# IZ NASTAVNE PRAKSE

# Pogled u matematičku bilježnicu staru 9 desetljeća

Izet Kalaba[1]

Dobro je znati da je netko na jugu Hrvatske, u oskudnom kršu dalmatinskog priobalja, prije više od 85 godina rješavao zadatke iz ravninske i sferne trigonometrije. Stotinu kilometara udaljen od raskošnog Dubrovnika i isto toliko od moćnog Splita, u svakodnevnom preživljavanju od masline i ribarenja, netko je izučavao povezanost stranica i kutova trokuta potrebnog pomorcima. To mnogo govori o duhovnosti i misaonosti toga podneblja.

## Uvod

Bilježnica s mirisom starine koja putuje kroz vrijeme. Bez naslovnice, bez početka, kao cvijet bez svih latica. Ipak, otmjen, veličanstven, ponosit neki cvijet. Čuva trag jedne ruke, jednog uma što je bio iznad zemnih stvari. Trag precizan, uredan i točan u svim segmentima pisane riječi. Potiče na mnoga pitanja... Kada su i gdje ti vezovi izvezeni? Kada su sati jednoga mudrog čovjeka bili posvećeni kutovima i stranicama trokuta? Kada su trajale potrage za rješenjima? Je li bilo u toj sobi s mirisom znanja toplo ili hladno? Jesu li mirisale naranče? Je li pitalac, tragač za istinom, bio mlad čovjek ili mudri starac? Potezi njegova pera kao da poručuju: skroman sam ali snažan, moj um je bistar i jak. Ja znam mnoge tajne i putove kojima ne idu mnogi. Moje su misli uznosite i ponosite.

Dok gledam te nizove urednih slova i brojeva, osjećam te poruke, tu samouvjerenu snagu i altruizam. Kao da kažu: evo, darujem svoja rješenja, svoj trud. Dijelim to s tobom. Pobožno, svečano ulazim u taj svijet koji je bio skriven, netaknut, zagubljen.

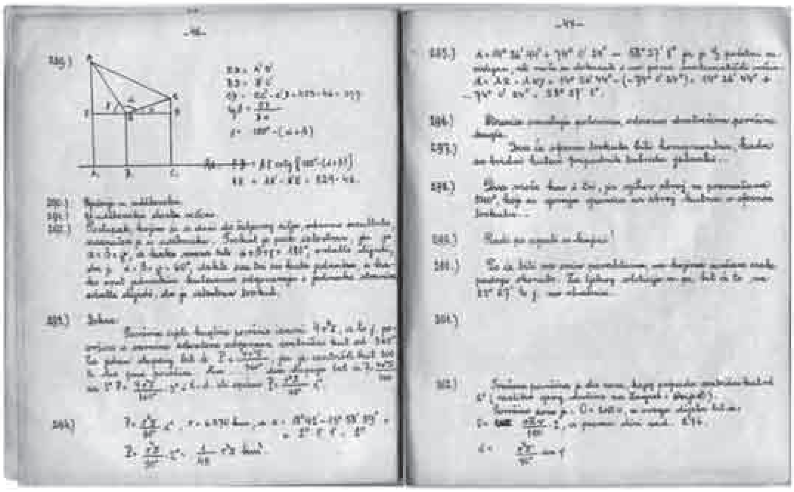
Vrijeme je da stranice te bilježnice s početka prošlog stoljeća ugledaju svjetlo dana.

Bilježnica je pregledna, bez crta, kvadratića, iznimno uredna, s prekrasnim rukopisom. Matematički sadržaj daje hrvatskom jeziku određenu britkost, a poneke, danas rijetko ili nikako korištene riječi, svojom nas arhaičnošću vraćaju u neko drugo

[1]Izet Kalaba, SŠ fra Andrije Kačića Miošića, Ploče

vrijeme. Analiza svakog zadatka je detaljna, pisana bez žurbe u vremenu u kojemu se živjelo sporije. Nerijetko je autor rukopisa uživljen u zadatak spajajući se s njim, pokazujući time vjeru u snagu matematičkog izričaja.

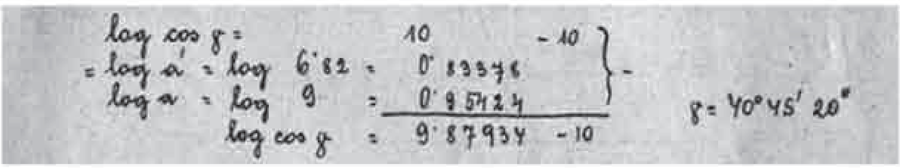
Riječ je, dakle, o bilježnici iz matematike s nadnevkom na predzadnjoj stranici iz 1928. godine. Nedostaje prvih nekoliko stranica. U njoj je riješeno 388 zadataka iz ravninske i sferne trigonometrije, pa predstavlja svojevrsni repetitorij iz toga područja. Bez obzira na njezinu stvarnu starost, odlučio sam neke pojmove iz te bilježnice istaknuti i usporediti s današnjima.



