IZ NASTAVNE PRAKSE

Periodičnost u svijetu oko nas

Josip Lukač[1]

Nastava matematike u našim osnovnim i srednjim školama često nije dovoljno (u)temeljena na svijetu oko nas, na prirodnim pojavama kojima smo svakodnevno svjedoci. Svako jutro promatramo izlazak, a uvečer zalazak sunca, u svakom trenutku osjećamo rad svoga srca, čujemo na televiziji o pojavi potresa i tsunamija, svjedoci smo velikih temperaturnih promjena, svakodnevno svojim ušima slušamo i primamo informacije. Jesmo li se ikada pitali što je zajedničko svim tim pojavama? Kako matematika nalazi primjenu u njima?

U trećem razredu srednje škole jedna od velikih i važnih nastavnih cjelina su trigonometrijske funkcije koje su specifične po tome što se periodički ponavljaju. Je li moguće pomoću ovih funkcija objasniti gore navedene i mnoge druge pojave? U ovom ćemo članku pokazati da matematičko svojstvo periodičnosti nalazi primjenu u velikom broju pojava iz našega života i svijeta koji nas okružuje. Povest ćemo vas na putovanje kroz svijet prirodnih znanosti – fizike, biologije i geografije – dokazujući da je matematika temelj na kojemu ostale prirodne znanosti objašnjavaju i tumače pojave kojima se bave.

Kalendar

Jeste li se ikada pitali zašto svake 4 godine imamo prijestupnu godinu, tj. godinu s 366 dana? Jeste li se ikada pitali zašto se pomiče sat u proljeće i jesen? Odgovore na ta pitanja daju nam astronomija i astrofizika, znanstvene discipline koje se bave proučavanjem svemirskih pojava. Može se lako shvatiti da odgovor na ova pitanja nije jednostavan. Međutim, ključ je u jednom jedinom podatku koji smo mi dogovorno zaokružili na 365 dana. No, je li to dobro? Astrofizika kaže da to nije dovoljno precizno. Solarna godina je oko 365.2422 dana. Naš kalendar slijedi solarnu godinu, s određenim nadopunama. Riješite ove zadatke i saznajte zašto imamo prijestupnu godinu svake 4 godine i zašto pomičemo sat u proljeće i jesen.

a) Ako svaka kalendarska godina ima 365 dana, za koliko će se dana kalendarska godina razlikovati od solarne godine nakon 100 godina?

b) Ako svaka četvrta godina ima jedan dan više, za koliko će se dana spomenuta dva sustava razlikovati?

[1]Josip Lukač, student pete godine matematike i fizike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu

c) Ako svaka stota godina ima dan manje, za koliko će se dana spomenuta dva sustava razlikovati?

d) Zašto je važno da nema razlike između kalendarske i solarne godine?

Rješenja:

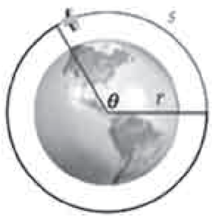
a) Solarna godina ima 365.2422 dana, a naša godina ima 365 dana. Zato moramo promatrati ovaj ostatak koji iznosi 0.2422 dana. Ako njega pomnožimo sa 100 godina, dobit ćemo odgovor za ovaj zadatak. Dakle, $0.2422 \times 100 = 24.22$ dana ili 24 dana 5 sati 16 minuta i 48 s.

b) Svaka četvrta godina ima jedan dan više. Tu godinu zovemo prijestupnom. U 100 godina imamo 25 prijestupnih godina. Zato 25 dana moramo umanjiti za rješenje iz a) dijela zadatka, pa dobivamo: 1 dan 5 sati 16 minuta i 48 s.

c) Ako svaka stota godina ima dan manje, onda taj dan moramo dodati na rješenje iz b) dijela zadatka, pa dobivamo 5 sati 16 minuta i 48 s.

d) Važno je zbog izmjene godišnjih doba koja se mijenjaju prema položaju Sunca. Zemlja obiđe Sunce u jednoj solarnoj godini koja iznosi 365.2422 dana. Kada naš kalendar ne bi slijedio tu solarnu godinu, došlo bi do nepravilne izmjene godišnjih doba, pa ne bismo, na primjer, imali početak jeseni 23. rujna nego kasnije.

