Čarobne četvorine (iliti magični kvadrati)

Darko Veljan[1]

O brojevima

Od pradavnih su vremena ljudi očarani, opčinjeni, fascinirani brojevima - ne samo u matematici kao najegzaktnijoj znanosti, nego i u svim ostalim znanostima, filozofiji, umjetnosti i svakodnevnom životu i praksi. Broj je jedan od temeljnih pojmova uopće. Tako je, primjerice, poznati engleski fizičar Lord Kelvin (1824. – 1907.) na jednom predavanju rekao: *Ako nešto ne možete izraziti brojevima, vaše je znanje slabo i neuspješno.* Kelvin, pravim imenom William Thompson, poznat je i po tome da je po njemu nazvana mjera za apsolutnu temperaturu. Apsolutna nula u kelvinima iznosi –273°C.

Zato je od samih prapočetaka, praiskona i praskozorja ljudske civilizacije i kulture, pojam broja i brojenja, te izražavanja količina točnim izrazima bio jedna od najvažnijih ideja u intelektualnom, duhovnom i praktičnom životu te umjetničkom izražavanju. Često i na ulici čujemo frazu da *brojke ne lažu*.

Nije sa sigurnošću utvrđeno kada su ljudi počeli brojiti, to jest u kojem je to točno razdoblju došlo do apstraktnog poimanja brojeva *jedan, dva, tri* itd. kao izraza količine ili pak rednih brojeva *prvi, drugi, treći* itd. Ipak, neka arheološka istraživanja temeljem iskopina, crteža u špiljama, reckama na životinjskim kostima i slično procjenjuju da se to dogodilo između 28 000-30 000 g. pr. Kr.

Potreba ljudi za brojevima i računanjem može se pratiti i u dokumentima koji su „preživjeli" – od starog Babilona i starokineske kulture iz 3000 – 2000 g. pr. Kr., zatim u faraonskom Egiptu oko 1500 g. pr. Kr., pa do helenske, starogrčke kulture oko 700 – 100 g. pr. Kr. Ta se čarolija s brojevima nastavlja preko Rimskog Carstva, da bi se nešto kasnije preko kineske, indijske i arapske kulture ponovo vratila u Europu u 11. – 12. stoljeću. Indijsko-arapske brojke postupno su zamijenile dotadašnje rimske brojke s kojima se nije baš lako računalo (pokušajte za vježbu prepoznati pa onda zbrojiti, oduzeti i pomnožiti rimske brojeve MMMDCCXCVI i MMXCLIIIV). Indijsko – arapski sustav u uporabi je od tada pa do danas.

[1]Darko Veljan, Zagreb

Devet indijskih znamenaka su: 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1. Njima i znakom 0... svaki se broj može napisati kako ću to pokazati u ovoj knjizi.

Tim je riječima svoju znamenitu knjigu *Liber abaci* (Knjiga o abakusu) 1202. godine započeo pisati Leonardo iz Pise, poznatiji kao Fibonacci (oko 1170. – 1240.). Sa svojim je ocem trgovcem još kao dječak putovao po Sredozemlju i tako došao u kontakt s arapskim trgovcima koji su već rabili indijsko-arapski pozicijski (mjesni) sustav zapisa brojeva s bazom 10. Tako npr. 547 znači $5 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 7 \times 10^0$. Nedvojbeno je baza 10 odabrana zbog 10 prstiju. I nazivi su za brojeve od jedan do deset dosta slični u indoarijskim narodima jer su bili potrebni već u razmjeni dobara među tzv. primitivnim plemenima – za razliku od brojeva milijun, milijarda i bilijun koji su nastali znatno kasnije zbog potreba astronomskih računanja i inflacije. Ali, broj 10 je *idealan* broj još od vremena Pitagorejaca.

Naime, starogrčki je učenjak Pitagora (oko 580. – 490. g. pr. Kr.) svoje sljedbenike uvjeravao: *Sve je broj.* Oni su i skovali riječ *filozofija* (ili, kako se davno hrvatski govorilo, „mudroslovlje"), kao i riječ *mathematikoi* (što znači „oni koji su učeni", od čega i riječ „matematika" – ili kratko „matka"). Pitagorejci su tumačili kako je broj 10 (= 1 + 2 + 3 + 4) skladan, idealan broj - sveti „tetractis", tj. sveta četvorka koja simbolizira univerzum - kozmos (svemir) u cjelini. No, nisu samo pitagorejci bili opčinjeni brojevima. Na sličan je način brojevima bila opčinjena i tradicionalna japanska matematika Wasan (11. – 17. st.) na koju se više gledalo kao na umjetnost negoli na njezinu praktičnu primjenu. Ona je slično idealizirala „apstraktni" broj.

