Dokazivanje zadanih nejednakosti pomoću pomoćnih nejednakosti

Šefket Arslanagić[1] i Amar Bašić[2]

Dokazivanje nejednakosti u matematici predstavlja izuzetno zanimljiv i kreativan posao. Tu dolazi do izražaja bogatstvo ideja te primjena nekih poznatih nejednakosti kao što su nejednakosti između brojevnih sredina za dva ili više pozitivnih brojeva, nejednakost trokuta čije su duljine stranica a, b i c, itd. Ako su u pitanju nejednakosti u kojima se javljaju razlomci ili razlomljeni izrazi, većina rješavača nastoji se odmah osloboditi tih razlomaka množeći nejednakost najmanjim zajedničkim višekratnikom nazivnika i tako dobiti ekvivalentnu nejednakost koju bi navodno trebalo biti lakše dokazati. Ali, u praksi to najčešće ne dovodi do rješenja jer je dobivena nejednakost glomazna i teško ju je „ukrotiti".

U ovom ćemo članku, na nekoliko primjera, pokazati kako se neke nejednakosti mogu uspješno dokazivati uz pomoć pomoćnih nejednakosti (koje se lako i brzo dokažu). Vjerujemo da će ovaj članak biti koristan u radu s učenicima koji pokazuju veće zanimanje za matematiku, a posebno s učenicima koji sudjeluju na raznim matematičkim natjecanjima.

Nejednakost 1. Dokažimo da vrijedi nejednakost

$$\frac{1}{2}<\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\ldots+\frac{1}{99}+\frac{1}{100}<1. \tag{1}$$

Dokaz: Množiti ovu nejednakost sa $V(2, 51, 52, \ldots, 100)$ bilo bi totalno besmisleno i pravi *Sizifov posao!* Zato ćemo koristiti dvije pomoćne nejednakosti:

$$\frac{1}{n+k}\geq\frac{1}{2n};\ \left(n,k\in\mathbb{N},\ n\geq k\right) \tag{2}$$

i

$$\frac{1}{n+k}<\frac{1}{n};\ \left(n,k\in\mathbb{N},\ n\geq k\right). \tag{3}$$

Iz (2) i (3) sada slijedi:

$$\frac{1}{51}>\frac{1}{100},\ \frac{1}{52}>\frac{1}{100},\ldots,\frac{1}{99}>\frac{1}{100},\ \frac{1}{100}\geq\frac{1}{100},$$

[1]Šefket Arslanagić, Odsjek za matematiku Prirodno-matematičkog fakulteta u Sarajevu, BiH

[2]Amar Bašić, Sarajevo

Poucak 57.indd 24 1.4.2014. 12:03:50

odnosno

$$\frac{1}{51}<\frac{1}{50},\frac{1}{52}<\frac{1}{50},...,\frac{1}{99}<\frac{1}{50},\frac{1}{100}<\frac{1}{50}.$$

Zbrajajući ove nejednakosti, dobivamo:

$$\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+...+\frac{1}{99}+\frac{1}{100}>50\cdot\frac{1}{100}=\frac{1}{2}$$

odnosno

$$\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+...+\frac{1}{99}+\frac{1}{100}<50\cdot\frac{1}{50}=1.$$

Ovim je dokazana nejednakost (1).

Na potpuno isti način dokazali bismo i poopćenu nejednakost:

$$\frac{1}{2}<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}<1,$$

gdje $n\in\mathbb{N}$ i $n\geq 2$.

Nejednakost 2. Dokažimo da vrijede nejednakosti:

a) $$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq 2\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\right);\ \left(x,y,z>0\right). \qquad (4)$$

b) $$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leq\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{c+a-b}+\frac{1}{b+c-a}, \qquad (5)$$

gdje su a, b, c duljine stranica trokuta ΔABC.

Dokaz: a) Prvo ćemo dokazati jednu jednostavnu pomoćnu nejednakost:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\geq\frac{4}{p+q};\ \left(p,q>0\right). \qquad (6)$$

Množeći nejednakost (6) izrazom $pq\left(p+q\right)>0$, dobivamo ekvivalentnu nejednakost:

$$q\left(p+q\right)+p\left(p+q\right)\geq 4pq$$
$$\Leftrightarrow p^2+q^2-2pq\geq 0$$
$$\Leftrightarrow\left(p-q\right)^2\geq 0,$$

a ova nejednakost uvijek je točna. Zato je točna i nejednakost (6). U nejednakosti (6) znak jednakosti vrijedi ako i samo ako je $p=q$.

