MATEMATIKA IZVAN MATEMATIKE

Analiza isplativosti spajanja općina

ALEKSANDAR HATZIVELKOS[1]

1. Uvod

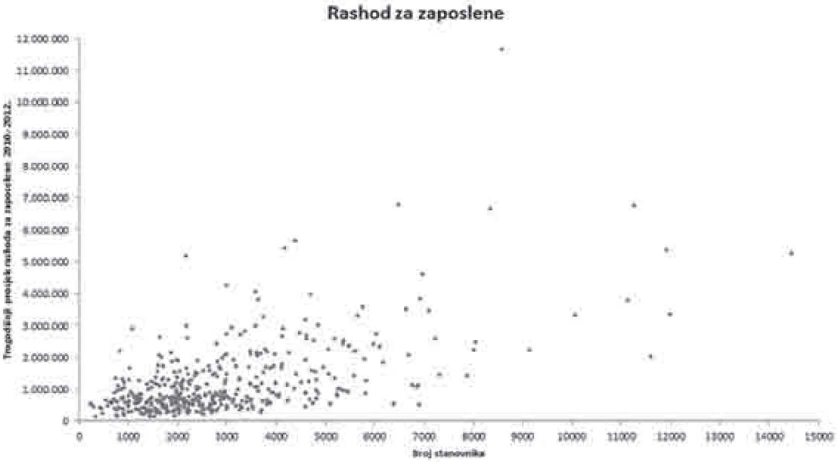
Tema koja već godinama živi u medijima i svakodnevnim razgovorima je ustroj Hrvatske na općine, gradove i županije. S posljednjim ustavnim promjenama, preustroj lokalne uprave i samouprave polagano ulazi i u politiku. „Svi znamo" da je broj jedinica lokalne uprave i samouprave prevelik, da se veliki iznosi troše na njezino funkcioniranje, te da je, financijski gledano, općine potrebno okrupniti, a njihov broj smanjiti. No, što o toj temi kažu brojevi? Relevantni podatci su javni i dostupni: Ministarstvo financija na svojim web-stranicama objavljuje proračune jedinica lokalne uprave i samouprave [2], dok se na mrežnim stranicama Državnog zavoda za statistiku mogu naći rezultati popisa stanovništva iz 2011. razvrstani i po jedinicama lokalne uprave i samouprave [1].

Cilj ovoga teksta je na osnovi tih podataka modelirati ponašanje dvaju parametara (rashode za zaposlene realizirane u svim općinama, te naknade za rad predstavničkih, izvršnih tijela i povjerenstava) u odnosu na veličinu općine, tj. broj stanovnika koji u njoj obitava. Nakon postavljenog modela cilj je analizirati kako na te troškove - dakle troškove funkcioniranja općina (troškovi za zaposlene) i troškove upravljanja općinama (naknade za predstavnička i izvršna tijela) - utječe spajanje općina.

2. Model

Za modeliranje ovog problema, a pomoću podataka navedenih u [1] i [2], formiramo niz uređenih parova (x_i, y_i), $i = 1..., n$, gdje je x_i broj stanovnika koji živi u pojedinoj općini u Republici Hrvatskoj, a y_i prosječna vrijednost rashoda za zaposlene u toj istoj općini izračunata za godine 2010., 2011. i 2012. Također formiramo još jedan niz uređenih parova (x_i, z_i), gdje je z_i trogodišnji prosjek iz istih godina, ali naknada za predstavnička i izvršna tijela te povjerenstva u i-toj općini. Oba se niza mogu jednostavno prikazati i grafički, kao na Slikama 1. i 2.

