Matematičke konstante (1)

Tihana Strmečki*, Bojan Kovačić**

Ljudi koji vole brojeve obično se smatraju čudacima. Tijekom povijesti, pokazalo se da su upravo oni unaprijedili razvoj znanosti ustrajanjem u svojem koncentriranom i posvećenom interesu za razne matematičke probleme. U tim procesima rješavanja uočili su da se neki brojevi pojavljuju češće od drugih, zbog čega se uvođenje posebnih oznaka za njih pokazalo iznimno praktično i korisno. Ravnopravnost brojeva time je ozbiljno bila narušena, no čini se da je priroda tako htjela. Dodijeljena imena i oznake u nekim su slučajevima do današnjeg dana ostale iste, dok su se druge mijenjale kao poboljšanje ili u čast određenom znanstveniku/matematičaru. Te posebne brojeve, kojih ima jako puno, zovemo *matematičkim konstantama*.

Ovaj je članak namijenjen učenicima srednjih škola i gimnazija s dobrim matematičkim predznanjem. Upućujemo na daljnje istraživanje detalja svih pojmova koji se spominju na osnovnoj razini, kako bi se otkrilo puno više zanimljivosti od ovih koje će biti predstavljene ovdje. Članak smo podijelili na dva dijela, s obzirom na popularnost konstanti koje ćemo obraditi. U prvom dijelu proučit ćemo one koje su sastavni dio slavnog *Eulerovog identiteta*, koji je posljedica uvrštavanja vrijednosti $x = \pi$ u još slavniju Eulerovu[1] formulu, $e^{ix} = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$, čime se iskazalo jedno od najljepših i najelegantnijih otkrića u matematici.

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

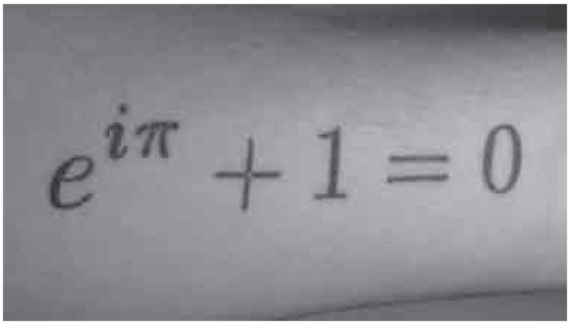
Slika 1. Eulerov identitet

„Da, matematika može biti „lijepa" ili „ružna". Jednako kao što je teško opisati zbog čega je neko muzičko djelo kvalitetno ili slika estetski oku ugodna, tako je teško reći što čini neku matematičku teoriju lijepom. Lijepa je teorija jednostavna, kompaktna i korisna, daje nam osjećaj potpunosti i začudni osjećaj simetrije. ... Ali za mnoge matematičare, Eulerov identitet pravi je predstavnik matematičke ljepote zato što ova iznimno jednostavna kompaktna formula povezuje najvažnije brojeve u matematici na potpuno neočekivan način." (C. Siefe: „Zero: The Biography of a Dangerous Idea", str 199.)

---

*Tihana Strmečki, Tehničko veleučilište u Zagrebu
**Bojan Kovačić, Tehničko veleučilište u Zagrebu
[1] Leonhard Euler (1707.–1783.), švicarski matematičar i fizičar

Slijede dva vizualna primjera oduševljenja Eulerovim identitetom.



Slika 2. Tetovaža Eulerovog identiteta na podlaktici diplomiranog matematičara

Slika 3. Vjenčani prsten para znanstvenika

Ludolfova konstanta π

$$\pi = 3.14159265358979$$

Arhimedova[2] ili Ludolfova[3] konstanta π najčešća je konstanta koja se javlja u matematici i prirodnim znanostima. Njezinih definicija ima mnogo, stoga izdvajamo dvije najčešće korištene.