*Slika 1.*

## Decimalna točka

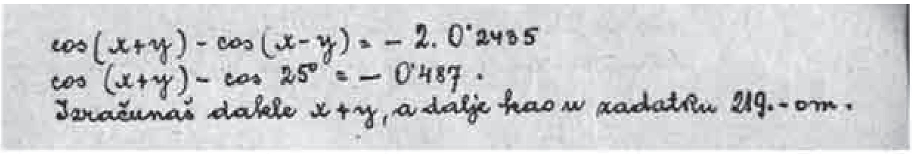
Matematičaru odmah pada u oči zapis decimalnog broja.




*Slika 2.*

Svugdje je decimalna točka u gornjem položaju, a ne dolje. Tako je broj *šest cijelih osamdeset dva* zapisan kao 6˙82, a ne (kao što danas pišemo) 6.82. Ovakav način zapisivanja decimalnih brojeva koristio se u Hrvatskoj od 1918. do 1941. godine.

Točka kao znak množenja u tom se periodu pisala dolje, a ne (kao danas) u sredini, dakle, 2.0˙2435=0˙487. Iako se ovako zapisivalo i prije 1918. godine, ipak bilježnica nije iz tog perioda jer se tada broj 6370 km (polumjer Zemlje iz jednog zadatka) pisao u obliku 6.370 km, što u bilježnici nije slučaj. Naredbu za takvo zapisivanje cjelobrojnih brojeva osobno je potpisao ban Khuen-Héderváry 1889. godine. Nadalje, bilježnica nije ni iz razdoblja Nezavisne Države Hrvatske, a najmanje poslije Drugog svjetskog rata, jer se u prvom slučaju točka kao znak množenja pisala u sredini, dok je u drugom slučaju decimalna točka zamijenjena zarezom.

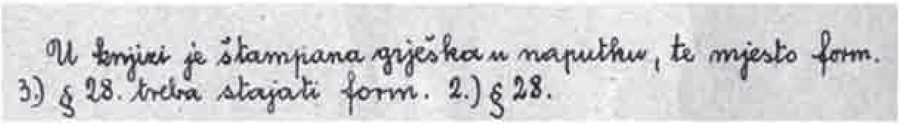

cos(x+y) - cos(x-y) = - 2. 0'2435
cos (x+y) - cos 25° = - 0'487.
Izračunaš dakle x+y, a dalje kao u zadatku 219.-om.

*Slika 3.*

Danas, pak, imamo nepotrebni dualitet. U udžbenicima matematike prevladava decimalna točka, a u većini drugih udžbenika i raznim aktima – decimalni zarez.

## Greška ili grješka

I dok sam sasvim nevažno, usput, tražio grešku u rješenju nekog zadatka, u bilježnici sam našao samo *grješku*, ali kao riječ.

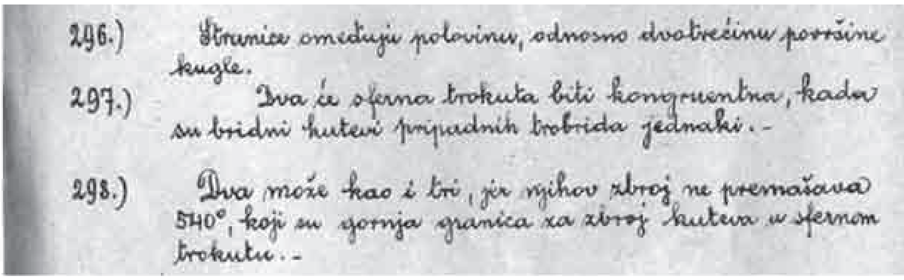

U knjizi je štampana grješka u naputku, te mjesto form. 3.) § 28. treba stajati form. 2.) § 28.