Sada na temelju nejednakosti (6) dobivamo sljedeće nejednakosti:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{4}{x+y},$$

Poucak 57.indd 25 1.4.2014. 12:03:50

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{4}{y+z},$$

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\geq\frac{4}{z+x}.$$

Nakon zbrajanja svih ovih nejednakosti, dobivamo sljedeću nejednakost:

$$2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 4\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\right),$$

odnosno

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq 2\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\right),$$ što je trebalo dokazati.

Jednakost u (4) vrijedi ako i samo ako je $x=y=z$.

b) Uočimo da za duljine stranica a, b, c trokuta vrijede nejednakosti $a+b>c$, $b+c>a$, $c+a>b$, tj. $a+b-c>0$, $b+c-a>0$, $c+a-b>0$.

Sada na temelju nejednakosti (6) imamo:

$$\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{b+c-a}\geq\frac{4}{a+b-c+b+c-a}, \text{ tj.}$$

$$\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{b+c-a}\geq\frac{2}{b},$$

te analogno

$$\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}\geq\frac{2}{c},$$

$$\frac{1}{c+a-b}+\frac{1}{a+b-c}\geq\frac{2}{a}.$$

Nakon zbrajanja ovih nejednakosti, dobivamo nejednakost (5). Jednakost u (5) vrijedi ako i samo ako je $a=b=c$ (jednakostranični trokut).

Nejednakost 3. Dokažimo da vrijedi nejednakost:

$$\frac{a+b}{c^2}+\frac{b+c}{a^2}+\frac{c+a}{b^2}\geq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right);\ (a,b,c>0). \qquad (7)$$

Dokaz: Dokazat ćemo prvo pomoćnu nejednakost:

$$\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}\geq\frac{1}{x}+\frac{1}{y};\ (x,y>0). \qquad (8)$$

Nakon množenja nejednakosti (8) izrazom $x^2y^2>0$, dobivamo ekvivalentnu nejednakost:

$$x^3+y^3\geq x^2y+xy^2$$

$$\Leftrightarrow (x+y)(x^2-xy+y^2)-xy(x+y)\geq 0$$

Poucak 57.indd 26 1.4.2014. 12:03:51

$$\Leftrightarrow (x+y)\left(x^2-xy+y^2-xy\right)\geq 0$$
$$\Leftrightarrow (x+y)(x-y)^2\geq 0,$$

a ova je nejednakost točna jer je prema uvjetu zadatka $x, y > 0$.
Jednakost u (8) vrijedi ako i samo ako je $x = y$.

Na temelju nejednakosti (8) dobivamo sljedeće nejednakosti:

$$\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b},$$
$$\frac{c}{b^2}+\frac{b}{c^2}\geq\frac{1}{b}+\frac{1}{c},$$
$$\frac{a}{c^2}+\frac{c}{a^2}\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{c}.$$

Nakon zbrajanja ovih nejednakosti, dobivamo nejednakost (7).
Jednakost u (7) vrijedi ako i samo ako je $a = b = c$.

Nejednakost 4. Dokažimo da vrijedi nejednakost

$$\frac{a}{a^2+1}+\frac{b}{b^2+1}+\frac{c}{c^2+1}\leq\frac{3}{2};\ (a,b,c>0). \qquad (9)$$

Dokaz: Koristit ćemo pomoćnu nejednakost:

$$\frac{x}{x^2+1}\leq\frac{1}{2};\ (x\in\mathbb{R}) \qquad (10)$$
$$\Leftrightarrow x^2+1\geq 2x$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2\geq 0, \text{ što je točno.}$$

Sada na temelju nejednakosti (10) imamo sljedeći tri nejednakosti:

$$\frac{a}{a^2+1}\leq\frac{1}{2},$$
$$\frac{b}{b^2+1}\leq\frac{1}{2},$$
$$\frac{c}{c^2+1}\leq\frac{1}{2}.$$

Nakon zbrajanja ove tri nejednakosti dobivamo nejednakost (9). Jednakost u (9) vrijedi ako i samo ako je $a = b = c = 1$.

Nejednakost 5. Dokažimo da vrijedi nejednakost

$$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+d^2}+\frac{d}{1+a^2}\geq 2, \qquad (11)$$

gdje su $a, b, c, d > 0$ i vrijedi jednakost $a+b+c+d=4$.

Dokaz: I ovdje ćemo prvo dokazati da vrijedi pomoćna nejednakost:

$$\frac{x}{1+y^2} \geq x - \frac{xy}{2}\,;\ \left(x, y > 0\right). \tag{12}$$

Nakon množenja ove nejednakosti s $2\left(1+y^2\right) > 0$, dobivamo ekvivalentnu nejednakost:

$$2x \geq \left(2x - xy\right)\left(1+y^2\right)$$
$$\Leftrightarrow 2x \geq 2x + 2xy^2 - xy - xy^3$$
$$\Leftrightarrow xy\left(y^2 - 2y + 1\right) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow xy\left(y-1\right)^2 \geq 0\text{, što je točno zbog } x, y > 0.$$

Jednakost u (12) vrijedi ako i samo ako je $y = 1$.