Pitagora i njegova škola ipak su ostali najpoznatiji po svome čuvenom poučku: *Kvadrat nad hipotenuzom pravokutnog trokuta jednak je zbroju kvadrata nad obje katete* ($a^2 + b^2 = c^2$). Riječ „kvadrat" dolazi od latinske riječi *quator*, što znači „četiri". Hrvatski naziv za kvadrat jest četvorina. Uostalom, kaže se četvorni metar. Pravokutnik se još naziva i pačetvorina. Stoga Pitagorin poučak možemo (bez latinizama i grecizama) izreći i ovako: *Četvorina nad najduljom stranicom pravokutnog trokuta jednaka je zbroju četvorina nad ostale dvije stranice.*

Pitagorejci su isto tako prvi uočili jednostavne harmonije (skladnosti) u glazbi i opisali ih u omjerima cijelih brojeva 1 : 2, 2 : 3, 3 : 4, 5 : 8 itd. Prvi su proučavali razliku među parnim i neparnim brojevima. Tako su u početnim misterijima i fantazijama neparnim brojevima pridavali muške, a parnima ženske značajke. Svakoj su pojedinoj brojci pridavali posebna svojstva. Broj 1 bio je smatran izvorom svega pa nije ni smatran brojem. Geometrijski su ga zamišljali kao točku. Broj 2 bio je prvi ženski broj, kao i broj mišljenja i dijeljenja. Geometrijski su ga prikazivali kao pravac (određen s dvije točke). Slične su sentimente odražavali i stari kineski vjerski kozmolozi sa svojim yin-yang simbolima: yin je ženski, a yang muški znak. Broj 3 je prikazivao sklad, geometrijski prikazan kao trokut, a broj 4 predstavljao je pravdu i red, a geometrijski je bio prikazan kao tetraedar (trostrana piramida). Broj 5 simbolizirao je zdravlje i preko božice zdravlja Higije poistovjećen je s peterokrakom zvijezdom. Broj 6 prvi je „savršeni broj" jer je jednak zbroju svih svojih pravih djeljitelja, 6 = 1 + 2 + 3, itd.

Danas već i mala djeca znaju ponešto o malim prirodnim brojevima 1, 2, 3..., a učenici tijekom školovanja dobivaju i prve netrivijalne spoznaje o brojevima - prirodnim, cijelim, pa racionalnim (razlomcima) kao što su $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{-7}{4}$, itd. Pri kraju osnovne škole upoznaju se s iracionalnim brojevima kao što su $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, broj π (približno 3.14159265…) jednak omjeru opsega i promjera kružnice te još ponekim od iracionalnih brojeva.

Mnogi ljudi dobro i brzo računaju (i bez računala), a neki dobro računaju i napamet te znaju poneke složenije činjenice o brojevima. Znati ponešto o brojevima danas spada u opću kulturu. Mnogi ljudi vole „mozgalice" s brojevima kao što su, primjerice, brojevna slagalica japanskog naziva *sudoku* ili brojčana križaljka *kakuro*, pa *hashi, arukone* i druge mozgalice (ili prema ruskom *glavolomke*, odnosno *puzzles* u engleskom jeziku) koje se svakodnevno pojavljuju u novinama diljem svijeta ili kao mozgalice na mreži.

No, ipak su vrlo rijetki istinski „umjetnici brojeva". Jedan od takvih bio je genijalni Indijac Srinivasa Ramanujan (1887. – 1920.). Jednom ga je navodno u bolnicu došao posjetiti poznati engleski matematičar G. Hardy koji se i sam bavio teorijom brojeva, usput mu spomenuvši kako se upravo dovezao taksijem broj 1729 i kako mu se taj broj ne čini osobitim. Ramanujan je gotovo odmah odgovorio: *Ne, ne, naprotiv! To je vrlo zanimljiv broj. To je najmanji broj koji se može na dva načina prikazati kao zbroj dvaju kubova:* $1729 = 10^3 + 9^3 = 12^3 + 1^3$. Drugom je prilikom za broj 1 234 567 891 u hipu ustanovio da je prost broj (tj. djeljiv samo sa sobom i brojem 1).

Još jedan „umjetnik brojeva" bio je čuveni Paul Erdös (1913. – 1996.) o kojemu je P. Hoffman napisao knjigu pod naslovom *The Man Who Loved Only Numbers* (Hyperion, New York, 1998.). I Erdös je već kao dijete napamet množio troznamenkaste brojeve. Ali, što je važnije, postavio je i riješio na tisuće problema, a najviše iz teorije brojeva, ali i iz geometrije, kombinatorike, teorije grafova, analize, i drugih grana. O njemu vidi članak u *Matki* (D. Veljan, *Paul Erdös*, Matka, br. 24 (1998.).

