Pojam funkcije u nastavi matematike – nekad i danas

Mirjana Marjanović Matić[1]

Uvod

Matematika se u školi predaje od davnina pa vjerujemo kako bi se svi složili da je riječ o predmetu čije je gradivo kroz povijest doživjelo najmanje promjena. Naravno, ne mislimo na promjene u predviđenom nastavnom planu i programu za pojedini razred, što je često podložno izmjenama, nego na pojedine cjeline i njihov sadržaj. Jednostavno, ljudi će reći da se matematika ne mijenja te da su sasvim jasno propisani sadržaji koje učenici trebaju ponijeti iz osnovne i srednje škole.

Ovisno o napretku i razvoju društva, način prezentacije, struktura zadataka i nastavnog sadržaja će evoluirati, ponekad postajući primjerenije određenoj dobi, nudeći dodatna ilustrativna rješenja koja za ulogu imaju dodatno motivirati učenike ili barem pokušati udžbenike izdići iz nekadašnjih sivilom protkanih žutih stranica s tendencijom da kroz godine poprime još zagasitiji ton.

Zaista, matematika se odlikuje izrazitom slojevitošću, za nju je nužno počivati na čvrstim, precizno postavljenim temeljima koji joj omogućuju razvoj do neslućenih visina. U velikoj se mjeri upravo osnovnoškolsko i srednjoškolsko gradivo matematike može smatrati najosnovnijim temeljima ove znanstvene discipline. Kako bi se onda i moglo mijenjati, smije li uopće biti podložno promjenama? Ogradimo se odmah od sezanja u dublju prošlost tijekom koje se matematika fundirala, jer to je bilo doba kada su se određene postavke mogle promijeniti doslovce tijekom noći, povlačeći zatim i korjenite promjene u nastavi. Ostanimo, na primjer, u posljednjih 50-ak godina, u dobu na početku kojeg je matematika bila precizno utemeljena, te o kojemu može svjedočiti iskustvo mnogih i danas aktivnih nastavnika matematike.

Pokušat ćemo u ovom članku povući paralele između pristupa opisanog u današnjim udžbenicima i u jednome udžbeniku ([5]) koji je bio osnovna literatura za nastavu matematike u završnim razredima gimnazija i nekih drugih srednjih škola tijekom 60-ih (u svojim prvim izdanjima) i 70-ih godina prošlog stoljeća.

---

[1]Mirjana Marjanović Matić, tehnička škola i prirodoslovna gimnazija Ruđera Boškovića, Osijek

Preciznije, posvetit ćemo se razlici između koncepta funkcije, jednog od najvažnijih pojmova u čitavoj matematici, u navedenim udžbenicima. Prije nego, potpunosti radi, iznesemo definiciju spomenutog koncepta u današnjim udžbenicima, prođimo kroz nekoliko crtica povijesni pregled razvoja koncepta funkcije, kako bismo uvidjeli i njegovu složenost i doba u kojemu je konačno dorađen.

Povijesni razvoj koncepta funkcije

Prema nekim izvorima, prvi tragovi koncepta funkcije pojavljuju se još za Babilonaca (koji su tablično opisivali pridruživanje kvadrata i kubova prirodnim brojevima) i u antičkoj Grčkoj kada je Ptolomej radio s objektima koji se danas mogu smatrati početnim naznakama razvoja trigonometrijskih funkcija. No, svi se povjesničari slažu da tadašnja gledanja nisu imala pravih poveznica s pojmom funkcije. O matematici toga doba više se može pronaći u [1]. Notacija funkcije prvi se put pojavljuje sredinom 14. stoljeća na filozofskim školama u Oxfordu i Parizu, prvenstveno kada je Oresme zakone prirode opisivao korištenjem ovisnosti jedne veličine o drugoj.

