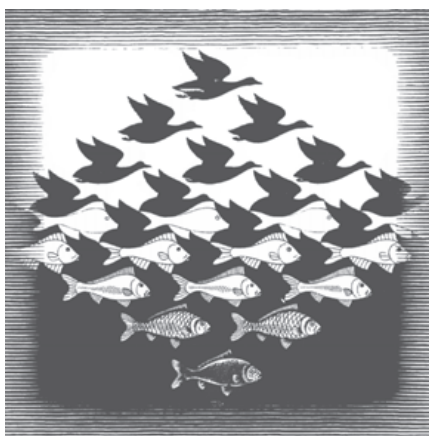


Transformacije ravnine à la Escher

NIKOL RADOVIĆ¹



© BEELDRECHT, Amsterdam/VAGA, New York. Collection Heaghe
Gemeentemuseum – The Hague, 1981.

Slika 1.

Nizozemski slikar i grafičar **Maurits Cornelis Escher**, poznatiji kao **M. C. Escher** (slika 2.), rodio se 17. lipnja 1898. u Leeuwardenu u Nizozemskoj kao najmlađi sin Georga i Sare Escher. Kuća „**Princessehof**” u kojoj su živjeli kasnije je postala muzej. Roditelji, braća i dobri prijatelji zvali su ga **Mauk**, iako je sebe volio zvati **M. C.** Kao vrlo mlad kod majstora Van Eldika izučio je stolarski zanat koji mu je u mnogočemu pomogao.



Slika 2.
Samoportret, 1929.

Naučene tehnike obrade drveta kasnije će primjenjivati u izradi drvoreza, kao i u drugim materijalima. Klasičnu crtačku/umjetničku naobrazbu pohađao je kod S. J. De Msequita. **Escher** je i rado putovao. Tako je 1922. godine otišao u Rim u kojem je boravio do 1934. godine. Tipični radovi iz toga perioda prikazani su na slikama 3. i 4.

¹Nikol Radović, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb



Slika 3.
The Bridge, 1930.



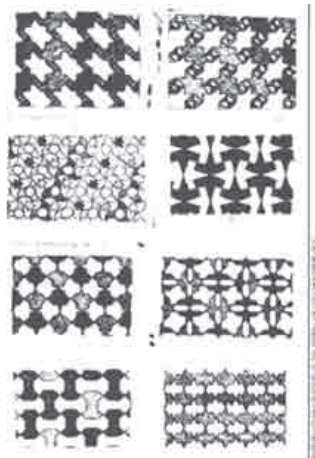
Slika 4.
Castrovalva, 1930.

Iz ovih slika, koje su tematikom povezano krajolicima u kojima je boravio, ne može se naslutiti da će **Escher** postati *otac popločivanja ravnine/prostora*. Još 1922. godine izradio svoj prvi drvorez, slika 5.

Kao nemiran duh, kratko je vrijeme boravio kod kuće, pa već 1936. godine putuje u Španjolsku. Opčinjen je pločicama iz *Alhambre*, slike 6. i 7. Prema njima nastaju njegovi karkateristični radovi popločavanja, slike 8. i 9., kao i slika 1.



Slika 5.
Eight Heads, 1922.



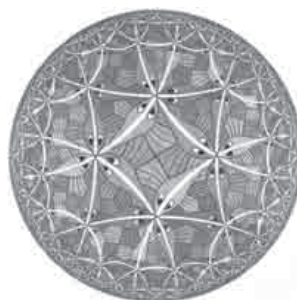
Slika 6.



Slika 7.

Escher je niz godina proučavao geometrijske transformacije (translaciju, rotaciju i kliznu simetriju) na jednakokraničnim trokutima i paralelogramima. No, veliki um nije se ograničio samo na pravilne geometrijske oblike, ni na euklidsku geometriju. To najbolje ilustrira slika 8.

Escher je ponajviše poznat po svojim neobično nadahnutim **matematičkim grafikama** (iako nikada nije izučavao matematiku, bio je prirodno nadaren), rezbarijama,



Slika 8.
Circle limit III, 1959.



Slika 9.
Day and Night, 1938.