[1]Aleksandar Hatzivelkos, Veleučilište Velika Gorica



Slika 1. Trogodišnji prosjek rashoda za plaće s obzirom na veličinu općine

Slika 2. Trogodišnji prosjek naknada za predstavnička i izvršna tijela te povjerenstva, s obzirom na veličinu općine

Za dani niz uređenih parova (x_i, y_i) cilj nam je naći funkciju $f(x)$ takvu da vrijednosti $f(x_i)$ što bolje opisuje vrijednosti y_i. Uobičajeno je takav skup podataka aproksimirati linearnom funkcijom oblika $f(x) = A \cdot x + B$, no mi ćemo ovim modelom otići korak dalje te ćemo si prilikom modeliranja funkcije dati više slobode kako bismo dobili što kvalitetniju aproksimaciju. Stoga tražimo funkciju oblika

$$f(x) = A \cdot x^{\alpha} + B.$$

Metoda kojom ćemo se poslužiti je diskretna metoda najmanjih kvadrata. Tom metodom tražimo nepoznate koeficijente funkcije, A i B, na način da minimiziramo sumu kvadrata razlika između y_i i $f(x_i)$, tj.

$$S(A,B)=\sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-y_i)^2 \rightarrow min$$

$$S(A,B)=\sum_{i=1}^{n}(A\cdot x_i^{\alpha}+B-y_i)^2 \rightarrow min$$

Nužan uvjet za točku ekstrema je da su obje parcijalne derivacije u njoj jednake nuli. Iz toga slijedi:

$$\frac{\partial S}{\partial A}=\sum_{i=1}^{n}2\cdot(A\cdot x_i^{\alpha}+B-y_i)\cdot x_i^{\alpha}=\sum_{i=1}^{n}\left(2A\cdot(x_i^{\alpha})^2+2B\cdot x_i^{\alpha}-2y_i\cdot x_i^{\alpha}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(2A\cdot(x_i^{\alpha})^2+2B\cdot x_i^{\alpha}-2y_i\cdot x_i^{\alpha}\right)=0 \qquad \Rightarrow$$

$$A\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^{2\alpha}+B\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^{\alpha}=\sum_{i=1}^{n}y_i\cdot x_i^{\alpha}$$

Analogno, izjednačavanjem parcijalne derivacije po B s nulom, dolazimo do druge jednadžbe

$$A\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^{\alpha}+B\cdot n=\sum_{i=1}^{n}y_i$$

α	$\sqrt{S}$
1	19505334
1.1	19460933
1.2	19436463
1.21	19435096
1.22	19433923
1.23	19432943
1.24	19432156
1.25	19431560
1.26	19431155
1.27	19430939
1.28	19430913
1.29	19431074
1.3	19431422
1.4	19444937
1.5	19475808

Tablica 1. Tablica testiranih vrijednosti α i pripadnih odstupanja $\sqrt{S}$

Uz unaprijed zadani α, sume u obje jednadžbe računamo iz zadanih podataka (x_i, y_i). Potom rješavamo dobiveni sustav dviju jednadžbi s dvjema nepoznanicama, što nam daje vrijednosti *A* i *B*. Koliko je aproksimacija dobra, s obzirom na odabrani α, govori nam vrijednost sume kvadrata, odnosno *S*. Praktičnosti radi, umjesto *S* računat ćemo $\sqrt{S}$. Primjerice, ukoliko postavimo da je $\alpha = 1$ (dakle, ukoliko tražimo linearnu aproksimaciju), sustav jednadžbi svodi se na:

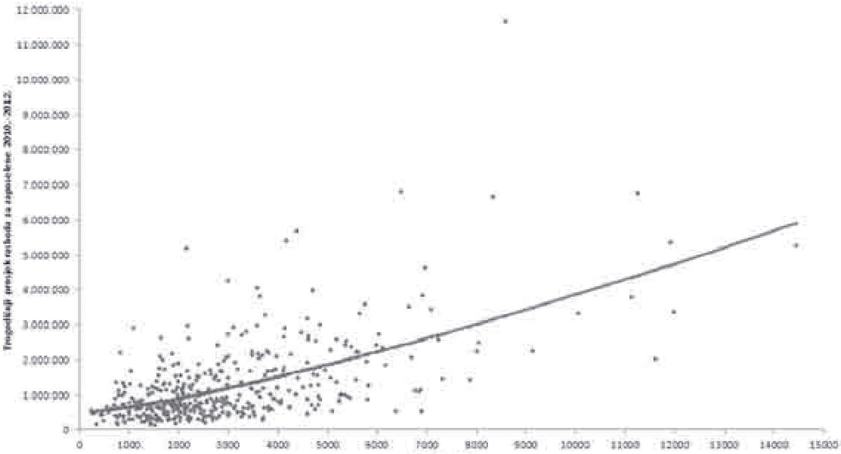
$$683\ 764\ 569\ 584.7 \cdot A + 12\ 722\ 466.3 \cdot B = 23\ 532\ 294\ 995\ 980.1$$

$$12\ 722\ 466.3 \cdot A + 429 \cdot B = 528\ 299\ 855.3$$

To daje rješenja $A = 343.58$, $B = 215\,344.73$, te mjeru odstupanja $\sqrt{S} = 19\ 505\ 334.47$. Testiranjem, varirajući vrijednosti za α, dolazimo do zaključka kako najmanje odstupanje daje funkcija kod koje je $\alpha = 1.28$ (vidi Tablicu 1.). Rješavanjem pripadnog sustava dolazimo do vrijednosti za *A* i *B*, pa pripadna funkcija glasi

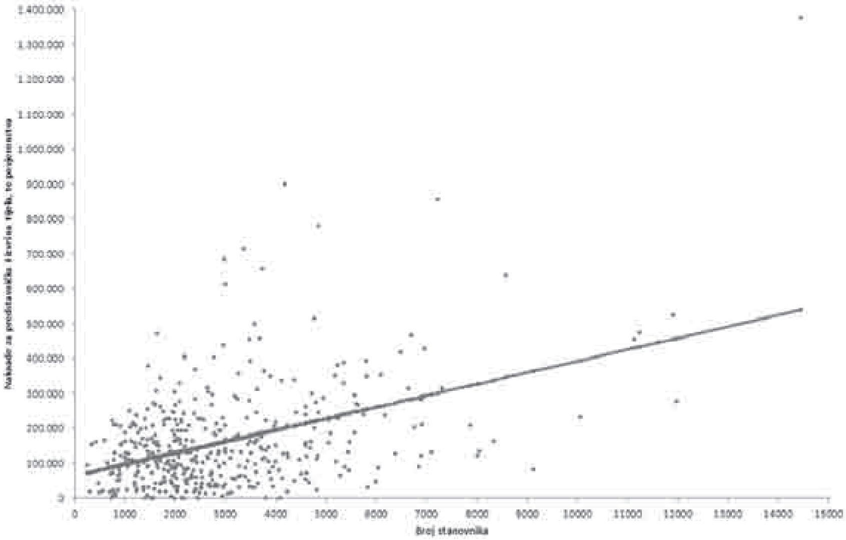
$$f(x) = 25.66 \cdot x^{1.28} + 470\ 389.30 \qquad (1)$$

Njezino je odstupanje jednako $\sqrt{S} = 19\ 430\ 912.51$.



Slika 3. Trogodišnji prosjek rashoda za plaće s aproksimativnom funkcijom f(x)

Primijenimo li isti postupak na parove (x_i, z_i) kojima broju stranovnika pojedine općine pridružujemo iznos naknade koji se u toj općini izdvaja za predstavnička i izvršna tijela te povjerenstva, te varirajući iznose potencije α, dolazimo do rezultata da najbolju aproksimaciju tog skupa podataka daje upravo linearna aproksimacija,



Slika 4. Trogodišnji prosjek naknada za predstavnička i izvršna tijela te povjerenstva, s aproksimativnom funkcijom g(x)

tj. aproksimacija oblika $g(x) = Ax + B$. Diskretna metoda najmanjih kvadrata ovaj nas put vodi do sustava

$$5\ 437\ 596\ 328 \cdot A + 1\ 268\ 752 \cdot B = 2\ 592\ 048\ 566.69$$
$$1\ 268\ 752 \cdot A + 429 \cdot B = 68\ 921\ 201.78,$$

koji za rješenje daje funkciju

$$g(x) = 32.86 \cdot x + 63\ 484.33 \quad (2)$$

Na Slikama 3. i 4. grafički su prikazane funkcije $f(x)$ i $g(x)$ koje aproksimiraju dane podatke.