Pravi pomak u definiciji pojma funkcije javlja se 1748. kada je Euler objavio knjigu *Introductio to analysin infinitorum* u kojoj pojam funkcije smatra ključnim. Prema Euleru, funkcija varijabilne veličine je analitički postupak sastavljen na proizvoljan način od varijabilne veličine te brojeva ili konstantne veličine. No, Euler nije definirao što smatra „analitičkim postupkom" – sastoji li se takav postupak samo od osnovnih računskih operacija poput zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja, ili dopušta npr. i trigonometrijske funkcije, te beskonačne sume i produkte? Zaista, jedno od prvih pitanja koje je postavljeno nakon ove definicije jest mogu li i beskonačne sume biti smatrane funkcijama, bez obzira na to kakav izraz predstavljaju.

Time su nastale poteškoće u vezi pravilnog definiranja pojma funkcije te se na svaki novi pokušaj gotovo istodobno nadovezalo i nekoliko novih primjera i nerazjašnjenih potpitanja koja su dobivenu situaciju činila nejasnom i nepotpunom.

I sam Euler pokušao je popraviti vlastitu definiciju kada je 1755. objavio knjigu pod naslovom *Institutiones calculi differentialis* u kojoj definira pojam funkcije na vrlo općenit način koji se može smatrati i modernom definicijom funkcije. Prema Euleru, ako neka veličina ovisi o drugoj veličini na način da se mijenja čim se mijenja i druga veličina, ona se naziva funkcijom druge veličine, koju tada nazivamo i nezavisnom veličinom. Euler također napominje da se ova definicija može primjenjivati vrlo općenito te pokriva sve načine na koje jedna veličina može biti određena pomoću druge. Ako x označava nezavisnu veličinu, tada se sve veličine koje na bilo koji način ovise o x ili su određene s x , nazivaju funkcijama od x.

Iako je ova općenita definicija mogla promijeniti shvaćanje pojma funkcije, Euler je svoju knjigu posvetio razvoju diferencijalnog računa korištenjem isključivo specijalnog tipa funkcija. Također, Euler je u svojoj knjizi strogo odijelio funkcije u nekoliko skupina. Među ostalim, razdvojio je funkcije zadane jednim analitičkim izrazom od funkcija zadanih pomoću dva ili više analitičkih izraza. Nakon nekog vremena, Cauchy je naveo primjer funkcije zadane pomoću dva analitička izraza: $y = x$ za $x \geq 0$ i $y = -x$ za $x < 0$, koja se također može zadati i samo jednom formulom $y = \sqrt{x^2}$, čime je Eulerova podjela bila potkopana te je donekle izgubila na važnosti.

Iz druge polovice 19. stoljeća datira i poznata Hankelova izjava prema kojoj *netko definira funkcije na esencijalno Eulerov način, netko zahtijeva da se y mora mijenjati u odnosu na x prema određenom zakonu, bez daljnjeg objašnjavanja zamišljenog koncepta, dok netko funkcije jednostavno ne definira. No, svatko iz svog koncepta izvlači tvrdnje koje u njemu nisu sadržane.* Pedesetak godina kasnije Poincarè se nadovezao na tu izjavu ustvrdivši kako se čini da je jedini zadatak pokazati prethodnicima da su bili u krivu.

Koncept koji se danas smatra toliko elementarnim morao je proći kroz brojne promjene koje su ga oblikovale prema različitim zamislima i potrebama. Velikim matematičarima 19. stoljeća pojam funkcije ipak nije bio sasvim dohvatljiv, iako su zasigurno savršeno baratali zamišljenim konceptima. Nekako se čini da se kroz čitavih nekoliko stoljeća nisu mogli usuglasiti oko toga što u stvari žele da pojam funkcije predstavlja. Glavni prijepor među matematičarima u vezi uvođenja pojma funkcije pojavljuje se između skupine matematičara koji su zastupali definiciju funkcije kao svakog pridruživanja između elemenata dvaju skupova (toj skupini pripadao je Cantor) i skupine matematičara koji su smatrali da bi trebalo biti jasno kako se to pridruživanje vrši (tima je, na primjer, pripadao Poincarè).