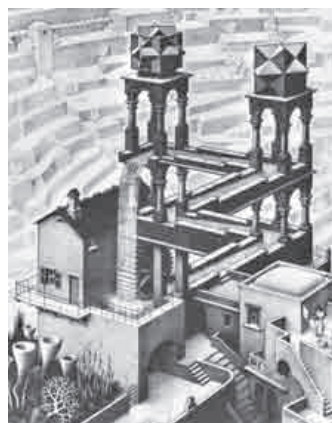


Slika 10.
Fisches and Scales

drvorezima i litografijama koje prikazuju maštovito zamišljene građevinske konstrukcije i trodimenzijske prizore, izmišljene prostore, paralelne svjetove, „čudnu” ornamentiku, originalne prikaze ideje *perpetuum mobile* i problema beskonačnosti, slike 11. i 12.



Slika 11. *Belvedere*



Slika 12. *Vodopad, 1961.*

Prekretnica u njegovom životu bila je 1954. godina. Te godine imao je dvije zapažene izložbe; jednu u *Stedelijk Museumu* u Amsterdamu na otvorenju International Mathematical Conference, gdje su njegovi radovi oduševili matematičare, i drugu u listopadu iste godine u Whyste Gallery u Washingtonu, na kojoj je nagrađen ovacijama, nakon kojih je krenuo u osvajanje svijeta.

Escher, grafički genij, autor 400 litografija i drvoreza te preko 2000 slika, umro je 1972. godine u Baamu u Nizozemskoj nakon duge i teške bolesti.

Escherov rad može se podijeliti u nekoliko skupina:

- Grafike u kojima analizira trodimenzijski prostor i relativizira njegovo predočavanje u dvodimenzijskom prostoru ravnine crtanja;
- Podjelu particija ravnine na kongruentne dijelove (koji se matematički mogu strogo klasificirati prema pripadnim grupama simetrija);
- Prikazi geometrijskih figura određenih metričkih ili topoloških svojstava.

Imajući to sve na umu, možemo se zapitati *je li moguće približiti Eschera učenicima osnovnih/srednjih škola?* Naime, pri gledanju **Escherovih** uradaka promatrač uživa ne opterećujući se „teorijom” koja se „skriva”; primjerice hiperboličkom geometrijom, topologijom, grupama simetrija, perspektivom, transformacijom ravnine/prostora... Jednom riječju, svime što zvuči „prekoteško”.

Znano nam je da se u nastavi matematike/geometrije učenici prvi put susreću s temom transformacija ravnine u petom razredu osnovne škole, ali i tada je to najviše na razini prepoznavanja, uočavanja svojstava geometrijskih figura s ponekom konstrukcijom slika jednostavnijih geometrijskih figura. U osmom razredu osnovne škole proučava se tema *Transformacije ravnine*, koja se kasnije nadograđuje u programu nastave matematike/geometrije srednje škole. Svjedoci smo da se učenici susreću s transformacijama ravnina i pravilnim mnogokutima u najranijoj dobi svoga života – slažući kocke, *puzzle* sa slikama različitih junaka iz crtanih filmova, bajki... samo se o tome ne govori na taj način. Dakle, moguće je.

U ovom će radu kroz različite aktivnosti i primjere biti ponuđeni zadatci koji se mogu obrađivati s učenicima od nižih razreda osnovne škole nadalje.

Neki od *Primjera* su *Aktivnosti* koje su odrađene s učenicima osnovnih škola na matematičkoj radionici **Escher i geometrija** u okviru projekta *Matematički znanstveni izazov* kao doprinos *Večeri matematike* u organizaciji Hrvatskog matematičkog društva uz potporu MZOS-a. Radionica je imala za cilj povezati matematiku/geometriju i rad Eschera, odnosno prikazati kako se kroz nestandardno okružje upoznati s matematikom/geometrijom „skrivenom” u Escherevim radovima, a koja se može svrstati u kategoriju „prekoteško”. Budući da su prijave za radionicu bile otvorene, tj. organizatori i voditeljica radionice nisu mogli znati tko će se prijaviti, morali su biti pripravnici na sve, odnosno imati opciju B, C itd. Na kraju, kroz radove učenici doka-

zuzu da se primjenom temeljnih geometrijskih vještina učenika osnovnih škola mogu crtati/konstruirati uradci slični Escherovim.