Upravo smo spomenuli teoriju brojeva. To je jedna od temeljnih i najstarijih grana matematike koja se, naravno, bavi (uglavnom cijelim i racionalnim) brojevima. Suvremena se teorija brojeva dijeli na mnoga podpodručja, npr. na aritmetiku i elementarnu teoriju brojeva, zatim na algebarsku, analitičku, kombinatornu, geometrijsku i druge. Danas je teorija brojeva vrlo važna i u primjenama, npr. u teoriji kodiranja, koja pak služi za tajnost čuvanja i prenošenja povjerljivih podataka računalima i drukčije. Npr., odavno znamo da se svaki broj može jednoznačno rastaviti na proste faktore (umnoške). Recimo, $2012 = 2 \times 1006 = 2 \times 2 \times 503$, a 2 i 503 su prosti brojevi, čime je rastav dovršen (jer nije teško provjeriti da je 503 prost broj – učinite to sami bez računala!). Ali, kako to učiniti s enormno velikim brojevima u realnom vremenu? To je velik problem koji još ne znamo riješiti (o tome ćemo i malo poslije reći nešto više).

No, osim ove znanstvene, postoje i razna opskurna i bizarna djelovanja poput „numerologije" u smislu vjerovanja u određene ljudske karakterne osobine i proricanja budućnosti vezane uz brojeve. Numerologija (lat. *numero* – broj, *logos* – znanost) nije znanost o brojevima, kako to mnogi ljudi misle, kao što ni isto tako bizarna „astrologija" nije zvjezdoznanstvo, odnosno znanstveno podpodručje astrofizike koje se zove astronomija.

Čini se, da se malo našalimo, da je i dalje glavni problem numerologije i astrologije izbrojiti koliko anđela stane na vrh igle?!

Na kraju ove naše uvodne priče o brojevima ne treba trošiti puno riječi nego valja kazati da su i računala – bitni strojevi današnjice – temeljena na brojevima i računanju pomoću njih. Danas se sve *digitalizira*, što dolazi od engl. riječi *digit*, što znači „znamenka", „brojka", a što pak dolazi od lat. *digitus*, što znači „prst".

Čarobne četvorine

Već je u spomenutome djelu *Liber abaci* Fibonacci s divljenjem opisivao kvadrat (četvorinu), odnosno tablicu razmjera 3×3 ispunjenu brojevima 1, 2, 3..., 9 u kojoj su zbrojevi svakog od redaka, stupaca i dijagonala međusobno jednaki. Kasnije su ih nazvali *magični kvadrati*.

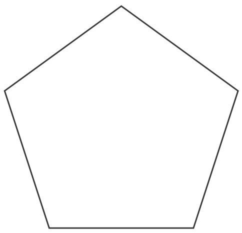
Fibonacci je najpoznatiji po nizu brojeva koji počinje s 0 i 1, a svaki se idući član dobije tako da se zbroje prethodna dva člana: 1 = 1 + 0, 2 = 1 + 1, 3 = 2 + 1, 5 = 3 + 2, 8 = 5 + 3... Dakle, taj niz brojeva koji se zove *Fibonaccijev niz*, glasi:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610... .

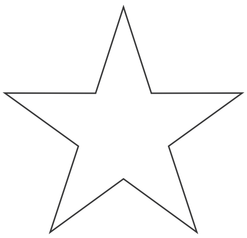
Kasnije su taj vrlo prirodni niz proučavali i mnogi drugi, među ostalima i slavni renesansni slikar, umjetnik, učenjak i izumitelj Leonardo da Vinci (1452. – 1519.). I on je bio općinjen ne samo slikarstvom nego i matematikom-aritmetikom i zakonitostima među brojevima, kao i geometrijom. Zajedno s fra Lucom Paciolijem (1445. – 1517.) napisao je knjigu *De Viribus Quantitatis* (Moć brojeva). Luca Pacioli poučavao je matematiku u Milanu, Rimu, Napulju i našemu Zadru.

Leonardo i fra Luca znali su da se omjeri susjednih Fibonaccijevih brojeva približavaju jednome broju koji je da Vinci nazivao *zlatni omjer* ili *zlatni rez*, da bi ga na koncu prozvao *božanski omjer*. Taj se broj označava sa ϕ (grčko slovo fi, i prva su slova imena Fidije – klasičnog grčkog kipara koji je često rabio zlatni omjer u svojim radovima), koji približno iznosi 1.61803398... Tako je, na primjer, $\frac{8}{5} = 1.6$; $\frac{13}{8} = 1.625$; $\frac{21}{13} \approx 1.61523$; $\frac{34}{21} \approx 1.619$; $\frac{55}{34} \approx 1.617$, i tako u beskonačnost. Točna je vrijednost zlatnog omjera $\phi = \frac{(1+\sqrt{5})}{2}$. Visina i širina okvira glave slavne slike Mona Lise u zlatnom je omjeru.