Definicija 1

π je omjer opsega kruga o i njegovog promjera d (taj je omjer konstantan u Euklidskoj[4] geometriji).

$$\pi = \frac{o}{d}$$

Definicija 2

π je dvostruka vrijednost broja x za koji vrijedi $\cos(x) = 0$.

Ime konstante dolazi od grčkog slova Π (pi), prvog slova engleske riječi za opseg (*periphery*). Ime je navodno uveo William Jones[5] 1706. godine, a popularizirao ga je Leonhard Euler u svojim djelima „*Mechanica*" iz 1736. godine i „*Introductio in Analysin Infinitorum*" iz 1748. godine.

[2] Arhimed (3.st. pr. K.), grčki matematičar, fizičar i astrolog
[3] Ludolph van Ceulen (1540.–1610.), njemački matematičar
[4] Euklid (4.st. pr. K.), grčki matematičar
[5] William Jones (1675.–1749.), engleski matematičar

Broj π je **iracionalan** broj, što je 1761. godine dokazao J. H. Lambert[6]. To znači da se taj broj ne može prikazati u obliku razlomka čiji je brojnik cijeli broj, a nazivnik prirodan broj. No, taj se broj može prikazati kao **beskonačni niz verižnih razlomaka**, za što navodimo dva od mnogih primjera.

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}}} \qquad \pi = 3 + \cfrac{1^2}{6 + \cfrac{3^2}{6 + \cfrac{5^2}{6 + \cfrac{7^2}{6 + \cfrac{9^2}{6 + \cfrac{11^2}{6 + \ldots}}}}}}$$

Posljedica iracionalnosti jest da je **decimalni prikaz broja π beskonačan i neperiodičan**, te da se svi mogući nizovi znamenaka bilo koje duljine jednako često javljaju. Broj π^2 je također iracionalan broj, što je 1794. godine dokazao Legendre[7]. Trebalo je proći gotovo cijelo stoljeće sve dok 1882. godine F. von Lindemann[8] nije pokazao da je π **transcendentan** broj. To znači da ne postoji polinom p čiji su svi koeficijenti racionalni brojevi takav da je $p(x) \neq 0$ za barem jedan $x \in \mathbf{R}$ i da je $p(\pi) = 0$. Realni brojevi koji nisu transcendentni nazivaju se **algebarski brojevi**.

Prvi pokušaj izračuna broja π javlja se u Egiptu kod rješavanja *problema kvadrature kruga*[9]. Godine 1650. prije Krista, Ahmes[10] je izračunao da omjer opsega kruga i njegova promjera iznosi 3.16049. Njegova pogreška točnosti unutar 1% vrlo je mala za dostupne alate računa tog doba. Ta vrijednost, međutim, nije naišla na širu primjenu. Babilonci i Židovi u to su doba i dalje koristili $\pi = 3$. Arhimed se oko 280. godine prije Krista domislio drugačije metode za bolju aproksimaciju ove konstante. Upisivao je i opisivao poligone unutar i izvan jedinične kružnice, čime je dobio gornju i donju granicu za površinu kruga. Krenuvši od šesterokuta ($n = 6$), u sljedećem je koraku udvostručio broj stranica na 12, u sljedećem na 24, pa 48, sve do 96, čime je u svakom novom pokušaju dobivao sve točnije rezultate. Zaključio je sljedeće:

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7} \text{ ili } 3.1408 < \pi < 3.1429$$

Zanimljivo je i zadivljujuće da je taj izračun izrađen bez posebne oznake za broj π i bez korištenja decimalnog prikaza tog broja. Nedostatak metode je vrlo spora konvergencija prema točnom decimalnom prikazu. Za $n = 96$ imamo točnost na

[6]Johann Heinrich Lambert (1728.–1777.), švicarski matematičar, fizičar, filozof i astrolog
[7]Adrien-Marie Legendre (1752.–1833.), francuski matematičar
[8]Ferdinand von Lindemann (1852.–1939.), njemački matematičar
[9]Problem kvadrature kruga glasi: za zadani krug radijusa 1 treba konstruirati kvadrat iste površine koristeći isključivo šestar i ravnalo, u konačno mnogo koraka. Kasnije će se pokazati da zbog svojstva transcendentnosti rješenje ne postoji.
[10]Ahmes (17.st. pr. K.), egipatski matematičar