Učenici primjenjuju naučena znanja i vještine geometrije u nestandardnom okruženju. Tim načinom rada učenici će se izravno uvjeriti da je matematika/geometrija temeljna disciplina koju možemo prepoznati u različitim životnim situacijama (a i umjetnost je jedna od njih).

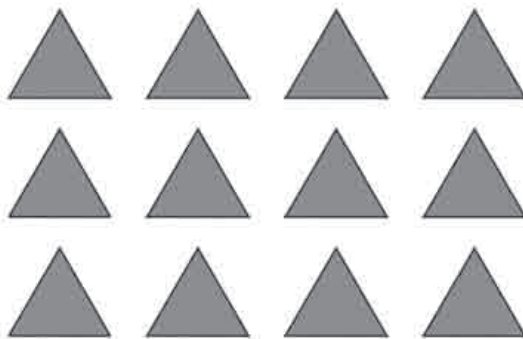
Sve aktivnosti mogu se rješavati klasično ili nekim od programa dinamične geometrije. Ako imate priliku, bilo bi ih dobro odraditi klasično, pa tek onda na računalu uporabom nekog od programa dinamične geometrije. Naime, ako učenici prođu kroz aktivnosti klasično, pa tek onda na računalu, to će od njih zahtijevati primjenu vještina (geometrijskih/matematičkih) u odabiru strategija kako doći do rješenja pomoću programa dinamične geometrije, budući da nije moguće konstruirati/crtati na identičan način. Štoviše, moguće je usvojiti različite strategije rješavanja primjenom različitih vještina koje će rezultirati istim rješenjima.

U Primjerima 1. – 2. učenici moraju slagati pravilne mnogokute, zaključivati, argumentirati svoja rješenja, dok u Primjeru 3. moraju objasniti nastale geometrijske figure slaganjem pravilnih mnogokut (trokuta, kvadrata, peterokuta...).

Primjer 1.

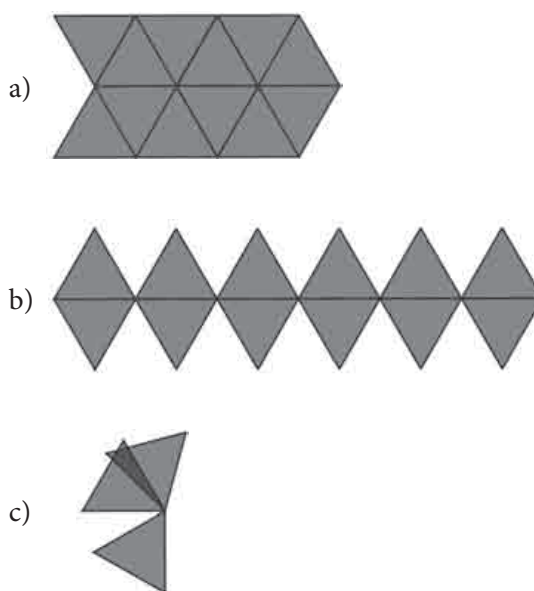
Zadani su jednakostranični trokuti iste boje.

- Posloži ih tako da se ne preklapaju.
- Mogu li se trokuti slagati samo na jedan način ili ne? Objasni.



Slika 13.

- Trokute slažemo jedan do drugoga i pazimo da se trokuti ne preklapaju, ali isto tako nastojimo sa svim trokutima imati što manje bijele ravnine.
- Na sljedećoj su slici neka od učeničkih rješenja.



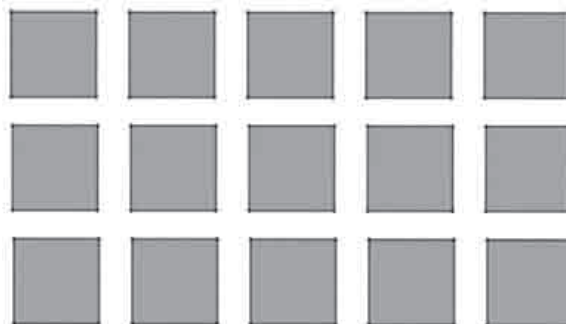
Slika 14.

- Najbolje je odmah prodiskutirati o dobivenim slikama, o tome zašto su neke dobre ili manjkave ili pak uopće nisu dobre.