Na temelju nejednakosti (12) imamo sljedeće četiri nejednakosti:

$$\frac{a}{1+b^2} \geq a - \frac{ab}{2},$$
$$\frac{b}{1+c^2} \geq b - \frac{bc}{2},$$
$$\frac{c}{1+d^2} \geq c - \frac{cd}{2},$$
$$\frac{d}{1+a^2} \geq d - \frac{ad}{2}.$$

Nakon zbrajanja ovih četiriju nejednakosti dobivamo:

$$\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+d^2} + \frac{d}{1+a^2} \geq a + b + c + d - \frac{1}{2}\left(ab + bc + cd + da\right),$$

odnosno zbog uvjeta $a + b + c + d = 4$ i jednakosti $ab + bc + cd + da = \left(a+c\right)\left(b+d\right)$ slijedi:

$$\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+d^2} + \frac{d}{1+a^2} \geq 4 - \frac{1}{2}\left(a+c\right)\left(b+c\right). \tag{13}$$

Na osnovu nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za dva pozitivna broja $\left(\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy};\ \left(x, y > 0\right)\right)$, imamo:

$$\frac{\left(a+c\right)+\left(b+d\right)}{2} \geq \sqrt{\left(a+c\right)\left(b+d\right)},$$

odnosno zbog uvjeta $a + b + c + d = 4$:

$$\sqrt{\left(a+c\right)\left(b+d\right)} \leq 2,$$

te nakon kvadriranja:

$$\left(a+c\right)\left(b+d\right) \leq 4$$

a odavde nakon množenja s $-\frac{1}{2}$ slijedi:

$$-\frac{1}{2}\left(a+c\right)\left(b+d\right) \geq -2. \tag{14}$$

Poucak 57.indd 28 1.4.2014. 12:03:51

Sada iz (13) i (14) dobivamo danu nejednakost (11). Jednakost u (11) vrijedi ako i samo ako je $a=b=c=d=1$.

Nejednakost 6: Dokažimo da vrijedi nejednakost:

$$\sqrt{\frac{(a+b)(b+c)}{ac}}+\sqrt{\frac{(b+c)(c+a)}{ab}}+\sqrt{\frac{(c+a)(a+b)}{bc}}\geq 3+\frac{a}{\sqrt{bc}}+\frac{b}{\sqrt{ac}}+\frac{c}{\sqrt{ab}}, \quad (15)$$

gdje su a,b,c realni pozitivni brojevi.

Dokaz: Ova nejednakost djeluje zastrašujuće! No, ako dokažemo npr. pomoćnu nejednakost:

$$\sqrt{\frac{(a+b)(b+c)}{ac}}\geq 1+\frac{b}{\sqrt{ac}}, \quad (16)$$

onda ćemo lako dokazati danu nejednakost (15).

Nejednakost (16) je ekvivalentna nejednakosti:

$$\frac{\sqrt{(a+b)(b+c)}}{\sqrt{ac}}\geq\frac{\sqrt{ac}+b}{\sqrt{ac}}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(a+b)(b+c)}\geq\sqrt{ac}+b\,/^2$$
$$\Leftrightarrow (a+b)(b+c)\geq ac+2b\sqrt{ac}+b^2$$
$$\Leftrightarrow ab+ac+b^2+bc\geq ac+2b\sqrt{ac}+b^2$$
$$\Leftrightarrow b(a+c)\geq 2b\sqrt{ac}\,/:2b$$
$$\Leftrightarrow \frac{a+c}{2}\geq\sqrt{ac},$$

a ovo je dobro poznata nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine za dva pozitivna broja a i c koja je točna. Imamo sada još dvije nejednakosti analogne nejednakosti (16) koje glase:

$$\sqrt{\frac{(b+c)(c+a)}{ab}}\geq 1+\frac{c}{\sqrt{ab}} \quad (17)$$

i

$$\sqrt{\frac{(c+a)(a+b)}{bc}}\geq 1+\frac{a}{\sqrt{bc}}. \quad (18)$$

Sada zbrajanjem nejednakosti (16), (17) i (18) dobivamo danu nejednakost (15). Jednakost u (15) vrijedi ako i samo ako je $a=b=c$.

Literatura

1. Š. Arslanagić, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004.
2. B. Pavković, B. Dakić, Ž. Hanjš, P. Mladinić, *Male teme iz matematike* (Mala matematička biblioteka 2 – Hrvatsko matematičko društvo), Element, Zagreb, 1994.

Poucak 57.indd 29 1.4.2014. 12:03:51