuta 14.

Sada kada znamo izračunati površinu trokuta, možemo krenuti na određivanje Pickove formule.

Na svakoj će se slici nalaziti određeni broj trokuta pomoću kojih ćemo pokušati naći Pickovu formulu promatrajući veličine koje je i on promatrao.

Za početak, neka su nam zadani sljedeći jednostavni trokuti.





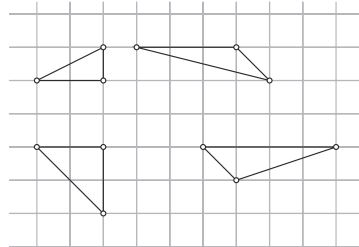
Odredite površinu trokuta sa slike, te broj točaka – čvorova mreže na stranicama i unutar trokuta.

Rezultate zapišite u tablicu

broj čvorova na stranicama <i>B</i>	broj unutarnjih čvorova <i>I</i>	površina <i>P</i>

Sigurno ste izračunali da sva četiri trokuta sa slike imaju jednaku površinu i da ona iznosi 0.5.

Nacrtajmo sada trokute koji sadrže neke čvorove mreže na stranicama.



Ponovo u tablicu zapišite broj čvorova mreže na stranicama, broj unutarnjih čvorova i površinu.

broj čvorova na stranicama <i>B</i>	broj unutarnjih čvorova <i>I</i>	površina <i>P</i>

Možete li naslutiti povezanost između ovih veličina?

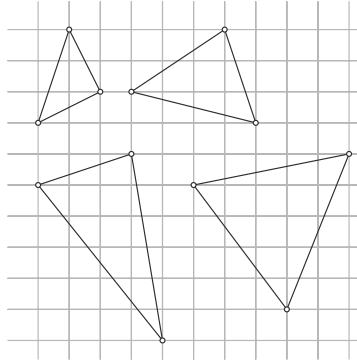
Koliko unutarnjih čvorova imaju svi ovi trokuti?

Kako možemo zapisati površinu pomoću broja čvorova na stranicama?





Sada nacrtajmo još složenije situacije. Neka sljedeći trokuti nemaju čvorova mreže na stranicama (osim vrhova), a sadrže unutarnje čvorove.



Ponovo rezultate zapišite u tablicu.

broj čvorova na stranicama <i>B</i>	broj unutarnjih čvorova <i>I</i>	površina <i>P</i>

Sada se broj unutarnjih čvorova mijenja. Kako taj broj utječe na površinu?

Vjerujem da ste otkrili da vrijedi sljedeća formula:

$$P = \frac{1}{2}B + I - 1$$

Formulu možete provjeriti na sljedećim likovima.