No, moderne su definicije ovu problematiku ipak uspjele sasvim razotkriti. Goursat je 1923. iznio definiciju koja se i danas koristi: Kažemo da je y funkcija od x ako vrijednosti od x korespondira vrijednosti od y. Ovu korespondenciju označavamo s $y = f(x)$.

Ukoliko ova definicija nekome ne izgleda dovoljno precizno, navedimo i takozvani relacijski oblik definicije funkcije, kakav navodi američki matematičar Suppes u svom djelu *Axiomatic set theory* iz 1960.:

A je relacija ako i samo ako $(\forall x)(x \in A \Rightarrow (\exists y)(\exists z)(x = (y, z)))$. Pišemo yAz ako je $(y, z) \in A$.

f je funkcija ako i samo ako je f relacija i $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(xfy \,\&\, xfz \Rightarrow y = z)$.

Pojam funkcije u današnjim udžbenicima

Učenici se po prvi put s pojmom funkcije susreću već u sedmom razredu, na prilagođen način. Prilikom uvođenja linearne funkcije oblika $y = k \cdot x$ naglašava se kako je u prethodnoj relaciji svakome racionalnom broju x pridružen posve određen, tj. točno jedan, racionalan broj y te kako u tom slučaju kažemo da je danom formulom zadana funkcija odnosno da je y određena funkcija od x, što pišemo u obliku $y = f(x) = k \cdot x$. Više o ovom pristupu može se naći u [4].

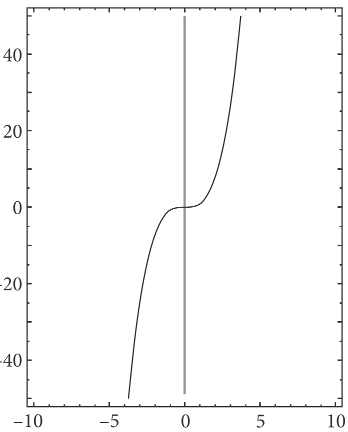
Nakon toga se učenici s pojmom funkcije ponovo susreću u drugom i u četvrtom razredu srednje škole. Definicije funkcije u udžbenicima za te razrede ([2], [3]) gotovo su identične te ih je moguće smatrati pojednostavljenim i čitljivijim oblikom Suppesove definicije iz 1960.:

Definicija 1.

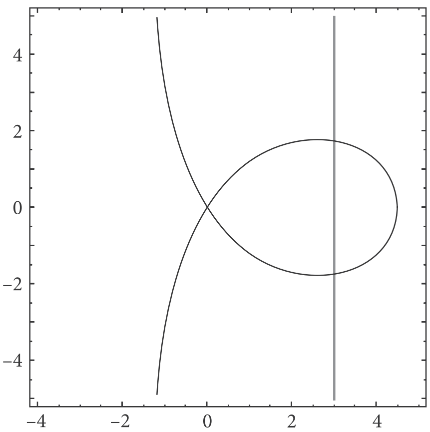
Ako je svakom elementu x nekog skupa A pridružen točno jedan element y skupa B, tada kažemo da je definirano preslikavanje ili funkcija f iz skupa A u skup B te pišemo $y = f(x)$. Također, činjenicu da je f funkcija iz skupa A u skup B zapisujemo u obliku $f : A \to B$.

Element x naziva se još i argument funkcije f, a y vrijednost te funkcije. Skup A zovemo domenom ili područjem definicije funkcije f, a skup B zovemo kodomenom ili područjem vrijednosti funkcije f. Dakle, funkcija f zadana je svojom domenom, svojom kodomenom i zakonom (pravilom) pridruživanja $x \mapsto f(x)$.

Kako bi se grafički i vizualno ispitalo predstavlja li zadana krivulja graf neke funkcije, često koristimo takozvani *vertikalni test* prema kojemu vertikalni pravac (paralelan osi y) smije sjeći krivulju u najviše jednoj točki. Apscisa presjeka toga pravca s osi apscisa predstavlja vrijednost varijable x, dok odgovarajuću vrijednost od y dobivamo iz presjeka pravca sa zadanom krivuljom.