Primjer 2.

Zadani su kvadrati iste boje.

- Posloži ih tako da se ne preklapaju.
- Mogu li se trokuti slagati samo na jedan način ili ne? Objasni.



Slika 15.

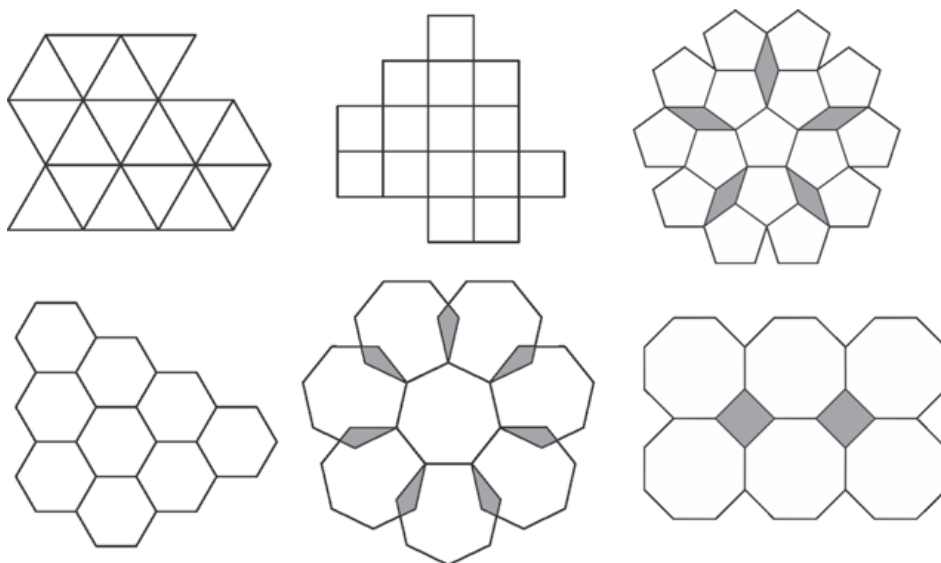
U Primjeru 3. učenici uspoređuju složene slike, te zaključuju kojim se geometrijskim figurama može popločavati ravnina, a kojima ne. Ista aktivnost može se provesti i malo drugačije. Učitelj priredi geometrijske figure (jednakostranični trokuti, kvadrati, pravilni peterokuti...), pri čemu je svaka skupina iste boje. Svaka od skupina učenika slaže svoju sliku. Učenici komentiraju složene slike, uspoređuju. Otkrivaju mogu li se neke od geometrijskih figura složiti na drugačiji način ili ne. Ako je moguće posložiti zadane geometrijske figure na drugačiji način, dobro bi bilo skicirati u bilježnicu novo preslagivanje. U idućoj fazi učitelj može skupinama učenika podijeliti različite kombinacije geometrijskih figura koje slažu i komentiraju. Može se postaviti pitanje što u slučaju da umjesto jednakostraničnih trokuta imamo jednakokračne ili pravokutne.

Primjer 3.

Na slici 16. složene su pločice u obliku:

- | | |
|-------------------------------|-----------------|
| a) jednakostraničnog trokuta, | d) šesterokuta, |
| b) kvadrata, | e) sedmerokuta, |
| c) peterokuta, | f) osmerokuta. |
| d) šesterokuta, | |

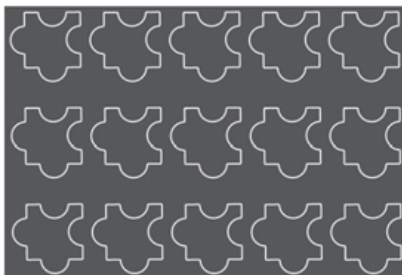
- Pogledaj svaku od slika i objasni što vidiš.
- Zašto se na nekim slikama pojavljuju još neke geometrijske figure?



Slika 16.

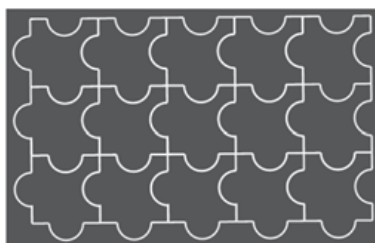
Primjer 4.