*Slika 4.*

Danas bismo prednost dali riječi *tiskana* umjesto *štampana*, *naputak* bi ostao isti, dok riječ *mjesto* u gornjoj rečenici djeluje pomalo začudno. Na mjestu riječi *mjesto* došla bi riječ *umjesto*, dok bi *grješka* bila prema slobodnom izboru. No, skraćenica *npr*. u bilježnici je pisana *n.pr.*

## Dvije trećine i dvotrećina

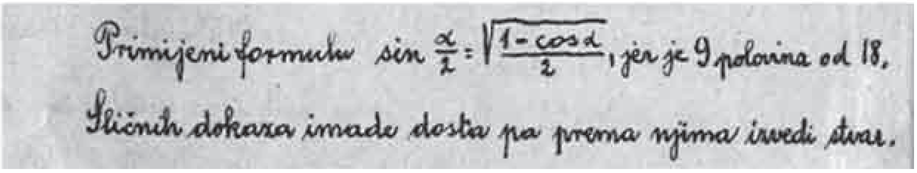
Iako je za neke odluke u Saboru potrebna dvotrećinska većina, na satu matematike kažemo jednostavnije – dvije trećine. Za *kongruentnost* koristimo *sukladnost*, a riječ *premašava* tako lijepo zvuči da bih je najradije i sam koristio. I dalje zbroj kutova sfernog trokuta ne *premašava* 540°, iako je u ovoj bilježnici sveprisutna riječ *kutevi*.


296.) Stranice omeđuju polovinu, odnosno dvotrećinu površine kugle.
297.) Dva će sferna trokuta biti kongruentna, kada su bridni kutevi pripadnih trobrida jednaki.-
298.) Dva može kao i tri, jer njihov zbroj ne premašava 540°, koji su gornja granica za zbroj kuteva u sfernom trokutu.-

*Slika 5.*

## I polovina *imade*

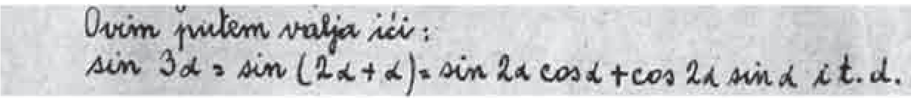
Polovina je svakako starija od trećine, što se vidi po korijenu riječi. No, mogla bi je istisnuti polovica.



Primijeni formulu $\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$, jer je 9 polovina od 18.
Sličnih dokaza imade dosta pa prema njima izvedi stvar.

*Slika 6.*

Autor bilježnice kao da nam govori kojim putom treba ići.



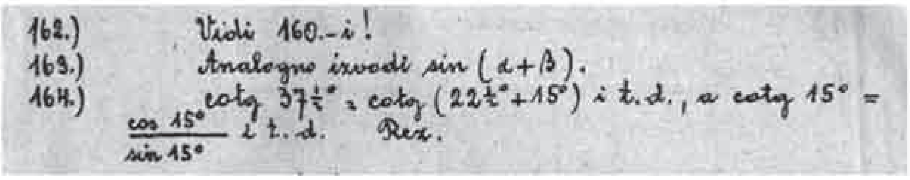
Ovim putem valja ići:
$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha+\alpha) = \sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha \sin\alpha$ i t.d.

*Slika 7.*

Lakše bih riješio neki teži zadatak iz ove bilježnice nego odredio kojim *putovima*, a ne *putevima* treba ići. No, vratimo se osnovnoj ideji ovoga članka, a to je prenijeti neke pojmove koje danas na satu matematike ili rijetko koristimo ili smo ih zamijenili drugima. Tako se na prethodnoj slici vidi skraćenica za *i tako dalje*, *i t.d.* umjesto današnje *itd*.

## Razlomak ili decimalni broj

U bilježnici je prednost dana razlomku nad decimalnim oblikom racionalnog broja. Logaritamske i trigonometrijske vrijednosti uglavnom su transcendentni brojevi i oni su u decimalnom zapisu. Kao što drevni igrač šaha više voli figuru lovca od skakača, tako i pisac ove bilježnice, kada ima izbor, radije računa razlomkom nego decimalnim brojem.

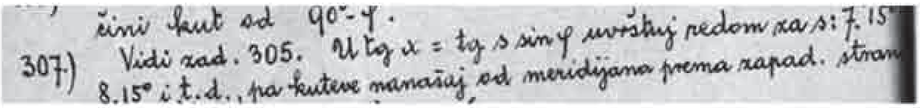


162.) Vidi 160.-i!
163.) Analogno izvedi $\sin(\alpha+\beta)$.
164.) $\cot 37\frac{1}{2}^\circ = \cot(22\frac{1}{2}^\circ+15^\circ)$ i t.d., a $\cot 15^\circ = \frac{\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ}$ i t.d. Rez.