3. Analiza

Uz pretpostavku induciranu grafom, da se trošak na plaće može aproksimirati funkcijom oblika $f(x) = A \cdot x^{\alpha} + B$, postavlja se pitanje za koje se veličine x_1 i x_2 spajanje općina isplati, tj. za koje će vrijednosti vrijediti

$$f(x_1 + x_2) < f(x_1) + f(x_2)\ ?$$

Raspišimo traženu nejednakost:

$$A \cdot (x_1 + x_2)^{\alpha} + B < A \cdot x_1^{\alpha} + B + A \cdot x_2^{\alpha} + B$$
$$A \cdot (x_1 + x_2)^{\alpha} < A \cdot x_1^{\alpha} + A \cdot x_2^{\alpha} + B$$
$$(x_1 + x_2)^{\alpha} < x_1^{\alpha} + x_2^{\alpha} + \frac{B}{A} \quad (3)$$

Ukoliko pretpostavimo da se spajaju podjednako velike općine, tj. da je $x = x_1 = x_2$, slijedi:

$$(2x)^\alpha < x^\alpha + x^\alpha + \frac{B}{A}$$

$$2^\alpha \cdot x^\alpha - 2 \cdot x^\alpha < \frac{B}{A}$$

$$x^\alpha < \frac{B}{A} \cdot \frac{1}{2^\alpha - 2}$$

Valja napomenuti da posljednja nejednakost vrijedi ako je $2^\alpha - 2 > 0$, tj. ako je $\alpha > 1$, što u našem slučaju jest. Dakle,

$$x < \left(\frac{B}{A} \cdot \frac{1}{2^\alpha - 2} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

Uvrstimo li brojeve dobivene u prethodnom poglavlju, $A = 470\ 389.3$, $B = 25.66$ i $\alpha = 1.28$, slijedi da je $x < 4151.5$, odnosno da se spajanjem dviju općina podjednake veličine, čiji je broj stanovnika manji od 4151.5, opisanim modelom postiže ušteda na ukupnim izdatcima za plaće zaposlenih.

Općenito, spajanjem dviju općina od kojih jedna ima k puta više stanovnika od druge, tj. za koje je $x_1 = x$, $x_2 = k \cdot x$, iz jednadžbe (3) slijedi ocjena:

$$(x + k \cdot x)^\alpha < x^\alpha + (k \cdot x)^\alpha + \frac{B}{A}$$

$$x^\alpha \cdot (1+k)^\alpha < x^\alpha \cdot (1 + k^\alpha) + \frac{B}{A}$$

$$x^\alpha \left((1+k)^\alpha - 1 - k^\alpha \right) < \frac{B}{A}$$

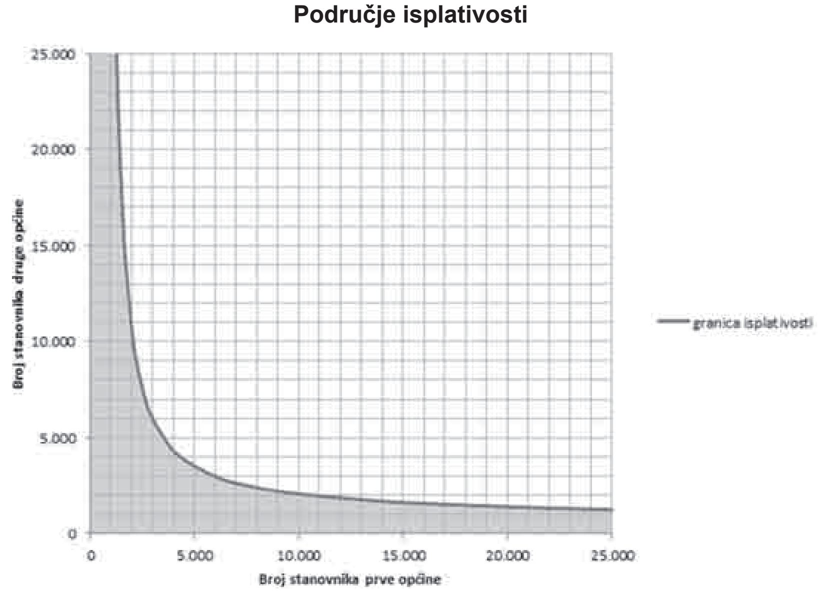
$$x^\alpha < \frac{B}{A} \cdot \frac{1}{(1+k)^\alpha - 1 - k^\alpha}$$

$$x < \left(\frac{B}{A} \cdot \frac{1}{(1+k)^\alpha - 1 - k^\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha}}, \qquad (4)$$

što je ocjena koja vrijedi za $(1+k)^\alpha - 1 - k^\alpha > 0$. Ta tvrdnja slijedi iz analize funkcije $g(x) = (1+x)^\alpha - 1 - x^\alpha$, za koju se lako pokaže da je $g(0) = 0$, te da je funkcija rastuća (tj. da je $g'(x) > 0$) za $x > 0$ i $\alpha > 1$. Uvrštavanjem vrijednosti za A, B i α u nejednadžbu (4) dobivamo:

$$x < \left(18329.127 \cdot \frac{1}{(1+k)^{1.28} - 1 - k^{1.28}} \right)^{0.78125}. \qquad (5)$$

Zaključujemo kako kod spajanja dviju općina kod kojih jedna ima k puta više stanovnika, manja općina mora imati manje stanovnika od međe iskazane u nejednadžbi 5. Uvrštavanjem različitih vrijednosti za k u ocjenu iskazanu nejednadžbom 5, dobivamo graf prikazan na Slici 5. u kojemu je zatamnjeno područje isplativosti, odnosno kombinacija veličina općina koje se spajaju, a čijim bi se spajanjem po opisanom modelu postiglo smanjenje u ukupnoj masi plaća. Odavde sad pak lako čitamo da bi, primjerice, spajanje dviju općina sa 7000 i 2000 stanovnika prema opisanom modelu bilo ekonomski isplativo u odnosu na rashode za zaposelnike, no spajanje dviju općina s npr. 4000 i 5000 stanovnika ne bi.



Slika 5. Područje isplativosti spajanja općina s obzirom na njihovu veličinu

Na sličan način možemo izvesti granicu isplativosti spajanja n općina, uz pretpostavku da su općine koje spajamo podjednake veličine.

Raspisivanjem nejednadžbe $f(x_1+\cdots+x_n)<f(x_1)+\cdots+f(x_n)$, uz pretpostavku da je za svaki i, $x_i=x$, dolazimo do ocjene

$$x<\left(\frac{B}{A}\cdot\frac{n-1}{n^{\alpha}-n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \tag{6}$$

što uz uvrštavanje poznatih vrijednosti daje granice isplativosti spajanja općina: ako ih spajamo tri, broj stanovnika svake mora biti manji od 3464; kod spajanja četiriju općina, broj stanovnika svake mora biti manji od 3063; a pri spajanju pet općina u svakoj mora živjeti manje od 2793 stanovnika. Naravno, kao i kod spajanja dviju općina, analiza se može provesti još detaljnije, ugrađujući u analizu omjer veličina općina, no smatramo kako je kod metode koja je prvenstveno aproksimativnog karaktera takvo ulaženje u detalje nepotrebno – već navedene ocjene daju dobru sliku gdje su granice isplativosti glede spajanja većeg broja općina.