2 decimale, za n = 1000 na tri decimale, za n = 10 000 tek na šest decimala. S druge strane svijeta, kineski matematičari bavili su se istim problemom. Već u 5. st. Liu Hui[11] znao je da π iznosi 3,1416, koristeći poligone sa 192 stranice, a Tsu Ch'ung[12] uz $n = 24\,576$ da je $\pi = \frac{355}{113}$.

Tijekom sljedećih stoljeća, matematičari su usporedno s otkrivanjem novih grana matematike otkrivali i nove načine točnijeg izračuna konstante. Viète[13] je 1593. godine na sljedeći način došao do sljedećeg izraza za izračun broja π:

$$\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdot\ldots$$

U to doba je Ludolph van Ceulen izračunao π na 35 decimala. U 17. st. John Wallis[14], James Gregory[15], Isaac Newton[16] i G. W. Leibniz[17] koriste različite beskonačne sume za aproksimaciju konstante π. Posebno je poznata Gregory-Leibnizova formula

$$\operatorname{arc\,tg}(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots$$

Uvrštavanjem vrijednosti x = 1 dobije se vrijednost za $\frac{\pi}{4}$. No, potrebno je čak 500 000 članova izraza za točnost od 5 decimala! Napomenimo da se gore navedena Gregory-Leibnizova formula podudara s MacLaurinovim razvojem funkcije arc tg(x).

Prvih 100 znamenaka od π izračunao je John Machin[18] 1706. godine koristeći formulu

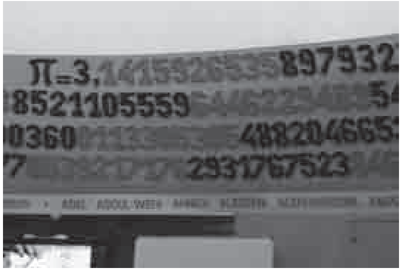
$$\frac{\pi}{4}=4\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{5}\right)-\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{239}\right)$$

Godine 1735. Euler je slučajno naišao na formulu pomoću koje se za 1 sat rada može izračunati prvih 20 znamenaka broja π iza decimalne točke:

$$\frac{\pi}{6}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots$$

[11]Liu Hui (3.st.), kineski matematičar
[12]Tsu Ch'ung (429.–500.), kineski matematičar i astrolog
[13]François Viète (1540.–1603.), francuski matematičar
[14]John Wallis (1616.–1703.), engleski matematičar
[15]James Gregory (1638.–1675.), škotski matematičar i astrolog
[16]Isaac Newton (1642.–1727.), engleski fizičar i matematičar
[17]Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646.–1716.), njemački matematičar i filozof
[18]John Machin (1686.–1751.), engleski matematičar

U 18. st. William Shanks[19] je u 15 godina posvećenog rada izračunao 707 znamenaka. Na njegovu sreću, tek se u 20. st. otkrilo da je napravio pogrešku u izračunu na 528. mjestu, što znači da su sve decimale koje slijede netočne. Njemu u čast, u Pariškom muzeju znanosti, u kružnoj prostoriji koja nosi naziv "Pi room", na stropu na kojem je ispisano prvih 707 znamenaka konstante posebno je istaknuto to mjesto.



Slika 4. „Pi room" u Pariškom muzeju znanosti

Otkrićem i razvojem računala broj točno izračunatih decimala vrtoglavo je porastao. Slijedi kratki popis broja znamenaka radi ilustracije brzine rasta.