Vremenski satelit



Kako meteorolozi predviđaju vremensku prognozu? Kako oni znaju da nam se približava ciklona ili anticiklona? Kako znaju da će određeno područje zahvatiti nevrijeme, a da će neka područja ostati nezahvaćena? U svemiru oko našeg planeta kruže vremenski sateliti. Ovi sateliti imaju vrlo veliku brzinu kojom kruže oko Zemlje i prikupljaju podatke o vremenu. Ti se podatci elektronskim putem šalju u meteorološke postaje gdje se obrađuju i na temelju njih predviđaju vremenski događaji. Vremenski satelit u kružnoj orbiti oko Zemlje prolazi cijelu orbitu svaka 2 sata. Radijus Zemlje je oko 6400 km, a satelitske orbite 2600 km iznad površine Zemlje. Koliki put prijeđe satelit za 1 sat?

***Rješenje*:** Satelit se giba putanjom čiji je polumjer $6400 + 2600 = 9000$ km. Pitamo se koliki put prijeđe satelit u jednome satu ako cijelu orbitu obiđe jednom u dva sata.

Imamo dva načina kako ovo izračunati.

1. način: Satelit za 1 sat prijeđe pola putanje. Budući da je putanja po kojoj kruži satelit kružna, trebamo izračunati poluopseg te putanje. Dobivamo:

$$s = r\pi = 9000\,\pi \text{ km} \approx 28\,274.3 \text{ km}$$

2. način: Izračunamo mjeru središnjeg kuta koji satelit zatvori tijekom puta 1 sat.

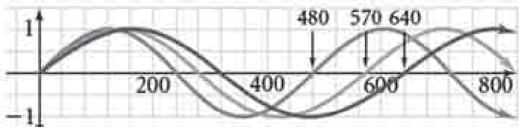
$$\theta = \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi$$

Sada izračunamo duljinu pripadnog kružnog luka:

$$s = r\theta = r\pi = 9000\ \pi \text{ km} \approx 28\ 274.3 \text{ km}$$

Duga

Jedna narodna poslovica kaže: *Poslije kiše dolazi sunce*. Što se dogodi ako kiša ne prestane, a sunce se pojavi na horizontu? Nastane duga. Kako nastaje duga? Sjetimo se fizike 3. razreda. Tamo smo rekli da je svjetlost elektromagnetski val koji se širi u prostoru. Sunčeva svjetlost je bijela svjetlost, što znači da sadrži sve valne duljine vidljivog spektra. Kada takva svjetlost upadne na kapljice kiše, dolazi do loma sunčeve svjetlosti na kapljici. Zraka svjetlosti lomi se dva puta: prvi put prilikom ulaska u kapljicu, a drugi put pri izlasku iz kapljice. Rezultat toga je razdvajanje sunčeve svjetlosti u vidljivi spektar duginih boja. Vidimo da širina pojedinih duginih boja nije jednaka. Razlog tomu je što svaka boja ima svoju određenu valnu duljinu, a time i period. Što je valna duljina pojedine boje spektra veća, to će širina boje prilikom loma biti veća. Na dugi vidimo da crvena boja ima najveću širinu. To je zato što crvena boja ima najveću valnu duljinu u vidljivom dijelu elektromagnetskog spektra. Promjene valne duljine (perioda) mijenjaju boju koju oko percipira. Promjene amplitude utječu na intenzitet boje. Graf na slici prikazuje model valova crvene, plave i žute svjetlosti. Napišite koja funkcija predstavlja svaki od valova. Skala na x-osi je u nanometrima. Budući da je skala u nanometrima, uzmite varijablu θ.



