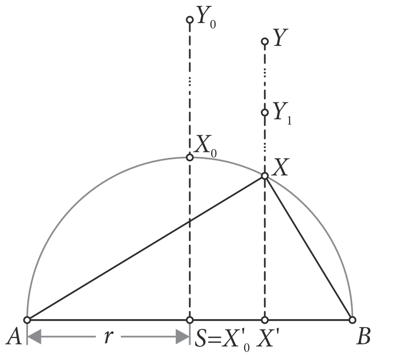
POMIČNA TOČKA NA KRUŽNOM LUKU NAD PROMJEROM

Kajetan Šeper, Slavonski Brod

U jednom odjelu sedmog razreda učenici su se nedavno bavili važnim pojmovima i tvrdnjama o kružnici i krugu. Jednoga dana učiteljica im je zadala sljedeći zadatak.

Zadatak (osnovni). Na kružnom luku nad promjerom $\overline{AB}$ pronađite točku X za koju je zbroj duljina dužina $\overline{AX}$ i $\overline{BX}$ **najmanji**, tj. takvu da je $f(X)=|AX|+|BX|$ najmanji**.** (Vidi sl. 1.)



$$|X'Y_1|=|AX|$$

$$|Y_1Y|=|BX|$$

$$|X'Y|=f(X)$$

$$S=X'_0$$

$$|X'_0Y_0|=f(X_0)$$

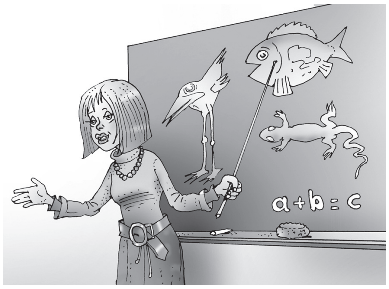
Slika 1.

Nakon neuspješnih učeničkih pokušaja učiteljica im je dopustila zadatak riješiti kod kuće. Kada ga učenici ni uz pomoć roditelja nisu uspjeli riješiti, za pomoć su se obratili matemagičaru Orakulu. Sutradan su učiteljici priopćili Orakulov odgovor:

– *Recite učiteljici da tražene točke X nema.*

Na to im je učiteljica samo mirno rekla:

– *Iako znam da nemate pravo, umjesto zadanog dat ću vam posve drugačiji zadatak.*



Matka 88.indd 234 12.5.2014. 10:22:56

Zadatak (izmijenjeni). Pronađite onu točku X na kružnom luku nad promjerom $\overline{AB}$ za koju je zbroj $f(X)$ **najveći.**

Koristeći se svojim bezuspješnim pokušajima, sada su učenici vrlo brzo pronašli jedno jedino mjesto na kojemu se mora nalaziti tražena točka X. Pokušajte i vi!

NAPUTAK O PRIBLIŽNOM GRAFIČKOM URATKU PRIMJEDBE. DODATNI ZADATAK

Naputak. Odaberite desetak točaka $X = X_1, X_2,...$ na kružnom luku i razmotrite njihove (normalne, ortogonalne) projekcije $X' = X'_1, X'_2,...$ na promjer $\overline{AB}$. Zbrojite duljine dužina $\overline{AX}$ i $\overline{BX}$ tako da na polupravcu $X'X$ dužinu $\overline{AX}$ prikažete dužinom $\overline{X'Y_1}$, a dužinu $\overline{BX}$ dužinom $\overline{Y_1Y}$, dakle da zbroj $f(X)$ prikažete kao duljinu dužine $\overline{X'Y}$. Zbog simetrije dovoljno je odabrati točke X nad polumjerom, primjerice $\overline{SB}$.

Primjedba 1. Umjesto *dužina* $\overline{AX}$ i $\overline{BX}$ možete promatrati pripadne *duljine* $|AX|$ i $|BX|$ ili *udaljenosti d(A,X)* i *d(B,X)* krajnjih točaka A i B od točke X služeći se nekim mjerilom duljine (duljinomjerom).

Primjedba 2. U srednjoj ćete školi taj zadatak moći riješiti *točno* metodama analitičke geometrije i diferencijalnog računa, pomoću koordinata i derivacija. U Naputku se objašnjava kako se Zadatak (izmijenjeni) može riješiti *približno* elementarno grafički samo pomoću crtanja, a moguće i mjerenja (Vidi Primjedbu 1.)

Primjedba 3. Ako poznajete *Pitagorin poučak*, možete na temelju položaja točke X_0 *točno izračunati* najveću duljinu $|f(X_0)| = |SY_0| = 2|AX_0| = 2\sqrt{2}r = \sqrt{2}d$.

Primjedba 4. Poznajete li *Talesov poučak*, možete bez ikakvog crtanja i mjerenja *točno izračunati* zbroj $|f_2(X)| = |AX|^2 + |BX|^2$ kvadrata duljina $|AX|$ i $|BX|$, jer je $|f_2(X)| = |AB|^2 = 4r^2 = d^2$. To znači da zbroj $|f_2(X)|$ ne ovisi o položaju točke X na kružnom luku, nego samo o zadanom polumjeru r ili promjeru d.

Zadatak (dodatni). Istražite ovisnost zbroja $|f_3(X)| = |AX|^3 + |BX|^3$ kubova duljina $|AX|$ i $|BX|$ o položaju točke X na kružnom luku i predočite tu ovisnost krivuljom. (Vidite Naputak i Primjedbu 1.)