Koliko je Leonardo cijenio poznavanje i obrazovanost u matematici pokazuju i uvodne riječi u njegovom djelu *Trattato della pitura* (Traktat o slikanju): *Neka moja djela ne čita onaj tko ne poznaje matematiku*. Luca Pacioli je 1509. godine napisao djelo *Divina Proportione* (Božanski omjer), a knjigu je svojim crtežima ilustrirao Leonardo da Vinci. Među ostalima, motivi u tim crtežima bili su mu pravilni peterokut i pentagram (pravilni zvjezdasti peterokut ili, *po naški*, zvijezda petokraka ili peterokraka zvijezda):



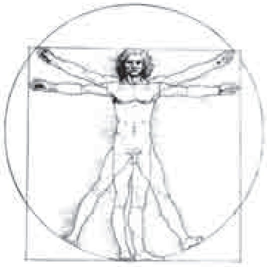
pravilni peterokut



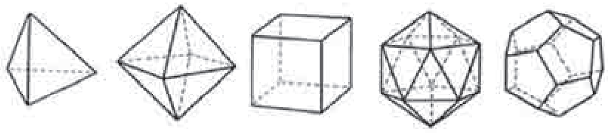
peterokraka zvijezda

Leonardo je dobro poznavao geometriju pravilnog peterokuta. Znao je (a što su znali još i stari Grci) da je omjer duljina dijagonale i stranice pravilnog peterokuta jednak zlatnom rezu. Dužina je nekom točkom podijeljena u zlatnom rezu ako se duljina većeg dijela naprama manjem dijelu odnosi kao cijela dužina naprama većem dijelu. Rabeći sličnost trokuta pokušajte dokazati da se doista duljina dijagonale i stranice pravilnog peterokuta odnose u zlatnom omjeru.

U spomenutoj je knjizi u božanskome omjeru i poznata Leonardova slika *Vitruvijev čovjek* na kojoj tjeme glave, vrhovi ruku i nogu (približno) čine vrhove pravilnog peterokuta. Iz sličnih je geometrijskih razloga u toj knjizi oslikao i pravilne poliedre, odnosno tzv. Platonova tijela: tetraedar, kocku, oktaedar, ikozaedar i dodekaedar. Platon (427. – 347. g. pr. Kr.) je bio slavni starogrčki filozof i osnivač čuvene Akademije u kojoj su se obrazovali budući državnici, političari, vojskovođe, filozofi i drugi i u kojoj su se poučavale aritmetika, geometrija, astronomija i glazba pod općim nazivom *matematika*. (Zainteresiranog čitatelja upućujemo na knjigu M. Livija, *Golden Ratio* (Zlatni omjer), Princeton U.P, 2002.)

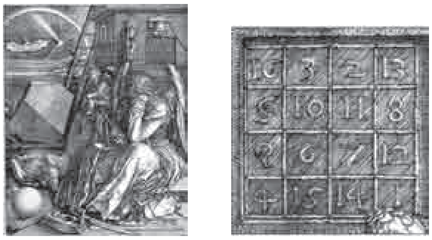


Vitruvijev čovjek

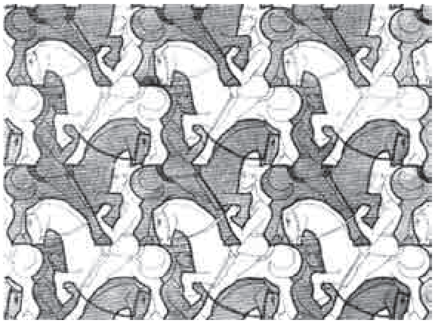


tetraedar, oktaedar, kocka, ikozaedar, dodekaedar

Još jedan slavni renesansni umjetnik kojega je također očaravala matematika bio je njemački slikar i grafičar Albrecht Dürer (1471. – 1528.). Na njegovim najpoznatijim slikama i bakrorezima (kao što je *Melancolia I* i mnoge druge) nalazi se portret matematičara Paciolija i 4×4 magični kvadrat koji su u nekim srednjovjekovnim procesijama prikazivali kao skladne čarobne (umo)tvorine koje će otjerati đavla. Koliko je i Dürer bio izvrstan matematičar pokazuje i to da je jedna njegova slutnja iz geometrije poliedara i dan-danas, nakon 500 godina, još uvijek nerazriješena. I mnogi suvremeniji slikari sljubljeni su s matematičkim idejama. Spomenimo samo nizozemskog slikara Mauritsa C. Eschera (1898. – 1972.), pa Victora Vasarelyja, Rogera Sheparda i druge koji su eksperimentirali s rekurzivnim uzorcima – fraktalima, koji su lijepi i umu i oku (kao što je to i božanski omjer).