Rješenje: Neka je $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funkcija zadana pravilom pridruživanja $f(\theta)=a\sin b\theta$, pri čemu je $a \neq 0$, $b > 0$ i θ u radijanima, $|a|$ je amplituda funkcije f, b je broj punih krugova u intervalu od 0 do 2π dok je $\frac{2\pi}{b}$ period funkcije.

Promotrimo prvo plavu boju. Ona ima valnu duljinu 480 nm. To vidimo na grafu. Udaljenost dvaju brjegova ili dvaju dolova je valna duljina, odnosno period tražene funkcije. Dakle, period funkcije koja predstavlja plavu boju je 480. Iz formule za period možemo doći do nepoznate veličine b:

$$T=\frac{2\pi}{b} \Rightarrow b=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{480}=\frac{\pi}{240}.$$

Amplituda tražene funkcije je 1, a tražena funkcija je $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(\theta)=a\sin b\theta=\sin\frac{\pi}{240}\theta.$$

Promotrimo žutu boju: ona ima valnu duljinu 570 nm, što vidimo na grafu. Udaljenost dvaju brjegova ili dvaju dolova je valna duljina, odnosno period tražene funkcije. Dakle, period funkcije koja predstavlja žutu boju je 570. Iz formule za period možemo doći do nepoznate veličine *b*:

$$T = \frac{2\pi}{b} \Rightarrow b = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{570} = \frac{\pi}{285}.$$

Amplituda tražene funkcije je 1, a tražena funkcija je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(\theta) = a \sin b\theta = \sin \frac{\pi}{285}\theta .$$

Promotrimo i treću boju. Ona ima valnu duljinu 640 nm, što vidimo na slici. Udaljenost dvaju brjegova ili dvaju dolova je valna duljina, odnosno period tražene funkcije. Dakle, period funkcije koja predstavlja treću boju je 640. Iz formule za period možemo doći do nepoznate veličine *b*:

$$T = \frac{2\pi}{b} \Rightarrow b = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{640} = \frac{\pi}{320}.$$

Amplituda tražene funkcije je 1, a tražena funkcija je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(\theta) = a \sin b\theta = \sin \frac{\pi}{320}\theta .$$

Glazba

Glazba je sastavni dio života velikog broja ljudi. Neki se ljudi bave glazbom, a neki glazbu slušaju iz hobija. U pozadini zvuka koji čujemo nalazi se velika fizika, ali i matematika. Naime, zvuk je val koji se širi prostorom. Tonovi koje proizvode ljudski glasovi i glazbeni instrumenti specifični su po svojoj frekvenciji (odnosno periodu), a onda i po svojoj valnoj duljini. Zvučni val za ton A može se modelirati funkcijom $y = 0.001 \sin 880\pi\theta$.

a) Koliki je period ove funkcije?

b) Kolika je amplituda ove funkcije?

c) Koliko punih krugova postoji na grafu između 0 i 2π?

Rješenja: Zadana je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pravilom pridruživanja $f(\theta) = 0.001 \sin 880\pi\theta$.

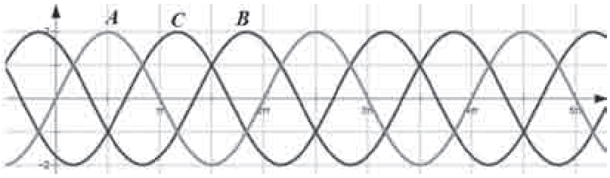
a) Označimo period s T. Tada je $T = \dfrac{2\pi}{880\pi} = \dfrac{1}{440}$.

b) Amplituda je 0.001.

c) Između 0 i 2π postoji $\dfrac{880\pi}{2\pi} = 440$ punih krugova.