Krivulja koja prolazi na vertikalnom testu



Krivulja koja ne prolazi na vertikalnom testu

Pojam funkcije u starim udžbenicima

Posvetimo se sada pojmu funkcije kako je objašnjen u 6. poglavlju udžbenika [5]. Potpoglavlje „Definicija funkcije" počinje na idući način:

Definicija 2.

Zadan je uređen par (S, S_1) nepraznih skupova S, S_1; svaki postupak p kojim svakom članu x iz S pridružujemo jedan član fx ili više članova fx iz S_1 zove se funkcija kojoj je oblast S, a proutoblast leži u S_1. Za dano $x \in S$ znači $f(x)$ ili fx onaj član iz S_1 odnosno svaki član iz S_1 koji je pridružen članu x iz S. Govori se o funkciji $f|S$ ili $f : S$ u smislu da je fx određeno za svako $x \in S$; f se zove funkcionalni operator.

Primijetimo odmah važnu razliku u ovoj definiciji funkcije - nije nužno da svakom elementu polaznog skupa bude pridružen točno jedan element dolaznog skupa; moguće je da bude i više takvih. Na primjer, preslikavanje koje svakom prirodnom broju istodobno pridružuje njegov kvadrat, njegov kub, njegovu četvrtu i petu potenciju također se može smatrati funkcijom. Napomenimo kako je preslikavanje definirano na ovaj način različito od preslikavanja danog s $g(x) = (x, x^2, x^3, x^4, x^5)$, koje prirodnom broju pridružuje jednoznačno određenu uređenu petorku prirodnih brojeva. Preslikavanje g je funkcija i prema definicijama koje se mogu naći u prethodnom poglavlju.

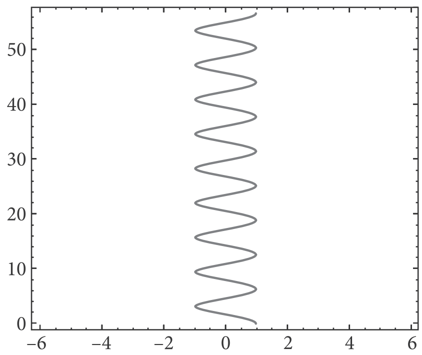
Prema prethodnoj definiciji, vertikalni test za ispitivanje je li dano preslikavanje funkcija postaje neupotrebljiv u većini slučajeva jer je moguće da graf funkcije sadrži i čitav pravac paralelan osi y.

Upoznajmo se kratko i s tadašnjom terminologijom, nešto drugačijom od današnje:

Za dano $x \in S$, fx se naziva vrijednost ili značenje funkcije f u x. Skup sastavljen od svih vrijednosti funkcije f zove se protuoblast ili antidomena funkcije f, te se označava s fS. Također se piše $f : S \to S_1$ i čita: funkcija (pridruživanje) počev od S prema S_1. Skup S naziva se oblast ili domena funkcije f. Pri preslikavanju $x \in S \to fx \in S_1$ naziva se x nezavisna varijabla ili nezavisna promjenjivica funkcije ili argument funkcije; fx naziva se zavisna varijabla.

Uočimo kako se umjesto naziva kodomena koristio naziv antidomena.

Pojam funkcije definiran na navedeni način može se smatrati generalizacijom (poopćenjem) pojma funkcije kakav danas koristimo. Zaista, funkcije promatrane na današnji način sadržane su među funkcijama prema navedenoj definiciji. Upravo takav podskup skupa funkcija u navedenom je udžbeniku istaknut u idućem potpoglavlju pod naslovom „Jednoznačne i nejednoznačne funkcije”:



Primjer grafa funkcije prema Definiciji 2.