*Slika 8.*

U nastavi koristimo mješovit broj, kao zbroj cijelog i razlomljenog, ali ako je jedinica mjere pored njega, češće koristimo decimalni zapis, npr. 22.5° a ne $22\frac{1}{2}^\circ$, što je u bilježnici obrnuto.

## *Uvrštuj* i *nanašaj*

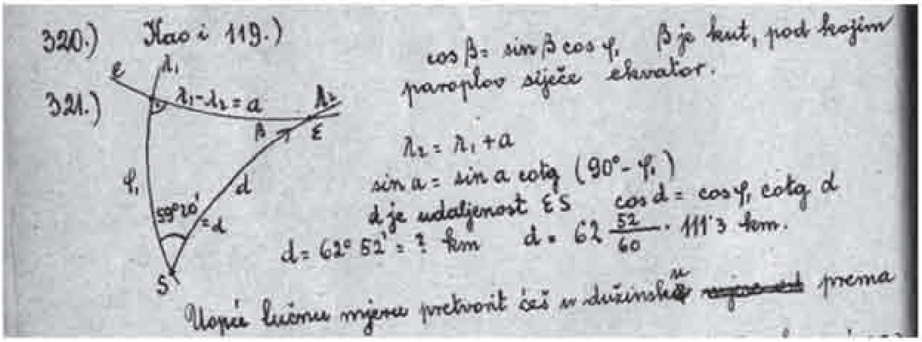


čini kut od 90°-φ.
307.) Vidi zad. 305. U tg α = tg s sin φ uvrštuj redom za s: 7.15
8.15° i t.d., pa kutove nanašaj od meridijana prema zapad. stran

*Slika 9.*

Prema smislu zadatka značilo bi *uvrsti redom ili uvrštavaj*, pa kutove *nanesi* ili *nanosi*. *Nanesi* je svršen oblik, *nanosi* nesvršen, ali *nanašaj* – to traje i traje jer u zadatku treba od meridijana prema zapadu nanijeti puno kutova.

Nalazim još jednu neobičnu riječ, *paroplov*.



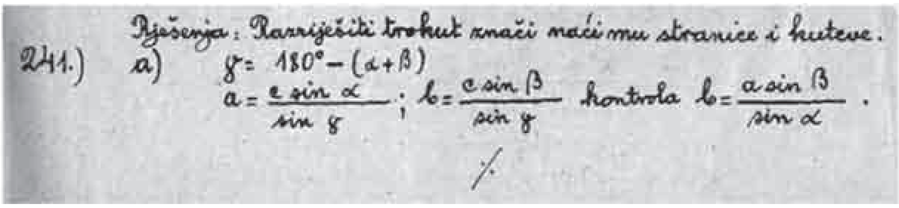
320.) Kao i 119.)
321.) $\cos\beta_1 = \sin\beta\cos\varphi_1$ β je kut, pod kojim paroplov siječe ekvator.
$\lambda_1 - \lambda_2 = a$
$\lambda_2 = \lambda_1 + a$
$\sin a = \sin a \cot (90° - \varphi_1)$
d je udaljenost ES $\cos d = \cos\varphi_1 \cot d$
$d = 62° 52' = ?$ km $d = 62\frac{52}{60} \cdot 111{,}3$ km.
Uopće lučnu mjeru pretvorit ćeš u dužinsku ~~mjeru~~ prema

*Slika 10.*

*Paroplov* plovi uz pomoć pare, ali ne znamo kako izgleda, tako da ostaje u rječnicima kao primjer neobične tvorbe.

## *Razriješi* trokut

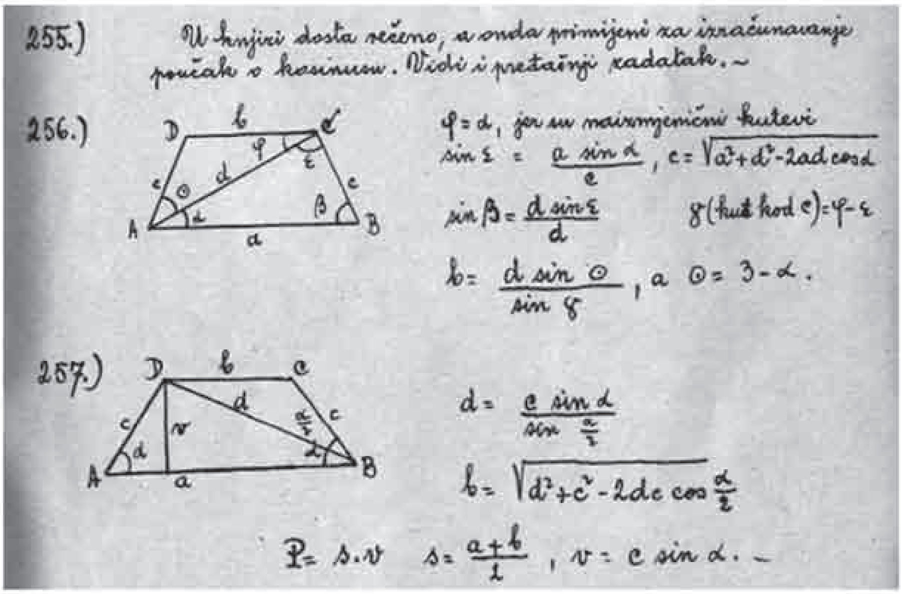
*Razriješi* trokut skraćeni je oblik umjesto duljeg, *odredi stranice i kutove trokuta*. Vrlo praktično, iako se rješava jednadžba, a ne trokut. Ali, zato i nije *riješi* trokut nego *razriješi* trokut.