Godina	Broj točnih znamenaka
1949.	2.037
1973.	1 000 000
1989.	1 000 000 000
2009.	2 700 000 000 000
2011.	10 000 000 000 000
2013.	12 000 000 000 000

Kao što smo već spomenuli, π se koristi u raznim područjima matematike i drugih prirodnih znanosti. U geometriji, sastavni je dio formula za opseg o i površinu P kruga, te za oplošje O i volumen V kugle (pri čemu je r polumjer kruga, odnosno kugle.)

$$o = 2r\pi \qquad P = r^2\pi \qquad O = 4r^2\pi \qquad V = \frac{4}{3}r^3\pi$$

Javlja se u integralnom računu pri izračunavanju površine gornje polovice jediničnog kruga.

$$\frac{\pi}{2} = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx$$

U trigonometriji je dio formule preračunavanja stupnjeva u radijane. Dvostruka vrijednost broja π je temeljni period funkcija $\sin(x)$ i $\cos(x)$, a sam π je temeljni period funkcija $\mathrm{tg}(x)$ i $\mathrm{ctg}(x)$.

[19] William Shanks (1812.–1882.), engleski matematičar

U kompleksnoj analizi, javlja se u ranije spomenutoj Eulerovoj formuli i u trigonometrijskom prikazu n-tog korijena kompleksnog broja $z = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$, kao dio argumenta. Taj se prikaz uobičajeno naziva de Moivreova formula za korjenovanje kompleksnog broja.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) + i \cdot \sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \right), n \in N, k \in \{0,1,...,n-1\}$$

U statistici je π dio izraza za funkciju gustoće vjerojatnosti normalne distribucije, dok je površina ispod Gaussove krivulje upravo jednaka $\sqrt{\pi}$.

$$\sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

U fizici se π javlja u formulama za period njihala, u Coulombovom[20] zakonu (elektromagnetizam), u Einsteinovoj[21] jednadžbi polja (kozmologija), u formulama iz područja mehanike, termodinamike…

U biologiji se visina slona h do njegovog ramena računa po formuli

$$h = 2 \cdot \pi \cdot \text{promjer stopala slona.}$$

Broj π je fascinirao mnoge matematičare i nematematičare kroz povijest. Taj važan broj ima i svoj dan, 14. ožujka (3/14 u engleskoj notaciji), koji neki ljudi smatraju praznikom i slave tako da jedu pite (engleski „pie", što se izgovara jednako kao i oznaka π), te si daruju nakit koji ima na sebi značajke te konstante. Da ne biste mislili da je to jedini takav dan, 6. lipnja (6/28) isti ljudi slave i Tau dan, iz razloga što je $\tau = 2\pi$. Tada se jede dvostruka količina pita, na engleskom „twice the pie" (2π).

Unutar decimalnog prikaza broja π mogu se naći mnoge zanimljivosti. Tako je niz 999999, koji počinje na 762. decimali, dobio naziv Feynmanova[22] točka. Broj 360 završava na 360. decimali, a niz 123456 javlja se tek nakon prvih milijun znamenki.

Svega 39 znamenaka dovoljno je da bi se odredile kozmološke procjene na nivou atoma, što nameće pitanje – čemu ostali trilijuni znamenaka? Odgovor je jednostavan – ljudska fascinacija dovoljna je motivacija za, s praktične strane, nepotrebne izračune. Isto tako ne postoji razumno objašnjenje postojanja discipline koja se bavi pamćenjem što većeg broja decimala od π – *philology*. Rekord od zastrašujuće zapanjujućih 67.890 znamenki od 2005. godine drži Lu Chao iz Kine, kojem je trebalo 24 sata i 4 minute da ih izrecitira. Ljudi koji se bave tom disciplinom koriste razne mnemotehnike i mentalne krajolike kako bi zapamtili veliku količinu podataka. Dajemo dva književna primjera koja koriste broj slova u pojedinoj riječi kao tehniku pamćenja znamenaka.