Melancolia I (Dürer)



Popločavanje ravnine konjanicima (Escher)

I kao što je zvuk frule očarao austrijskog glazbenog genija Wolfganga Amadeusa Mozarta (1756. – 1791.) kada je skladao *Čarobnu frulu* (*njem*. Zauberflötte, *engl*. Magic flute), tako su i druge umjetnike očarale jednostavne matematičke harmonije - čarobne četvorine iliti magični kvadrati.

Evo konačno i definicije. **Magični kvadrat (čarobna četvorina)** reda n je kvadratna tablica $n \times n$ ispunjena svim brojevima 1, 2, 3..., n^2, tako da je zbroj brojeva svakog retka, svakog stupca i na obje dijagonale jednak.

Magični kvadrati postoje za svako $n > 2$. Evo nekoliko magičnih kvadrata reda $n = 3$:

2	7	6
9	5	1
4	3	8

2	9	4
7	5	3
6	1	8

8	3	4
1	5	9
6	7	2

6	7	2
1	5	9
8	3	4

Svi ovi magični kvadrati zapravo su isti jer se iz jednoga od njih drugi dobiju zrcaljenjima i zakretanjima. Zbroj svakog retka, svakog stupca i obiju dijagonala jednak je *magičnoj sumi* 15. Dakle, magična suma reda 3 je M(3) = 15.

A sada evo dvaju magičnih kvadrata reda n = 4 i jednog reda n = 5:

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

3	16	9	22	15
20	8	21	14	2
7	25	13	1	19
24	12	5	18	6
11	4	17	10	23

Zbroj svakog retka (ili stupca ili dijagonale) magičnog kvadrata reda 4 je M(4) = 34, a reda 5 jednak je M(5) = 65. Lijevi 4 × 4 kvadrat je Dürerov magični kvadrat.

Izvedimo sada formulu za magičnu sumu (ili čarobni zbroj) magičnog kvadrata reda n. Poslužit ćemo se poznatim *Gaussovim trikom* za računanje zbroja prvih n prirodnih brojeva. Iako je o tome više puta pisano u *Matki*, *Poučku*, *Matematičko-fizičkom listu* i drugdje, ukratko je stvar u sljedećem. Želimo izračunati zbroj S = 1 + 2 + 3 + …. + n. Napišimo taj zbroj jednom „normalno", a ispod njega taj isti zbroj „naopako", pa to dvoje zbrojimo (po stupcima):

$$
\begin{array}{l}
S = 1 + \quad 2 \quad + 3 + \ldots\ldots + (n-1) + n \\
S = n + (n-1) + \ldots\ldots\ldots + \quad 2 \quad + \ 1 \\
\hline
2S = (n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1) + (n+1)
\end{array}
$$

Broj pribrojnika (n + 1) jednak je n, dakle je 2S = n(n + 1), odakle slijedi da je

$$S = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Magičnu sumu reda n, broj M(n), dobivamo tako da zbrojimo sve članove magičnog kvadrata reda n, a to znači $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n^2$, pa taj zbroj podijelimo brojem redaka, a to je n jer je u svakom retku jednaka suma. Stoga dobivamo

$$M(n) = \frac{n^2(n^2+1)}{2n} = \frac{n(n^2+1)}{2}$$

Tako je i po ovoj formuli M(3) = 15, M(4) = 34, M(5) = 65, pa M(6) = 111, M(7) = 175, M(8) = 260, M(9) = 369 itd.

Kako smo konstruirali 5 × 5 magični kvadrat s prethodne slike? Na kvadratičnom papiru prvo ukoso napišemo glavnu dijagonalu (11, 12, 13, 14, 15), čime smo zapasali 5 × 5 kvadrat. Sada na idućoj paraleli s glavnom dijagonalom lijevo od nje napišemo prethodnih 5 brojeva (6, 7, 8, 9, 10) i još jednu paralelu s prethodnih 5 brojeva (1, 2, 3, 4, 5), a na drugu stranu paralelu s narednih 5 brojeva (16, 17, 18, 19, 20) i napokon zadnju paralelu (21, 22, 23, 24, 25). Brojeve koji su tako upali u kvadrat ostavimo na tim mjestima, a one koji su vani translatiramo za 5 jedinica vodoravno ili vertikalno tako da upadnu u kvadrat (crtajte sliku!). Isti algoritam (postupak) daje magični kvadrat neparnog reda n, a započinje glavnom dijagonalom od $\frac{n(n-1)}{2}+1$ do $\frac{n(n+1)}{2}$. Za vježbu konstruirajte tako čarobne četvorine reda 7, 9 i 11. Algoritam za parne n je sličan, no malo je složeniji.