Rješenja: Razriješiti trokut znači naći mu stranice i kutove.
241.) a) $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$
$a = \frac{c \sin\alpha}{\sin\gamma}$; $b = \frac{c\sin\beta}{\sin\gamma}$ kontrola $b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}$.

*Slika 11.*

Slova grčkog alfabeta koja se koriste za označavanje kutova uzeta su redom, što bismo danas rekli – po abecedi. Prva četiri slova svi znamo: alfa $\alpha$, beta $\beta$, gama $\gamma$, delta $\delta$, ali autor peti kut označava petim slovom alfabeta – epsilonom $\varepsilon$, dok se danas tim slovom uglavnom želi naglasiti da je neki broj mali, blizu nule. Dakle, danas je većina slova grčkog alfabeta specijalizirana, što u to vrijeme očito nije bio slučaj.



255.) U knjizi dosta rečeno, a onda primijeni za izračunavanje poučak o kosinusu. Vidi i pretežni zadatak.–

256.) $\varphi = \alpha$, jer su naizmjenični kutevi

$\sin\varepsilon = \dfrac{a \sin\alpha}{c}$, $c = \sqrt{a^2+d^2-2ad\cos\alpha}$

$\sin\beta = \dfrac{d \sin\varepsilon}{d}$  $\gamma$ (kut kod C) $= \varphi - \varepsilon$

$b = \dfrac{d \sin\theta}{\sin\gamma}$, a $\theta = 3 - \alpha$.

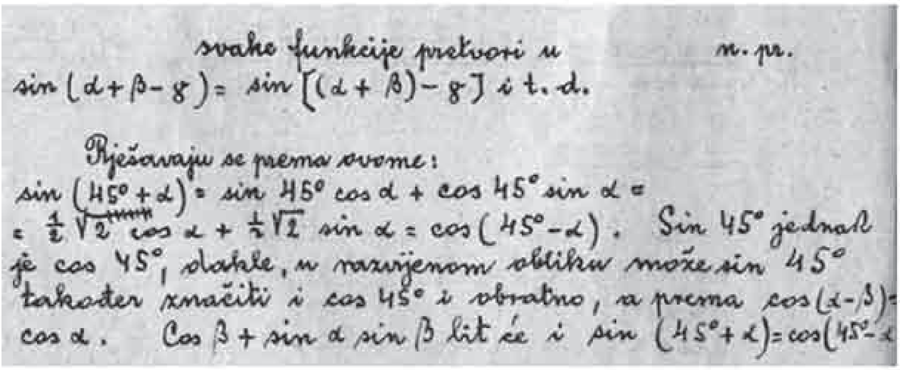
257.) $d = \dfrac{c \sin\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$

$b = \sqrt{d^2+c^2-2dc\cos\frac{\alpha}{2}}$

$P = s \cdot v$  $s = \dfrac{a+b}{2}$, $v = c \sin\alpha$.–

*Slika 12.*

Kada autor počinje rečenicu matematičkom oznakom, onda ne piše uobičajeno veliko pisano slovo nego uvećano malo. Ako treba rečenicu započeti sa *sin x* ili *cos x*, on piše Sin x  ili  Cos x , sl.13. U drugim slučajevima koristi velika pisana slova, sl.6.