[20]Charles-Augustin de Coulomb (1736.–1806.), francuski fizičar
[21]Albert Einstein (1879.–1955.), njemački fizičar
[22]Richard Feynman (1918.–1988.), američki fizičar

„How I want a drink, alcoholic of course, after the heavy lectures involving quantum mechanics." (James Jeans)

„Neka i sad i vazda slavljeno na Zemlji jeste ime Onoga Arhimeda, helenskog mudraca!" (Ruđer Bošković)

I za kraj, ako vas zanima na kojoj se decimali nalazi datum vašeg rođenja, posjetite internetsku stranicu www.facade.com/legacy/amiinpi.

Eulerov broj *e* = 2.718281828459

$$x^2 - 1 = 0$$

Kao i broj π, Eulerov broj ili Napierova[23] konstanta e jedna je od najvažnijih matematičkih konstanti.

Dajemo nekoliko najčešće korištenih definicija.

Definicija 1 e je baza prirodnog logaritma $\ln(x) = \log_e(x)$

Definicija 2 $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ n \in N$

Definicija 3 e je jedinstveni realni broj takav da je nagib tangente povučene na graf funkcije $f(x) = e^x$ u točki (0, 1) jednak 1.

Slika 5. Obilježavanje dana matematičkih konstanti u Tehničkoj školi u Požegi

e je **iracionalan** broj, što je 1736. godine dokazao Euler time što je pronašao beskonačni verižni razlomak koji je jednak e.

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}}} \qquad e = 1 + \cfrac{1}{0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}}}$$

[23]John Napier (1550.–1617.), škotski matematičar, fizičar i astrolog

Broj *e* je **transcendentan** broj, što su dokazali J. Liouville 1844. i C. Hermite[24] 1873. godine.

Matematičar John Napier je 1618. godine izrađivao logaritamske tablice kada je naišao na vrijednost konstante *e* kojoj nije dao posebnu oznaku. Jacob Bernoulli[25] je 1682. godine proučavajući kamatni račun i limese također naišao na *e*. Tek je Leonhard Euler 1731., u dopisivanju s Goldbachom[26], uveo posebnu oznaku za *e* i izračunao 73 znamenke tog važnog broja. Stoljeće nakon njega, William Shanks izračunao je 137 znamenaka, a 1994. godine Nemirnoff i Bonnel prvih milijun znamenaka. Posljednji danas poznati podatak o ukupnom broju točno izračunatih znamenaka jest da su Kondo i Yee 2010. godine izračunali 500 bilijuna znamenaka.

e se koristi i javlja u mnogim granama matematike. U kamatnom računu dio je formule za neprekidno ukamaćivanje sa sve manjim intervalima, a u kompleksnoj analizi predstavlja dio Eulerove formule. U teoriji vjerojatnosti javlja se u funkciji gustoće vjerojatnosti normalne distribucije, u Bernoullijevim[27] pokusima i u problemima dearanžmana (Bernoulli i Montmart postavili su *problem šešira*[28]). Važan je primjer iz diferencijalnog računa u kojemu se pokazuje da je eksponencijalna funkcija Ce^x jedina realna funkcija „otporna" na deriviranje (i integriranje). Točnije, svaka funkcija oblika $y = C \cdot e^x$ gdje je $C \in$ R, predstavlja rješenje obične diferencijalne jednadžbe $y' = y$.

Kao i broj π, i broj *e* ima svoje obožavatelje. Disciplina *e-philology* bavi se pamćenjem znamenaka decimalnog prikaza broja *e*, pa dajemo primjere rečenica koje služe upravo tome.

„By omnibus I traveled to Brooklyn."

„To disrupt a playroom is commonly a practice of children."

Broj *e* poslužio je kao dio jako mudrog oglasa za posao u poznatoj kompaniji *Google*. Naime, *Google* je poznat po svojoj kreativnosti i otvorenosti prema novim idejama, pa su tako odlučili na neobičan način oglasiti nova radna mjesta. Dali su izraditi velike billboard reklamne plakate, sa sljedećom porukom:

(first 10-digit prime found in consecutive digits of e).com

(prvi deseteroznamenkasti prosti broj koji se nalazi u decimalnom prikazu broja e).com.