Navedimo još neka lijepa svojstva Dürerove čarobne četvorine. Prvo, srednja dva broja u zadnjem retku čitana zajedno daju godinu 1514. kad je djelo nastalo. Ne samo da je zbroj svakog retka, stupca i dijagonale jednak 34, nego je i zbroj četiriju brojeva u uglovima kvadrata također 34 (= 4 + 1 + 13 + 16). I središnji kvadrat 2×2 također u zbroju daje 34, a isto tako i četiri kvadrata 2×2 u uglovima daju 34, a ima i drugih uzoraka paralelograma zbroj kojih je 34. Sve te uzorke nalazimo kao rješenja (diofantske) jednadžbe $x + y + z + w = 34$, gdje su $1 \le x < y < z < w \le 16$ prirodni brojevi. Tako je npr. 1 + 8 + 9 + 16 = 34 jedno rješenje. Nađite ih sva.

Zanimljivo je da cijeli Dürerov kvadrat možemo rekonstruirati ako zapamtimo samo prva tri broja u prvom retku: 16, 3 i 2. Tada iz zbroja 34 znamo i četvrti broj prvog retka, 13. Sjetimo se sada Fibonaccijevog niza. Ispod 16 dolazi broj x tako da je zbroj 16 + x sljedeći Fibonaccijev broj 21, tj. 16 + 5 = 21, a ispod 3 dolazi broj 10 jer je 3 + 10 = 13 Fibonaccijev broj, dalje slijedi 2 +11 = 13, a ispod 13 iz prvog retka dolazi 8 jer je 13+ 8 = 21 Fibonaccijev broj. Ali, i 13 + 21 = 34 je Fibonaccijev broj. Tako i u zadnja dva retka imamo 9 + 4 = 13, 6 + 15 = 21, 7 + 14 = 21, 12 + 1 = 13, u zbroju uvijek Fibonaccijev broj!

Desna čarobna četvorina 4×4 s prethodne slike ima druge vrste savršenih simetrija. Pokušajte ih pronaći sami (promotrite sve 2×2 podkvadratiće). Ta se četvorina zove *najsavršeniji magični kvadrat*, a nalazi se ucrtana u jednom indijskom budističkom hramu.

Navedimo još dvije jednostavne čarobne četvorine, reda 5 i reda 6:

12	4	16	8	25
6	23	15	2	19
5	17	9	21	13
24	11	3	20	7
18	10	22	14	1

31	30	2	1	23	24
29	32	3	4	22	21
11	10	17	18	28	27
12	9	20	19	25	26
15	14	34	33	7	8
13	16	35	36	6	5

Evo i dvaju izazovnih zadataka za čitatelje u vezi ove dvije četvorine. Možete li rekonstruirati lijevi magični 5×5 kvadrat ako znate samo vrijednosti i mjesta ovih brojeva: 12, 4, 8, 6, 5, 9, 13, 11, 3, 7, 10, 1? Slično pitanje vrijedi za desnu 6×6 četvorinu – ako znate mjesta i vrijednosti brojeva 30, 1, 4, 21, 10, 20, 25, 15, 5, ali s time da znate da je svaki od navedenih brojeva u 2×2 kvadratiću s uzastopnim brojevima? Zaokružite navedene brojeve, izbrišite preostale, i na posao! Rješenja već imate, ali kako doći do njih?

Na internetu, naravno, možete pronaći na tisuće magičnih kvadrata (engl. *magic squares*). No, kažimo da se u širem smislu magičnim kvadratom može nazvati i bilo koja kvadratna tablica brojeva čiji je zbroj svakog retka, stupca i obiju dijagonala jednak. Primjerice, ako svaki član običnog magičnog kvadrata pomnožimo nekim brojem ili svakom članu dodamo (ili oduzmemo) jedan te isti broj, dobit ćemo magični kvadrat u širem smislu. Postoje i multiplikativni magični kvadrati, gdje umjesto da su zbrojevi isti, jednaki moraju biti umnošci svakog retka, stupca i dijagonala. Umjesto kvadrata (četvorine) možemo proučavati i magične pravokutnike (čarobne pačetvorine) itd. Postoje i konstruirane su i čarobne kocke (iliti magični kubovi) kao trodimenzijski analogoni običnih magičnih kvadrata, pa i višedimenzijske magične hiperkocke. No, o tome nećemo ovom prilikom.