Funkcija f od S prema S_1 jednoznačna je (uniformna) ako je za svako $x \in S$ pripadna vrijednost fx jedna jedina. Ako bar za jedno $x \in S$, fx može imati bar dva značenja, funkcija f je nejednoznačna u S. Skup svih jednoznačnih preslikavanja $f : S \to S_1$ označuje se sa S_1^S (napomenimo kako se na navedeni način i u današnjim udžbenicima često označava skup svih funkcija između dvaju skupova).

Više o jednoznačnim i nejednoznačnim funkcijama možemo saznati iz sljedećeg primjera, također sadržanog u udžbeniku [5].

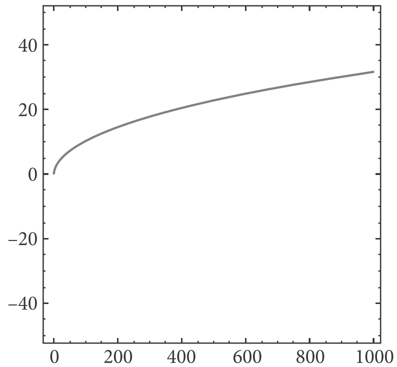
Primjer 1.

Tako na primjer funkcije $x \mapsto x^2, \cos x, \sin x, x^3$ te projiciranje jesu jednoznačne funkcije.

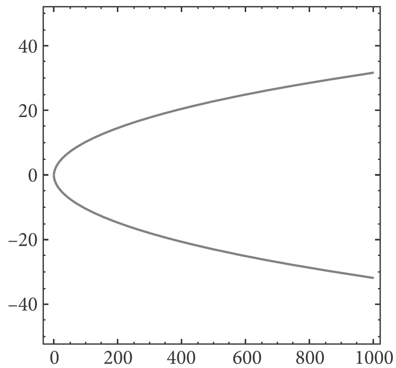
Pod projiciranjem autori ovdje smatraju preslikavanje koje točki (x, y) koordinatne ravnine pridružuje projekciju te točku na ordinatu, dakle preslikavanje $(x, y) \mapsto (x, 0)$.

Naprotiv, funkcija $x \mapsto x^{\frac{1}{2}}$ nije jednoznačna jer npr. njome broju 4 odgovaraju dva značenja funkcije, i to –2, 2. Dvije pripadne jednoznačne funkcije tada bi bilo smisleno označiti naglašavajući korišteni predznak u svakome od slučajeva, tj. $x \mapsto +x^{\frac{1}{2}}$ i $x \mapsto -x^{\frac{1}{2}}$.

Prema ovoj definiciji funkcije drugog (kvadratnog) korijena, dolazimo da velike razlike u poimanju ovog preslikavanja među današnjim udžbenicima i udžbenikom [5]. Prema ovoj definiciji, drugi korijen nenegativnog realnog broja x jednak je svim realnim brojevima y sa svojstvom da je $y^2 = x$, dok se danas za drugi korijen iz nenegativnog realnog broja x uzima jedinstven nenegativan realan broj y za koji vrijedi $y^2 = x$. Time je i dobivena jednoznačnost te činjenica da drugi korijen predstavlja funkciju. Vjerojatno je ovo i pravo mjesto za dodatno pojašnjenje složenosti koncepta funkcije. Naime, vidjeli smo da se funkcija ne sastoji samo od pravila preslikavanja, već i od dvaju skupova koji su od esencijalne važnosti za razumijevanje ovog pojma – domene i kodomene. Napisati samo neku od oznaka za drugi korijen, tj. $x^{\frac{1}{2}}$ ili $\sqrt{x}$, predstavlja tek navođenje pravila pridruživanja, s obzirom na koje se vrijednosti nezavisne varijable x pridružuje (neki ili svaki) y za koji vrijedi $y^2 = x$. No, dodamo li da je domena ove funkcije skup nenegativnih realnih brojeva te da je kodomena jednaka domeni, upotpunili smo definiciju funkcije drugog korijena u današnjem smislu.