Prilikom analiziranja isplativosti spajanja općina u odnosu na trošak naknada za predstavnička i izvršna tijela te povjerenstva, zadatak je mnogo jednostavniji. Naime, kako je prikazano jednadžbom 2., najbolja aproksimacija danih podataka *g(x)* je linearna funkcija. Ispitujući isplativost spajanja općina u tom modelu, slijedi:

$$g(x_1+x_2)<g(x_1)+g(x_2)\Leftrightarrow A(x_1+x_2)+B<(Ax_1+B)+(Ax_2+B)\Leftrightarrow 0<B$$

Kako je $g(x)=32.86\cdot x+63\ 484.33$, odnosno $B=63\ 484.33>0$, slijedi da je spajanje općina u odnosu na trošak naknade za predstavnička i izvršna tijela te povjerenstva – uvijek isplativo.

4. Zaključak

Ovom smo matematičkom analizom pokazali da se u podatcima o proračunima jedinica lokalnih uprava i samouprava nalaze zanimljivi brojevi, a matematičke metode otvaraju vrata različitim interpretacijama.

Primjerice, podatci o prosječnoj aproksimativnoj funkciji $f(x) = 25.66 \cdot x^{1.28} + 470\ 389.30$ koja opisuje vezu između broja stanovnika neke općine i iznosa koji se u njoj troše na plaće zaposlenika, mogu se interpretirati na sljedeći način: prosječno, postoji godišnji iznos koji se u općinama troši na „hladni pogon”, odnosno održavanje sustava bez obzira ne veličinu općine. Funkcija dobivena ovim modelom sugerira da se radi o vrijednosti od oko 450 000 kuna. Nadalje, vrijednost parametra $\alpha=1.28$ govori nam da funkcija troškova raste *konveksno* s povećanjem broja stanovnika. Moguća interpretacija tog podatka je u većem opsegu ovlasti većih općina koje se mora financirati iz proračuna općine. Zbog toga i imamo zaključak da isplativost spajanja nije automatska, nego da ovisi o veličini općina koje bismo spajali.

S druge strane, zanimljivo je primijetiti da prosječna funkcija koja opisuje ovisnost troškova općine za financiranje vlastitog političkog sustava s obzirom na svoju veličinu – ispunjava očekivanja. Rast troškova je linearan i u potpunosti u skladu s *apriori* očekivanjem da okrupnjavanje jedinica lokalne uprave i samouprave vodi k ukupno manjem političkom aparatu, stoga i ukupno manjim troškovima.

Ipak, smatramo potrebnim na kraju istaknuti kako je opisani model upravo to – matematički model određenog skupa podataka, pa je u vrednovanju rezultata ove analize to potrebno imati na umu. Ovakvim se radom u obzir ne uzimaju brojni parametri koji zasigurno imaju svoju ulogu u traženju optimalnog rješenja za broj i veličinu jedinica lokalne uprave i samouprave u Republici Hrvatskoj. Stoga ni rezultate nije dobro nekritički koristiti kao apsolutni podatak koji u potpunosti točno i realno opisuje veličine i njihove odnose. Pa ipak, smatramo kako ovaj pristup pokazuje da matematičke metode i modeli mogu dati zanimljiv okvir i koristan alat za promišljanje i zaključivanje o mnogim fenomenima koji nas okružuju.

Literatura

1. Državni zavod za statistiku „Kontigenti stanovništva po gradovima / općinama, popis 2011.” http://www.dzs.hr/Hrv/censuses/census2011/results/htm/H01_01_03/H01_01_03.html
2. Ministarstvo financija „Ostvarenje proračuna jedinica lokalne uprave i samouprave za period 2010.-2012.” http://www.mfin.hr/hr/ostvarenje-prpracuna-jlprs-za-period-2010-201