Elektricitet

Današnji je život nezamisliv bez električne energije. Ona je pokretač svih uređaja. Znamo li kako se struja zapravo ponaša? U fizici smo naučili da je struja tok naboja po jedinici vremena. Ovo je definicija istosmjerne struje. Da bismo dobili definiciju izmjenične struje, uz tok naboja moramo dodati i titranje električnog polja koje stvaraju ti naboji. Tako dobivamo struju čiji je graf sinusoida u vremenu. Jedan tip električnog generatora sastoji se od rotirajućeg magnetskog polja okruženog stacionarnim zavojnicama. Napon koji proizvodi generator može se modelirati funkcijom sinus. Pretpostavite da su tri zavojnice smještene simetrično oko magnetskog polja. Graf na slici prikazuje napon koji proizvodi svaka od zavojnica.



a) Nađite amplitudu i period svake od krivulja.

b) Napišite jednadžbe koje modeliraju napon za sve tri zavojnice.

Rješenje:

a) Amplituda svih zadanih krivulja je 2. Period svih zadanih krivulja je 2π jer je udaljenost između dvaju brjegova ili dvaju dolova jednaka 2π.

b) Funkcija koja modelira krivulju A napona je $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(\theta)=2\sin\theta$.

Funkcija koja modelira napon koji prikazuje krivulja B je pomaknuta u fazi u odnosu na krivulju koja prikazuje napon A. Krivulja A siječe x-os prvi put u nuli, a krivulja B x-os siječe prvi put u točki $\frac{2\pi}{3}$. Iz toga zaključujemo da je krivulja koja prikazuje napon B pomaknuta u fazi za $\frac{2\pi}{3}$ u odnosu na krivulju A, tj. da napon koji prikazuje krivulja B kasni za naponom koji prikazuje krivulja A. Zato je funkcija koja prikazuje napon B opisana s $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(\theta)=2\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)$.

Na isti način za krivulju C zaključujemo da kasni u fazi za krivuljom A za $\frac{4\pi}{3}$, pa je funkcija koja modelira napon C dana s $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ h(\theta)=2\sin\left(\theta+\frac{4\pi}{3}\right)$.

Valno gibanje

Nalazite se na obali jezera i voda je mirna. Bacite kamenčić u vodu i uočavate pojavu malih valova na vodi. Uočavate izmjenu dolova i brjegova vala. Pretpostavite da je amplituda vala 10 cm i da se ona javlja svaku sekundu. Napišite funkciju koja modelira pojavu dolova i brjegova vala.

Rješenje: Amplituda vala je 10 cm, odnosno 0.1 m. Vrijeme između dvije amplitude je 1 s, a to je period vala. Trebamo napisati funkciju koja modelira izmjenu dolova i brjegova vala.

Neka je varijabla θ. Zbog $T=\frac{2\pi}{b}$ slijedi da je $b=\frac{2\pi}{T}=2\pi$. Tada je tražena funkcija dana s:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(\theta)=a\sin(b\theta)=0.1\sin(2\pi\theta).$$

Plima

Tablica pokazuje vremena plime i oseke. Oznake na mjernoj postaji zaljeva pokazale su za prethodni dan plimu visine 2.13 m, a oseku visine 1.22 m.

a) Kolika je srednja dubina vode u zaljevu? Kolika je amplituda varijacije od prosječne dubine?

b) Koliko traje jedan krug plime?

c) Napišite funkciju koja modelira vezu između dubine vode i vremena u danu.

d) Pretpostavite da vaš brod treba barem 1.55 m dubine da biste prešli zaljev. Između kojih vremena u danu trebate ići preko zaljeva?