[24]Charles Hermite (1822.–1901.), francuski matematičar
[25]Jacob Bernoulli (1655.–1705.), švicarski matematičar
[26]Christian Goldbach (1690.–1764.), njemački matematičar
[27]Ispituje se vjerojatnost uspjeha niza pokusa bacanja novčića. Moguća su dva ishoda: „pismo" i „glava".
[28]„Problem šešira" glasi: Na zabavu dolazi n gostiju, od kojih svaki na ulazu ostavlja svoj šešir butleru koji ih ne poznaje. Butler na slučajan način pospremi svaki šešir u kutiju koja na poklopcu nosi ime jednog od gostiju zabave. Izračunati vjerojatnost da nijedan šešir nije u kutiji s imenom svog vlasnika.

Oblijepili su Ameriku tim plakatima i čekali da se jave ljudi koji su ih primijetili. Zamislite da se vozite autom po nekoj američkoj autocesti i slučajno uočite ovu reklamu. Nije česta reakcija poput „Baš me zanima što ima na toj internetskoj stranici, a i znam kako saznati taj deseteroznamenkasti broj. Pokušat ću čim dođem kući!". Opet se vraćamo na „čudake" s početka članka, koji su zasigurno pojurili kući riješiti zadatak. Nema podatka koliko je ljudi uspjelo otvoriti dotičnu internetsku stranicu, ali zna se da se nakon otvaranja te internetske stranice pojavio još jedan matematičko-programerski problem čije vas je rješavanje automatski zapošljavalo u određeni odjel *Google*-a. Jako nestresan način za dobivanje posla u jako poznatoj kompaniji! Za one koje zanima, traženi broj je 7 427 466 391, a počinje na 99. znamenki decimalnoga prikaza broja *e*.

To nije jedini primjer u kojemu je *Google* pokazao svoje oduševljenje ovim brojem. Kada su odlučili jedan dio svojih dionica ponuditi javnom tržištu, ukupna vrijednost tih dionica iznosila je $2.718.281.828! Ako imate želju raditi u *Google*-u, svakako doznajte sve što se može o Eulerovoj konstanti i uvijek gledajte billboarde☺.

Konstanta 1

Broj 1 ima dvostruko značenje. On je istovremeno i broj i znamenka.

Definicija 1 Broj 1 je cijeli broj između 0 i 2 koji predstavlja mjeru u brojenju i mjerenju.

Definicija 2 Broj 1 je prvi neparan prirodan broj.

Oznaka potječe iz Indije i prošla je niz promjena dok nije dostigla današnji izgled.

Neka od osnovnih svojstava broja 1 su:

- 1 je **racionalan** broj;
- 1 nije **niti prost niti složen**;
- 1 je **algebarski** broj (nultočka je polinoma $x^2 - 1 = 0$);
- Znamenka 1, zajedno sa znamenkom 0, tvori skup znamenaka binarnoga sustava;
- 1 je **Fibonaccijev**[29] broj;
- 1 **je neutralni element za standardno množenje** definirano na skupu realnih, odnosno kompleksnih brojeva,
- 1 je vjerojatnost sigurnog događaja.

U Egiptu je broj 1 bio toliko važan da su se svi razlomci prikazivali kao suma razlomaka s brojnikom 1.

[29]Fibonacci (12. st.), talijanski matematičar

Konstanta 0

Kao i broj 1, i broj 0 ima dvostruko značenje. On je istovremeno i broj i znamenka.

Definicija 1. Broj 0 je cijeli broj koji neposredno prethodi broju 1.

Definicija 2. 0 je prvi nenegativni paran broj.

Ime broja obično je povezano s riječi „zero" koja potječe od arapskih riječi „*safra*" (prazno je) i „*sifr*" (prazno), te talijanske riječi „*zefiro*".