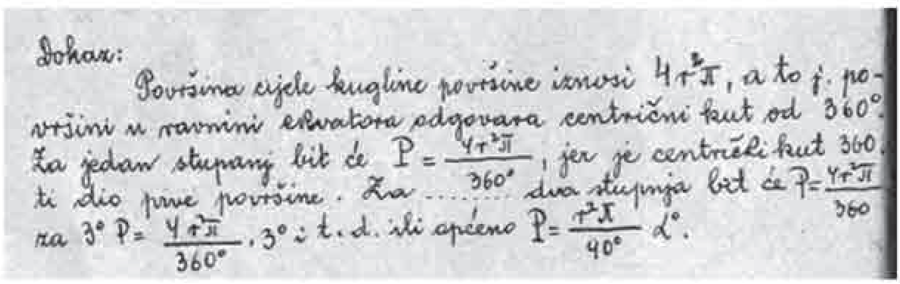
svake funkcije pretvori u n. pr.
$\sin(\alpha+\beta-\gamma) = \sin[(\alpha+\beta)-\gamma]$ i t. d.

Rješavaju se prema ovome:
$\sin(45°+\alpha) = \sin 45° \cos\alpha + \cos 45° \sin\alpha =$
$= \frac{1}{2}\sqrt{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sqrt{2}\sin\alpha = \cos(45°-\alpha)$. Sin 45° jednak je cos 45°, dakle, u razvijenom obliku može sin 45° također značiti i cos 45° i obratno, a prema $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha$. Cos $\beta + \sin\alpha \sin\beta$ bit će i $\sin(45°+\alpha) = \cos(45°-\alpha)$

*Slika 13.*

## Površina površine

Na satu matematike kažemo *duljina dužine* i ta dva pojma za nas nisu sinonimi. U geometriji postoje razne plohe; jedne su ravne, druge valovite, treće sedlaste i sl. Konačne plohe imaju svoju površinu izraženu brojem. Dakle, površina površine bila bi površina plohe. No, dublju analizu traži to što pisac bilježnice koristi i riječ *ploha*. On razlikuje plohe međusobno, zato neke plohe naziva površinama, dok riječ *oplošje* uopće ne koristi.

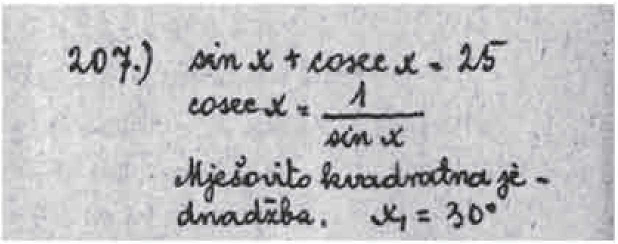

Dokaz:
Površina cijele kugline površine iznosi $4r^2\pi$, a to j. površini u ravnini ekvatora odgovara centrični kut od 360°. Za jedan stupanj bit će $P = \frac{4r^2\pi}{360°}$, jer je centrički kut 360. ti dio prve površine. Za ...... dva stupnja bit će $P = \frac{4r^2\pi}{360}$ za 3° $P = \frac{4r^2\pi}{360°} \cdot 3°$ i. t. d. ili općeno $P = \frac{r^2\pi}{40°}\alpha°$.

*Slika 14.*

Na gornjoj slici još je jedan pojam, ali u dva oblika, *cenrtični* kut i *centrički* kut. Bilo bi neumjesno od mene kao matematičara objašnjavati razliku. U nastavnoj praksi za kut čiji je vrh u središtu kružnice kažemo da je središnji kut, rjeđe centralni kut. Tako jedna milja na površini Zemlje ima odgovarajući središnji kut od jedne minute.

## *Mješovita* a ne potpuna kvadratna jednadžba

Za kvadratnu jednadžbu $ax^2 + c = 0$ kažemo da je čista kvadratna jednadžba, dok je jednadžba $ax^2 + bx = 0$ prikraćena. Za jednadžbu koja ima članove i jedne i druge u bilježnici je naveden prirodni naziv, *mješovita*. Danas takvu jednadžbu $ax^2 + bx + c = 0$ nazivamo općom ili potpunom jednadžbom drugog stupnja s jednom nepoznanicom.