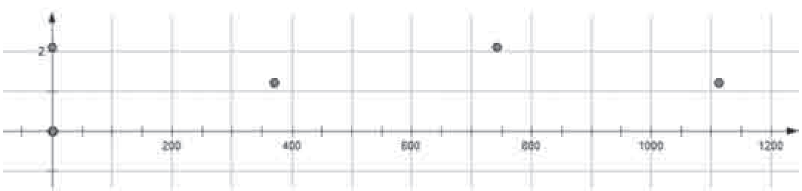
Tablica plime i oseke	
	vrijeme
plima	4:03
oseka	10:14
plima	16:25
oseka	22:36

Rješenja:

a) Srednja dubina vode u zaljevu je $\frac{1.22+2.13}{2}=1.675$ m. Amplituda varijacije od prosječne dubine je 2.13 – 1.675 = 0.455 m.

b) Iz tablice vidimo da jedan krug plime traje 742 minute i to je period funkcije kojom ćemo modelirati ovisnost dubine vode o vremenu.

c) Ucrtajmo prvo točke u koordinatni sustav. Os x predstavlja nam vrijeme u minutama, nakon 4:03, a y-os dubinu vode u zaljevu u metrima. Iz tablice dobivamo sljedeće parove pridruženih vrijednosti: (0, 2.13), (371, 1.22), (742, 2.13), (1113, 1.22)



Period tražene funkcije je vremenski period između dvije plime (brijega) ili između dvije oseke (dola). Period je 742 minute. Amplituda varijacije dubine vode je amplituda tražene funkcije jer je upravo ta vrijednost odstupanje od srednje vrijednosti koju smo dobili aritmetičkom sredinom dubine vode za vrijeme plime i oseke. Dakle, amplituda tražene funkcije je 0.455 m. Nadalje, vidimo da graf tražene funkcije ne prolazi ishodištem koordinatnog sustava, što znači da je graf tražene funkcije translatiran prema gore po y-osi za srednju vrijednost dubine vode, a to je 1.675.

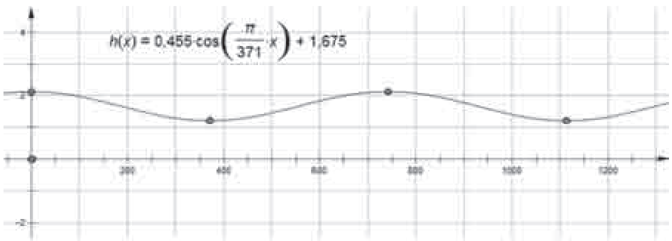
Ponovno iz perioda možemo doći do nepoznate veličine b koja govori koliko punih krugova imamo u intervalu 0 do 2π.

$$T=\frac{2\pi}{b}\Rightarrow b=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{742}=\frac{\pi}{371}.$$

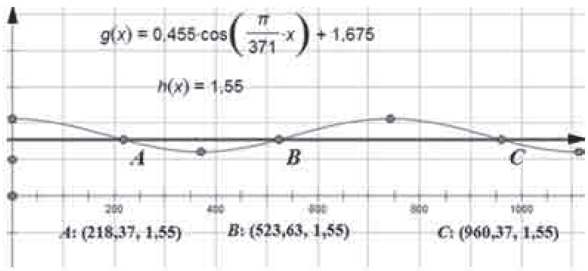
Budući da u početnom trenutku mjerenja tražena funkcija ima gornju amplitudu, to znači da je tražena funkcija kosinus. Sada možemo napisati traženu funkciju:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(t)=0.455\cos\left(\frac{\pi}{371}t\right)+1.675$$

Nacrtajmo graf te funkcije i provjerimo jesmo li dobro računali:



d) U ovom zadatku tražimo u kojim je vremenima vrijednost funkcije (dubina vode u zaljevu) jednaka 1.55 m. To možemo napraviti pomoću alata dinamične geometrije. Nacrtamo pravac y = 1.55 i gledamo presjeke tog pravca s grafom funkcije. Apscise točaka presjeka su tražena vremena.



Dobili smo sljedeća vremena: t_1 = 218.37 min, t_1 = 523.63 min, t_3 = 960.37 min.

Vrijeme smo počeli mjeriti u 4:03 sata. Prvo rješenje pretvorimo u sate: to je približno 3 sata i 40 minuta od početka mjerenja. Drugo rješenje: približno 8 sati i 40 minuta od početka mjerenja. Treće rješenje: približno 16 sati od početka mjerenja. Dakle, zaljev možemo prelaziti od 7:43 do 12:43 i od 20.03 do 1:03.