Graf funkcije drugog korijena prema današnjim udžbenicima



Graf funkcije drugog korijena promatrane kao dvoznačne funkcije

Također, antiprojiciranje (obrat projiciranja) nije jednoznačna funkcija, navodi se u knjizi. Zaista, antiprojiciranjem se točki (x, 0) pridružuju sve točke oblika (x, y), gdje je y realan broj, tj. čitav pravac paralelan osi y. Na taj je način jednoj točki pridruženo beskonačno mnogo različitih vrijednosti.

Pogledajmo i još jedan geometrijski primjer, također preuzet iz udžbenika [5].

Primjer 2.

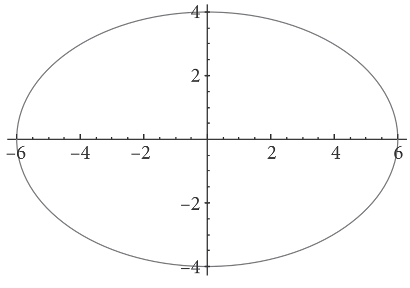
Ako iz jednadžbe elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ izrazimo y, dobivamo

$$y=b\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1}$$

gdje y može poprimiti i pozitivnu i negativnu vrijednost. Prethodna jednadžba govori da je ordinata točke na elipsi funkcija njezine apscise te propisuje postupak kojem moramo podvrći vrijednosti argumenta x ako želimo odrediti pripadne vrijednosti od y, koje možemo smatrati funkcijom argumenta x. Vidimo da je područje definicije ove funkcije segment $\left[-a,a\right]$.

Gledano kao višeznačna funkcija, vidimo da svakoj vrijednosti argumenta x u otvorenom intervalu $\left\langle -a,a\right\rangle$ pripadaju dvije vrijednosti funkcije y, i to $b\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ i $-b\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}$, gdje u ovim izrazima uzimamo pozitivnu vrijednost drugog korijena. Zato se može reći da je funkcija dana s (1) dvoznačna funkcija na intervalu $\left\langle -a,a\right\rangle$. S druge strane, u točkama $x=-a$ i $x=a$ funkcija dana s (1) je jednoznačna.

Ovim gledanjem možemo čitavu elipsu prikazati kao graf promatrane dvoznačne funkcije, dok bismo, prema današnjim definicijama i gledanjima, birajući samo jedan predznak u (1) mogli opisati samo dijelove elipse, tj. njenu gornju ili donju polovicu.



Graf dvoznačne funkcije iz Primjera 2.

Postoje li prednosti i mane ovakvog načina definiranja pojma funkcije? Naravno, definicija iz starog udžbenika predstavlja drugačiji koncept od današnjeg koncepta funkcije i njome je dan jedan općenitiji pojam koji se zapravo u upotrebi nije zadržao. No, to ne daje razlog za napadanje autora navedenog udžbenika jer ipak se radi o pojmu oko kojeg su se dugo lomila koplja te koji je svoje konačne preinake doživio tek u drugoj polovici prošlog stoljeća, u doba koje se otprilike podudara s vremenom prvog izdanja navedenog udžbenika. S vremenom se i u našim udžbenicima promijenila definicija pojma funkcije te je takva ostala do danas, ne ostavljajući za sobom nikakvu vidljivu štetu. Ipak se učenicima srednjih škola koncept funkcije niti ne predaje kroz svu općenitost svoje definicije – s jedne strane zato što kao takav nije niti potreban i mogao bi učenicima biti zbunjujući i prekompliciran, a s druge strane zato što su se učenici kroz ranije školovanje već sreli s brojnim primjerima funkcija, stekavši tako i polazni dojam o tom pojmu. Možda se jedini pravi problemi na tome mjestu i kriju među primjerima funkcija parnih korijena, s kojima su se učenici sreli i ranije. Jednostavno, ako je ranije naučeno i usvojeno da je $\sqrt{a^2}$ jednako $|a|$, pri čemu je $\sqrt{x}$ oznaka za funkciju drugog korijena, takvo što trebalo bi ostati nepromijenjeno. Naravno, uz jasno naglašenu razliku između rješavanja jednadžbi, gdje se može pojaviti više rješenja, i rada s funkcijama, čije vrijednosti trebaju biti jednoznačno određene.