Zadane „oblike” (slika 17.) posloži jedan do drugoga.



Slika 17.

Moguća učenička rješenja dana su na sljedećim slikama.



Slika 18.



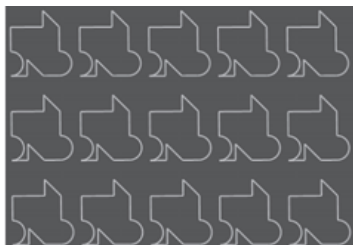
Slika 19.

S učenicima treba prodiskutirati o rješenjima na slikama 18. i 19. jer **ne smije** biti dijelova koji su „šuplji” kao na slici 19.

Primjer 5.

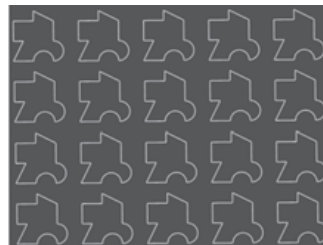
Zadane „oblike” posloži jedan do drugoga.

a)



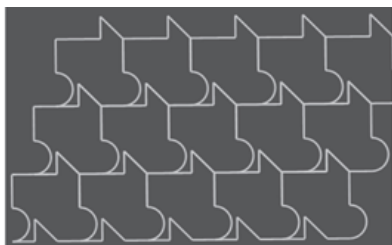
Slika 20.

b)

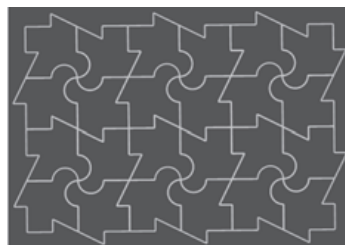


Slika 21.

- Slični, a opet različiti oblici mogu rezultirati sljedećim učeničkim rješenjima, slike 22. i 23.



Slika 22.

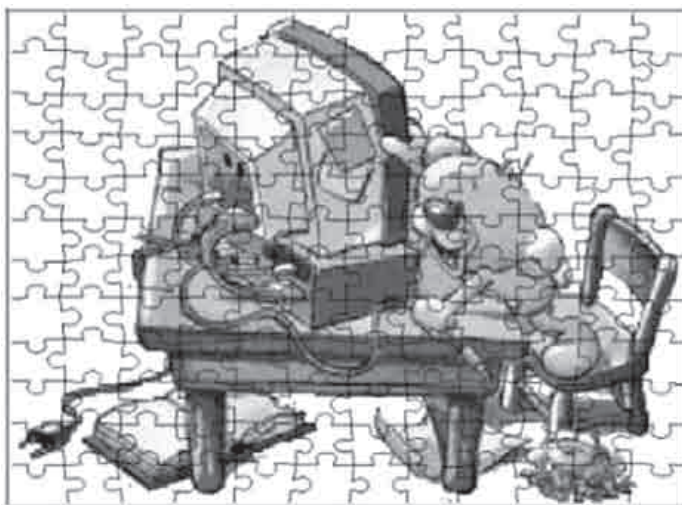


Slika 23.

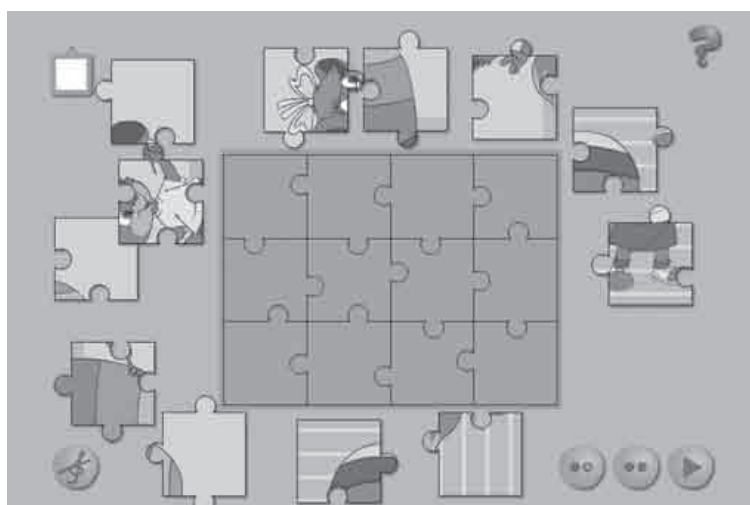
Geometrijske figure/oblici iz Primjera 4. i 5. mogu biti izrezane od papira/stiro-pora ili nekog drugog tvrdog materijala, ili mogu biti nacrtane u nekom programu dinamične geometrije, ovisno o mogućnostima i afinitetima. Bilo bi dobro *Aktivnost* prvo odraditi klasično, a tek onda na računalu. Na taj se način isti koncept obrađuje primjenom različitih vještina u različitom okruženju. U slučaju rada na računalu učenici će naučene vještine „slaganja” geometrijskih figura/oblika morati prevesti na jezik dinamične geometrije, tj. primijeniti koncept transformacija ravnine.