Mars

Robot na Marsu bilježi temperature svaki dan. Dobiveni su sljedeći podatci.

broj dana	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200	1300
temp. (°C)	-43	-16	-9	-28	-58	-77	-70	-43	-16	-9	-28	-58	-77	-70

a) Nađite maksimalnu i minimalnu temperaturu.

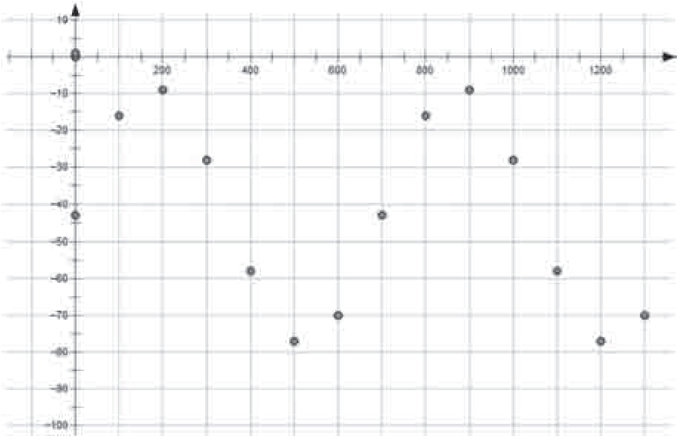
b) Nađite funkciju koja modelira ovisnost temperature o broju dana.

c) Koristeći tu funkciju procijenite duljinu marsovske godine.

Rješenja:

a) Maksimalna temperatura je -9°C, a minimalna -77°C.

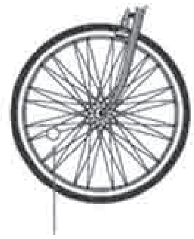
b) Na os x upisujemo dane, a na y-os temperaturu.



Amplituda je $\frac{77-9}{2}=34$. Period je 700 dana (vidimo iz grafa kao udaljenost dvaju susjednih brjegova ili dolova). Tražena funkcija je $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(t)=34\sin\left(\frac{1}{350}\pi t\right)-43.$

c) Period koji vidimo na grafu je duljina marsovske godine i ona, procijenjeno s grafa, traje 700 dana.

BICIKL



Marko u mračnoj prostoriji okreće kotač malog bicikla. Ivan jasno vidi rotiranje reflektora na kotaču bicikla i mjeri visinu reflektora iznad tla u različitim trenutcima koristeći video. Dobio je sljedeće podatke:

vrijeme (s)	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
visina (cm)	9	11	9	11	15	21	27	31	33

a) Prikažite grafički ovisnost visine o vremenu.

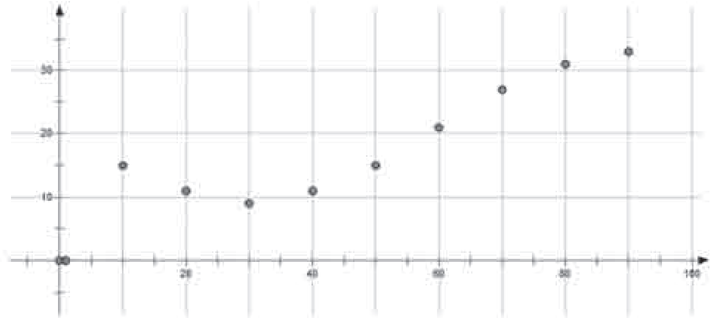
b) Nađite funkciju koja modelira ovu ovisnost.

c) Nađite promjer kotača Markovog bicikla ako se reflektor nalazi na samom rubu kotača.

d) Kolikom se brzinom giba kotač Markova bicikla?

Rješenja:

a) Prikažimo prvo grafički ovisnost visine reflektora o vremenu. Zbog bolje vidljivosti na grafu, na x-os pišemo vrijeme pomnoženo brojem 100, a na y-os stavljamo visinu u centimetrima.