Izvanredno duhovita i šarmantna knjiga C. A. Pickovera, *Wonders of Numbers*, Oxford University Press, New York, 2002., čiji bismo naslov mogli prevesti kao *Čudesa brojeva* započinje *apokaliptičkim magičnim kvadratom* reda 6, čija je magična suma *apokaliptični broj* 666. U knjizi je naveden i tzv. *zrcalni magični kvadrat* u kojemu, ako svakom broju obrnemo znamenke, opet dobivamo magični kvadrat s istom magičnom sumom 242:

96	64	37	45
39	43	98	62
84	76	25	57
23	59	82	78

69	46	73	54
93	34	89	26
48	67	52	75
32	95	28	87

Nije li ovo stvarna ljepota?!

U istoj je knjizi navedena i zaista čudesna čarobna 4×4 četvorina (u širem smislu) u kojoj svaki član sadrži svih 10 znamenaka 0, 1, 2..., 9 (i nijedan ne počinje nulom). Magični zbroj je 4 129 607 358:

1 037 956 284	1 036 947 285	1 027 856 394	1 026 847 395
1 026 857 394	1 027 846 395	1 036 957 284	1 037 946 285
1 036 847 295	1 037 856 294	1 026 947 385	1 027 956 384
1 027 946 385	1 026 957 384	1 037 846 295	1 036 857 294

Što drugo reći nego - fantastično! Nije to jako teško isprogramirati na računalu, ali ipak!

U istoj knjizi, znatiželjni i uvijek gladan noviteta s brojevima, izvjesni dr. Francis Googol luta svijetom i navodi poznate i nepoznate činjenice o brojevima i matematici uopće. *Googol* je inače ime za potenciju 10 na 100. (Za usporedbu, u svemiru koji danas poznajemo ima manje atoma od jednog googola.) Dr. Googol započinje svoj „put oko svijeta" od prve stranice knjige *Čudesa brojeva* na kojoj je i slika apokaliptičnog magičnog kvadrata s apokaliptičnom magičnom sumom 666, a svaki član je prost broj:

3	107	5	131	109	311
7	331	193	11	83	41
103	53	71	89	151	199
113	61	97	197	167	31
367	13	173	59	17	37
73	101	127	179	139	47

Zaista, umjetnost! Morat će to priznati i oni učenici koji *mrze* matematiku, odnosno oni koji od nje više vole društvene znanosti, jezike ili umjetnost. No, već smo vidjeli duboke veze likovne umjetnosti i matematike. Što se pak glazbe tiče, spomenuli smo harmonije i razlomke (oktave, tro-četvrtinski taktove itd.), pa Mozarta, a trebalo bi i Bacha, i Beethovena, i mnoge druge, ali bi nam i za to trebala čitava knjiga. A matematičar i filozof Gottfried W. Leibniz (1646. – 1716.), koji je (istodobno, ali nezavisno od Newtona) otkrio tzv. infinitezimalni račun (derivacije, integrale itd.) rekao je ovo o glazbi: *Glazba je užitak za dušu koji doživljavamo brojeći a da nismo ni svjesni da brojimo*. A uspješna veza umjetnosti dječje proze i logike primjereno je dana u knjizi *Alica u zemlji čudesa*, matematičara koji ju je napisao pod pseudonimom Lewis Carroll (pravim imenom Charles Dodgson, 1832. – 1898.).

Vratimo se još malo na googol. To je, dakle, broj koji nakon brojke 1 ima 100 nula. A sad zamislite jedan googolplex. To je potencija od 10 na googol! Taj broj ima googol nula nakon jedinice. Da ispišemo taj broj kao dekadski, trebale bi nam na tisuće knjiga. A sve to je pak sitnica prema broju googol # googol # .... # googol. Pri tome znak # (povisilica) ima ovo značenje: $a \# b = a^b$, tj. a na potenciju b. Ako se u gornjem broju znak # pojavljuje googol puta, onda je to gotovo nezamislivo velik, ali ipak konačan broj nula nakon jedinice! A sad zamislite da tako velik broj sastavljen od slučajno odabranih brojeva (umjesto jedinice i samih nula) morate rastaviti na proste faktore kako biste razbili šifru, tj. dešifrirali ili dekodirali tajnu poruku. Možda bi i uspjeli (uz puno sreće) nakon par milijardi godina uz istodobni rad svih računala ovoga svijeta!