S druge strane, javlja se i situacija u kojoj današnja definicija izaziva zbunjenost kod učenika, a koju takozvane višeznačne funkcije mogu otkloniti. To je upravo situacija u kojoj se učenici susreću s inverznom funkcijom.

Podsjetimo, inverzna funkcija funkcije $f : S \to S_1$ je funkcija $f^{-1} : S_1 \to S$ definirana na način da je $f^{-1}(y) = x$ ukoliko je $f(x) = y$. Za kompoziciju funkcije i njoj inverzne funkcije vrijedi $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ i $(f \circ f^{-1})(y) = y$, za sve $x \in S$ i $y \in S_1$. U starom udžbeniku je motivacija za uvođenjem inverzne funkcije prikazana na način da je svaka funkcija određeni proces u kojemu se polazi od skupa D (domene) pa se pridruživanjem određenih skupova (primijetimo – ne elemenata, nego skupova) elementima tog skupa izvodi novi skup $f(D)$ (antidomena). Međutim, često je potrebno obrnuti taj proces, pri čemu se polazi od skupa $f(D)$ kao domene te se pridruživanjem elemenata skupa D njegovim elementima izvodi skup D kao antidomena. Tako dobivena funkcija zatim se naziva inverzna funkcija i označava s f^{-1}, te se napominje da bi je se moglo zvati i antifunkcija ili protufunkcija.

S pojmom inverzne funkcije učenici se sreću nakon samog pojma funkcije, iako su već ranije vidjeli primjere takvih funkcija, poput trigonometrijskih funkcija i arkus funkcija, eksponencijalnih i logaritamskih funkcija te općih potencija. Prvo pitanje koje se postavlja jest mora li uopće uvijek postojati inverzna funkcija. Na primjer, ako postoje različiti x_1 i $x_2 \in S$ takvi da je $f(x_1) = f(x_2) = y \in S_1$, nije moguće definirati vrijednost $f^{-1}(y)$ jer bi morala biti (barem) jednaka i x_1 i x_2, što je u suprotnosti sa samom definicijom funkcije. No, učenici su u trećem razredu srednje škole upoznati s trigonometrijskim funkcijama za koje su vidjeli da su periodične te, prema tome, za svaku trigonometrijsku funkciju f postoji čak beskonačno mnogo različitih x_1 i x_2 takvih da je $f(x_1) = f(x_2)$. Osim toga, vidjeli su i da postoje arkus funkcije koje su inverzne trigonometrijskim funkcijama. Time se dolazi do donekle paradoksalne situacije da su već obrađene funkcije čija je egzistencija upitna, koja se može raščistiti pojašnjenjem da su arkus funkcije zapravo inverzne funkcije suženja, tj. restrikcija trigonometrijskih funkcija na manje intervale, čime dobivamo funkcije koje su injekcije. Time je, istina, donekle narušena definicija trigonometrijskih funkcija jer se diralo u njihovu domenu, no pozadinska teorija postaje ispravna. Svakako se radi o previše komplikacija na ovakvome mjestu na kojemu višeznačne funkcije problem rješavaju na način koji je mnogo intuitivniji, ali, naravno, prema današnjim definicijama i ne sasvim točan.