207.) $\sin x + \operatorname{cosec} x = 2{,}5$

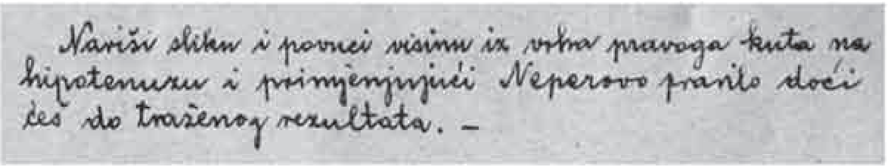
$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$

Mješovita kvadratna jednadžba. $x_1 = 30°$

*Slika 15.*

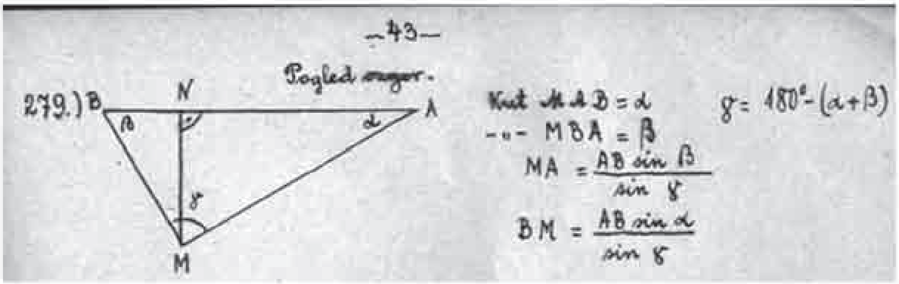
Početna jednadžba će nakon sređivanja prijeći u $\sin^2 x - 2.5\sin x + 1 = 0$, a ona je mješovita ili potpuna. No, nije stvar samo u nazivu, nego i u metodici obrade kvadratne jednadžbe. Poštovano je didaktičko načelo *od jednostavnijeg k složenijem*, što će reći da su se prvo učile nepotpune jednadžbe pa tek onda potpuna koja je zapravo mješovita. Moglo se raditi i obrnuto; tada bi se istaknula deduktivnost matematike. Dakle, prvo opća, a tek poslije nepotpune kao posebni slučajevi. Ipak, u nastavnoj praksi prevladava prvi slučaj.

## *Nariši* sliku i pogledaj *ozgor*


Nariši sliku i povuci visinu iz vrha pravoga kuta na hipotenuzu i primjenjujući Neperovo pravilo doći ćeš do traženog rezultata. –

*Slika 16.*

Kod većine zadataka iz geometrije treba nacrtati odgovarajuću sliku, izabrati povoljan kut gledanja i uočiti određene povezanosti između dužina, kutova i ostalih elemenata slike, te zaključiti koja bi se formula mogla primijeniti na izračunavanje nepoznate veličine.

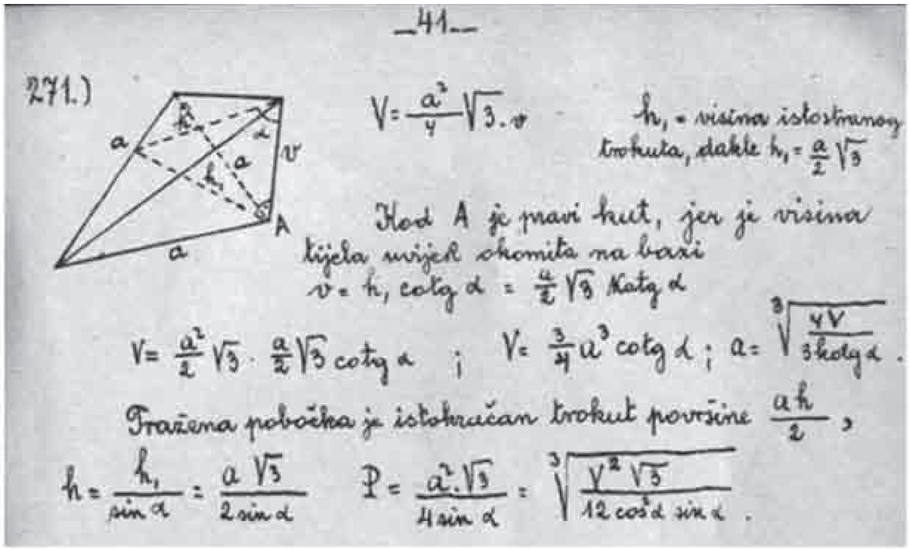



*Slika 17.*

Napierovo pravilo je polovicom prošlog stoljeća kod nas izostavljeno iz nastavnog programa matematike. Tako ga danas ne uče niti učenici matematičkih gimnazija, niti studenti matematike, uče ga tek studenti pomorstva, geodezije i sl. Zahvaljujući, između ostalog, i Napierovom pravilu, čovječanstvo se kasnije otisnulo u svemir. Pisac naše bilježnice poznavao je Napierovo pravilo, bez obzira što mu prezime nije napisao u originalu, već jednostavno *Neper*. Inače to pravilo, uz odgovarajuću sliku, glasi: Kosinus svakog elementa pravokutnog sfernog trokuta jednak je produktu kotangensa susjednih elemenata ili jednak je produktu sinusa ne-susjednih elemenata.