U knjizi *Matematička čitanka*, Školska knjiga, Zagreb, 1991., nedavno preminulog našeg matematičara Vladimira Devidéa (1925. – 2010.), uz mnoge zanimljivosti vezane za matematiku i umjetnost (npr. reprodukcije slika spomenutog slikara

M. Eschera), naveden je i jedan *šahovski magični kvadrat* 8×8, koji ima i dodatno svojstvo da su četiri manja 4×4 kvadrata u uglovima magični kvadrati u širem smislu, sa zbrojevima redaka, stupaca i dijagonala jednakima 160, dok je magični zbroj čitavog kvadrata, dakako, 260. Evo i te čarobne četvorine:

58	7	29	36	54	11	17	48
59	6	32	33	55	10	20	45
8	17	35	30	12	53	47	18
5	60	34	31	9	56	46	19
62	3	21	44	50	15	25	40
63	2	24	41	51	14	28	37
4	61	43	22	16	49	39	26
1	64	42	23	13	52	38	27

U članku šahista Vladimira Kovačevića, *Veza između kineskog pra-šaha i magičnih kvadrata*, Matka, br.78 (2011.), navodi se *šahovska konstrukcija* magičnog kvadrata reda 3, što je samo inačica algoritma koji smo naveli za sve magične kvadrate neparnog reda (pa je pitanje kako tu šah *pomaže* matematici, kako se pomalo pretenciozno navodi). U istom se članku nalaze tzv. *kineski magični kvadrat* reda 9 i tzv. *indijski (šahovski)* reda 8:

31	36	29	76	81	74	13	18	11
30	32	34	75	77	79	12	14	16
35	28	33	80	73	78	17	10	15
22	27	20	40	44	38	58	63	56
21	23	25	39	41	43	57	59	61
26	19	24	45	37	42	62	55	60
67	72	65	4	9	2	49	54	47
66	68	70	3	5	7	48	50	52
71	64	69	8	1	6	53	46	51

1	58	3	60	8	63	6	61
16	55	14	53	9	50	11	52
17	42	19	44	24	47	22	45
32	39	30	37	25	34	27	36
57	2	59	4	64	7	62	5
56	15	54	13	49	10	51	12
41	18	43	20	48	23	46	21
40	31	38	29	33	26	35	28

I na kraju, nije teško razumjeti zašto su brojevi, a s njima u svezi savršeni sklad i simetrija čarobnih četvorina, zaokupljali maštu i interes (i još uvijek zaokupljaju) znanstvenika, umjetnika i ostalih *običnih* ljudi. O čarobnim bi se četvorinama moglo razglabati i postaviti još niz zanimljivih pitanja.

A što se tiče brojeva općenito, uključujući i magične kvadrate, ostalo je još puno neriješenih i vrlo teških pitanja. Navedimo samo neke od najpoznatijih:

1) Goldbachova slutnja (iz 1742.): Je li svaki parni broj (osim 2) jednak zbroju dva prosta broja? ($4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 5 + 3$, $10 = 7 + 3 = 5 + 5$, $12 = 7 + 5$ itd.)
2) Ima li među Fibonaccijevim brojevima beskonačno mnogo prostih? (Spomenimo ovdje da je prirodni broj N Fibonaccijev ako i samo ako je $5N^2 + 4$ ili $5N^2 - 4$ potpun kvadrat.)
3) Ima li beskonačno mnogo prostih parova blizanaca kao što su (3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31) itd.?
4) Koliko ima magičnih kvadrata reda $n > 5$? Znamo da je samo jedan magični kvadrat reda 3, svi ostali dobiveni su zrcaljenjem i rotiranjem; zna se da magičnih kvadrata reda 4 ima točno 880, reda 5 ih ima točno 275 305 224. Magičnih kvadrata reda 6, koji su bitno različiti, približno ima 1.7745×10^{19}. Dalje se ne zna!

Za one čitatelje koji i dalje ipak više vole jezike, evo umjesto brojčane jedne stare (pomalo zaboravljene) latinske jezične *čarobne četvorine* koja se jednako čita po redcima, stupcima, odozgo, odozdo, slijeva i zdesna.

S	A	T	O	R
A	R	E	P	O
T	E	N	E	T
O	P	E	R	A
R	O	T	A	S

(Značenje: orač, Arepo (ime), s mukom, njivu, ore.)

Kažimo na kraju da su se tijekom duge povijesti *intelektualne znatiželje čovječanstva* magičnim kvadratima, osim već spomenutih, bavili i mnogi poznati matematičari, primjerice čuveni Leonhard Euler (1707. – 1783.), a u današnje vrijeme John Conway, profesor na Sveučilištu Princeton u SAD i mnogi drugi. Postoji i velik broj knjiga posvećenih čarobnim četvorinama. Jedna od najpoznatijih je stara gotovo stoljeće, ona W. S. Andrewsa, *Magic Squares and Cubes*, New York, Dover, 1960. (original tiskan 1917.).