Promatrano s gledišta višeznačnih funkcija, nema nikakvih prepreka niti poteškoća u definiranju inverznih funkcija. Jednostavno, ukoliko je dana funkcija $f : S \to S_1$, za $y \in S_1$ će $f^{-1}(y)$ biti svi $x \in S$ sa svojstvom da je $f(x) = y$. Ukoliko je $f(x) = x^2$, tada će f^{-1} biti upravo funkcija drugog korijena iz Primjera 1. Ukoliko je dana (jednoznačna) funkcija sin x, tada će njoj inverzna funkcija arcsin $x = \sin^{-1} x$ biti beskonačnoznačna funkcija koja će npr. broju 0 pridružiti sve brojeve $k\pi$, gdj je k cijeli broj. Time su, u stvari, dana dva primjera jednoznačnih funkcija čije inverzne funkcije nisu jednoznačne.

Pogledajmo još neke primjere koji se nalaze među zadatcima u starome udžbeniku.

Primjer 3.

Mora li inverzna funkcija višeznačne funkcije također biti višeznačna? Primjeri:

a) $y = (x-1)^{\frac{1}{2}}$,

b) $y = \arccos x$.

Inverzna funkcija višeznačne funkcije ne mora biti višeznačna, npr. inverzna funkcija od $y = (x-1)^{\frac{1}{2}}$ je $f^{-1}(y) = y^2 + 1$, koja je jednoznačna, dok je inverzna funkcija od $y = \arccos x$ jednoznačna funkcija $f^{-1}(y) = \sin y$.

Primjer 4.

Provjerite je li inverzna funkcija funkcije $f(x) = \frac{3}{2}(4-x^2)^{\frac{1}{2}}$ i sama dvoznačna.

Iz $y = \frac{3}{2}(4-x^2)^{\frac{1}{2}}$ kvadriranjem i prebacivanjem dobivamo $4x^2 + 9y^2 = 36$, odakle je $f^{-1}(y) = \frac{2}{3}(9-y^2)^{\frac{1}{2}}$, što je dvoznačna funkcija. Grafovi obiju funkcija su elipse.

Naglasimo kako pojam višeznačne funkcije nije sasvim izašao iz upotrebe nego postoji i danas. Višeznačne funkcije učestalo se pojavljuju prilikom proučavanja funkcija kompleksne varijable, gdje je njihova upotreba neizbježna, za razliku od realnih funkcija realne varijable. U takvim situacijama uvijek se naglašava kako višeznačna funkcija nije prava funkcija te da je ona predstavljena skupom (jednoznačnih) funkcija koje ju potpuno određuju te se nazivaju grane funkcije. Uvijek postoji i posebno istaknuta grana funkcije koja se naziva glavna grana funkcije ili glavna vrijednost funkcije te je na taj način višeznačnoj funkciji pridružena jednoznačna funkcija. Naravno, ovakav je pristup prenapredan, a može se smatrati i nepotrebnim za srednjoškolsku matematiku.

Možda se u tome može i ogledati namjera autora starijih udžbenika, temeljnih nastavnih sredstava nastajalih u vrijeme dok je i u samoj matematici na nekim mjestima vladao još ne sasvim raščišćeni kaos. Pojam funkcije uvodili su na način koji se mogao smatrati korektnim te iz kojeg se lako dalo izdvojiti što se smatra pravom funkcijom. Osim toga, učenicima su ostavili dovoljno informacija za baratanje s generaliziranim oblicima poput grana funkcije, s kojima će se neki od njih eventualno susretati, dok su teškoće pri uvođenju inverzne funkcije glatko premošćene. Jasno, s općim prihvaćanjem nove, dorađene definicije pojma funkcije, mijenjao se i pristup autora udžbenika i njihov način izlaganja, pokazujući spremnost za napredovanje i promjene unutar same matematike.

Literatura

1. F. M. Brueckler, *Povijest matematike 1*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, 2007.
2. B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 2*, Element, Zagreb, 2004.
3. B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 4*, 1. dio, Element, Zagreb, 2006.
4. B. Jagodić, N. Sarapa, *Matematika 7*, Školska knjiga Zagreb, 1970.
5. Đ. Kurepa, I. Smolec, S. Škreblin, *Matematika za IV. razred gimnazije*, Školska knjiga Zagreb, 1970.
6. *The MacTutor History of Mathematics archive*, http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/