Već se u 18. st. prije Krista u Egiptu koristila baza 10 i postojala je oznaka za 0 koja je označavala mjesto u prikazu brojeva, ali nije imala niti vlastitu vrijednost niti poziciju na brojevnom pravcu. Današnja oznaka uvedena je u Indiji u 9. st., a u Europu ju je „prenio" Fibonacci tek 1202. godine. Trebalo je neko vrijeme da se prihvati novi, bolji sustav računanja i mjerenja koji koristi 0.

Neka od osnovnih svojstava broja 0 su:

- 0 je **racionalan** broj;
- 0 nije **niti prost niti složen**;
- 0 je **algebarski** broj (nultočka je polinoma $x^2 = 0$);
- Znamenka 0 uz znamenku 1 tvori skup znamenaka binarnoga sustava,
- 0 je **neutralni element za standardno zbrajanje** u skupu realnih, odnosno kompleksnih brojeva;
- 0 je kardinalni broj praznog skupa;
- 0 je vjerojatnost nemogućeg događaja.

Imaginarna jedinica *i*

S imaginarnom[30] jedinicom *i* obično se susrećemo na samom početku 2. razreda srednje škole. Tada se ta matematička konstanta uvodi radi potrebe proširenja skupa realnih brojeva **R**, s ciljem da svaki polinom stupnja 2 jedne realne varijable ima točno dvije (ne nužno međusobno različite) nultočke. Ekvivalentno, želi se da svaka kvadratna jednadžba ima točno dva (ne nužno međusobno različita) rješenja.

Iako je ovakav pristup metodički i pedagoški opravdan, strogo matematički on nije konzistentan iz više razloga. Izdvojimo najjednostavniji. U 1. razredu srednjih škola polinom se svrstava u klasu realnih funkcija jedne realne varijable. To znači da vrijednost polinoma i vrijednost njegove varijable trebaju biti elementi skupa realnih brojeva. Uzmemo li $p(x) = x^2$, onda ne postoji nijedan realan broj x_0 takav da je $p(x_0) = -1$. I tu priča o uvođenju imaginarne jedinice u kontekstu polinoma treba završiti. Proširenje domene polinoma na neki drugi skup (koji je nadskup skupa **R**) zahtijeva i redefiniranje pojma polinoma, što se iz metodičkih i pedagoških razloga obično izostavlja.

[30]Lat. imaginarius – zamišljen

Postoje i općenitija „obrazloženja” prema kojima se imaginarna jedinica uvodi zato da svaki polinom stupnja n ima točno n (ne nužno različitih) nultočaka, i u tom se kontekstu spominje osnovni poučak algebre. Ni taj pristup nije dobar. Naime, osnovni poučak algebre tvrdi da svaki polinom stupnja $n \geq 1$ ima barem jednu nultočku u skupu **C**. Pritom je **C** skup svih kompleksnih brojeva, odnosno skup svih brojeva oblika $a + b \cdot i$, gdje su $a, b \in \mathbf{R}$. Dakle, na neki je način osnovni poučak algebre *posljedica* izgradnje skupa **C**, a ne *uzrok* za uvođenje toga skupa.

Matematički potpuno konzistentan način uvođenja konstante i i skupa **C** bitno je složeniji, a obično se spominje na 1. godini tehničkih studija na našim fakultetima u sklopu kolegija *Matematika 1*. Naznačimo ukratko osnovnu ideju te konstrukcije. Promatra se skup $\mathbf{R}^2 := \{(x, y) : x, y \in \mathbf{R}\}$ čiji je standardan „grafički prikaz” euklidska ravnina s uvedenim pravokutnim koordinatnim sustavom. Na skupu $\mathbf{R}^2$ definiraju se binarne operacije $\boldsymbol{+}$ i $\bullet$ s:

$$a \boldsymbol{+} b := (a_1 + b_1, a_2 + b_2),$$
$$a \bullet b := (a_1 \cdot b_1 - a_2 \cdot b_2, a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1),$$