## Istostran trokut umjesto jednakostraničan

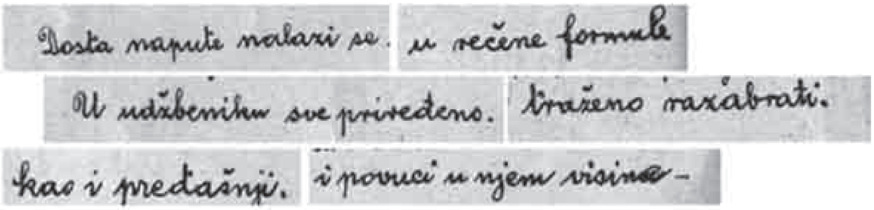
U današnjim udžbenicima imamo sljedeću definiciju: Jednakostraničan trokut je trokut koji ima sve tri stranice jednake duljine i sva tri kuta jednaka. To je preširoka definicija koja u sebi sadrži i teorem. Sličnih definicija imamo i za kvadrat ili paralelogram općenito. U bilježnici je pak i naziv kraći, *istostran* trokut.




*Slika 18.*

Za jednakokračan trokut koristi se termin *istokračan*, a pojam jednakoplošan je *istoplošan*.

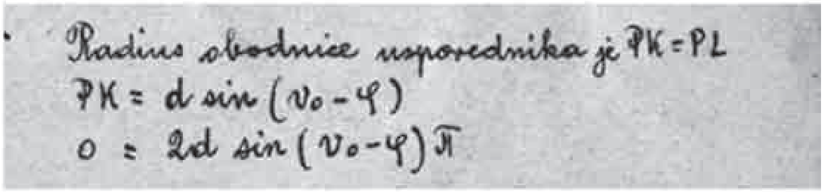
## *Naputa za radius obodnice usporednika*




*Slika 19.*

Osim naputka postoji i *naputa*, formule u knjizi mogu biti i *rečene* a ne samo *dane*, a kad je sve *priređeno*, onda se lako *razabire* pod uvjetom da su urađeni *predašnji* primjeri. U bilježnici je radijus napisan kao *radius*, a dijagonala kao *diagonala*.

Još neke riječi iz bilježnice u današnjim udžbenicima matematike ne nalazimo:


Radius obodnice usporednika je $PK = PL$
$PK = d \sin(v_0 - \varphi)$
$o = 2d \sin(v_0 - \varphi)\pi$

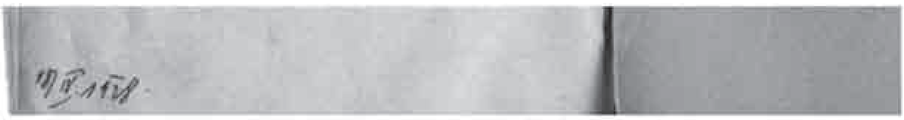
*Slika 20.*

*Obodnica* kruga je kružnica, ali i drugi likovi imaju svoje obodnice, stoga je obodnica širi pojam od kružnice. Obodnice najviše susrećemo u nacrtnoj geometriji kao konture nastale u projekciji. Ipak, radijus upućuje na to da se u ovom zadatku radi o kružnici. Obodnica *usporednika* bila bi kružnica opisana paralelogramu, no ne može se svakom paralelogramu opisati kružnica. Zašto onda nije napisan pravokutnik ili kvadrat?

## Zaključak

I eto, traganje je završeno. Traganje za porukama jednog davnog vremena, jednog mudrog čovjeka koji je ljubio znanje, koji je svome duhu dao slobodu, koji je bio sretan i miran. Sretan zbog sebe, poimanja svijeta oko sebe, poimanja znanosti bez kraja. Miran zbog svoje misije, miran zbog rada koji je preduvjet napretka, putovanja u novu spoznaju.

Satima smo bili na istim stazama, ja i moj nepoznati kolega, povezani istom sklonošću i interesima. Kao da smo razgovarali o zajedničkim temama. A opet, stoljetni je most između nas. Na jednoj strani on, davni, predani i neumorni ljubitelj geometrije prostora. Na drugoj strani ja i njegov rukopis. Taj rukopis ovim člankom umnažam i širim dalje poput lepeze koja prekriva zablude i pitanja, koja se širi i uljepšava svijet.



*Slika 21.*

### Literatura

1. Nepoznati autor, Bilježnica iz matematike 1928., crkva Gospe Fatimske, Stablina, Ploče