U idućoj *Aktivnosti* ista strategija slaganja puzzla prikazana je u dva okruženja – klasičnom slaganju (slika 24.) i interaktivnoj inačici puzzle igre (slika 25.).

Primjer 6.



Slika 24.



Slika 25.

Izvornik_www.hlasic.net/igraonica/17.01.2014./

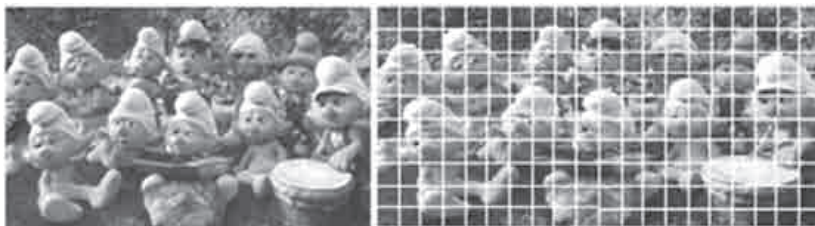
Reakcija učenika na puzzle bila je: *Super! To je lako!* Naime, učenici *puzzle* poistovjećuju sa slagalicama puzzle kojima se obično igraju. Nadalje, ako se puzzle postavi na odgovarajuće mjesto, čuje se *klik* ili *glazba odobravanja*. No, naše matematičke/geometrijske puzzle malo su drugačije. Bez obzira na uzrast, slaganje trokuta, kvadrata, šesterokuta, pravokutnika koji su obojeni istom bojom ne predstavlja problem, ali ako neku sliku s njima poznatim junacima izrežete na neku od geometrijskih oblika, (trokut, kvadrat...), nastat će problemi. Komentirat će da slike nisu baš najoštrije i sl. U slučaju da nisu dobili predložak, već ga vide kao projekciju na ploči, potpuno su izgubljeni, mada ima i onih upornih, slike 29. i 30.

Primjer 7.

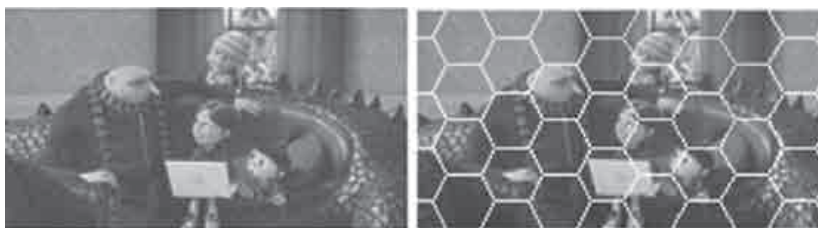
- Od dobivenih trokuta/kvadrata/šesterokuta složi sljedeće slike.
- Pazi – trokuti/kvadrati/šesterokuti **ne smiju se preklapati** nego se slažu jedan do drugoga.



Slika 26.



Slika 27.



Slika 28.



Slika 29.



Slika 30.

Prethodni primjeri temelje se na upoznavanju koncepta popločivanja ravnine. To su primjeri transformacija ravnine dani na neklasični način primjeren učenicima nižih razreda (5. i 6.) osnovne škole gdje kroz nestandardne aktivnosti usvajaju nova znanja, ali isto tako mogu poslužiti za zagrijavanje učenika 7. i 8. razreda. Učenici kroz neformalne aktivnosti, pa i dobro osmišljenu igru, usvajaju „teže” geometrijske strategije i vještine.

Nastavak u sljedećem broju.