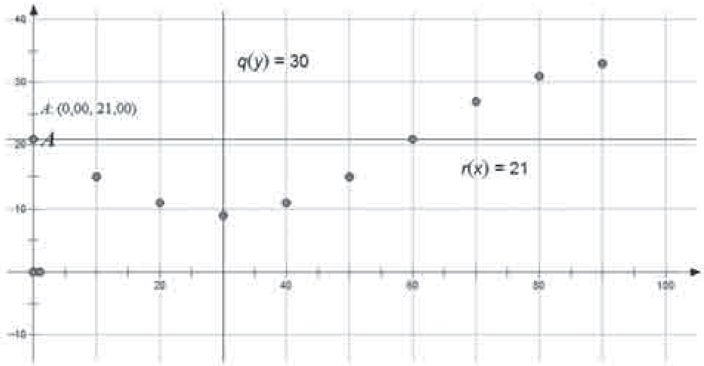


b) Period ove funkcije je udaljenost dvaju susjednih dolova (brjegova), a to je 120 sekundi. Naime, vidimo da nam nedostaje pola perioda na grafu. Cijeli je period dvostruko veći od udaljenosti od 3. do zadnje točke na grafu po x-osi, tj. $T=\dfrac{2\pi}{b} \Rightarrow b=\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{2\pi}{120}=\dfrac{\pi}{60}$.

Amplituda funkcije koju tražimo je aritmetička sredina udaljenosti najviše i najniže točke na grafu. Najviša točka na grafu je 33 cm, a najniža točka je 9 cm, pa je amplituda dana s $\dfrac{33-9}{2}=12$ cm.

Još preostaje odrediti odsječak na y-osi, odnosno broj za koji je tražena funkcija translatirana po y-osi prema gore. U tu svrhu nacrtamo pravac s jednadžbom

$x = 30$ koji je os simetrije. Nakon toga nacrtamo pravac s jednadžbom $y = 21$ i tražimo presjek ovoga pravca s y-osi. Tako ćemo dobiti točku koja je zrcalno simetrična točki (60, 21) u odnosu na pravac s jednadžbom $x = 30$.



Dobili smo da je tražena funkcija translatirana za 21 cm prema gore po y-osi, tj. radi se o funkciji $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $f(t)=12\sin\left(\frac{1}{60}\pi t\right)+21.$ Budući da smo vremensku skalu pomnožili sa 100, onda je tražena funkcija dana s $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$,
$f(t)=12\sin\left(\frac{1}{0.6}\pi t\right)+21=12\sin\left(\frac{5}{3}\pi t\right).$

c) Na grafu vidimo da je najmanja visina reflektora 9 cm. Budući da je reflektor po pretpostavci zadatka na rubu kotača, onda je kotač podignut na visinu 9 cm. Budući da se reflektor nalazi na samom rubu kotača, onda je promjer kotača jednak maksimalnoj visini reflektora umanjenoj za visinu na kojoj se nalazi kotač, a to je 9 cm, odnosno dvostrukoj amplitudi. Polumjer je onda polovina promjera. Maksimalna visina reflektora je 33 cm, što znači da je promjer kotača jednak 33 – 9 = 24 cm. Polumjer kotača je onda 12 cm.

d) Gibanje reflektora na kotaču je kružno gibanje s konstantnom akceleracijom, pa je brzina kojom bi se Marko gibao jednaka $v=\frac{2\pi r}{T}=\frac{1.03}{1.2}=0.63\ \text{m/s}.$

Literatura:

1. *Real life dana examples*, dostupno na:

http://www.mybookezzz.com/periodic-functions-real-life-data-examples/(9.10.2013.)

2. *Blood flow and blood preasure*, dostupno na:

http://math.arizona.edu/~maw1999/blood/trig.html (9.10.2013.)

3. H. Joung, R. Freedman: *University physics with modern physics*.12th editionPearson International Edition, 2007.