za $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2) \in \mathbf{R}^2$. Pritom su + i $\cdot$ zbrajanje, odnosno množenje realnih brojeva. Tada se algebarska struktura $(\mathbf{R}^2, \boldsymbol{+}, \bullet)$ naziva *skup kompleksnih brojeva* i označava slovom **C**. Nije teško provjeriti da u takvoj strukturi vrijedi jednakost

$$(0, 1) \bullet (0, 1) = (-1, 0),$$

pa, uz oznaku $i := (0, 1)$ i bijektivno poistovjećivanje uređenoga para $(-1, 0)$ s realnim brojem -1, slijedi $i \bullet i = -1$. U tom kontekstu konstantu i možemo smatrati kao svojevrstan „drugi korijen” iz broja -1. Detalje ovdje izostavljamo, a mogu se naći npr. u [1].

Povijesno gledano, stvarni *motiv* za uvođenje konstante i, a samim time i skupa **C**, bilo je rješavanje *kubne*, a ne kvadratne jednadžbe. Konkretno, promatrale su se kubne jednadžbe oblika $x^3 + p \cdot x + q = 0$, gdje su $p, q \in \mathbf{Q} \backslash \{0\}$. Pritom su se najprije znala odrediti racionalna rješenja tih jednadžbi (vidjeti npr. [2]).

Formulu za određivanje realnih rješenja promatranih jednadžbi prvi je objavio talijanski matematičar Cardano[31], i ona glasi:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}\,.$$

Do otkrića kompleksnih brojeva se, radi izračunavanja drugoga korijena, prirodno pretpostavljalo da vrijedi nejednakost $\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} \geq 0$. Cardanova je formula, zapravo, bila svojevrstan „poticaj” za uvođenje imaginarne jedinice, odnosno kompleksnih brojeva, što ćemo ukratko opisati u nastavku.

Podsjetimo na sljedeći rezultat koji je posljedica Bolzano-Weierstrassova poučka o funkcijama neprekidnima na segmentu.

[31]Girolamo Cardano (1501. – 1576.), talijanski liječnik, matematičar, fizičar, filozof i astrolog

Teorem 1. Ako za polinom p na segmentu $[a, b]$ vrijedi: $p(a) \cdot p(b) < 0$, onda p ima barem jednu nultočku u intervalu $\langle a, b \rangle$.

Promotrimo polinom $p_1(x) = x^3 - 4 \cdot x + 1$. Lako se provjeri da vrijede nejednakosti $p(-3) < 0$, $p(-2) > 0$, $p(0) > 0$, $p(1) < 0$, $p(2) > 0$. Stoga polinom p_1 ima tri *realne* nultočke i one pripadaju intervalima $\langle -3, -2 \rangle$, $\langle 0, 1 \rangle$ i $\langle 1, 2 \rangle$. Pokazuje se da nijedna od tih nultočaka nije racionalan broj, pa pokušajmo primijeniti Cardanovu formulu. Uvrstimo $q = 1$ i $p = -4$, pa dobivamo:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{(-4)^3}{27} + \frac{1^2}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{(-4)^3}{27} + \frac{1^2}{4}}} = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{229}{108}}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2} - \sqrt{-\frac{229}{108}}}\ .$$

Budući da drugi korijen iz strogo negativnoga realnoga broja nije definiran, zaključujemo da polinom p_1 nema realnih nultočaka. Taj je zaključak potpuno suprotan ranijem zaključku da p_1 ima tri realne nultočke. Stoga se pojavila ideja o formalnom definiranju $i := \sqrt{-1}$, odnosno proširenju skupa $\mathbf{R}$ na skup brojeva oblika $a + b \cdot i$, gdje su $a, b \in \mathbf{R}$. Tu je ideju prvi formalizirao talijanski matematičar Bombelli[32] 1572. godine, čime je otvorio put izučavanju kompleksnih brojeva, njihovih svojstava i primjena. Za detalje vidjeti [3].

Danas se imaginarna jedinica, osim u matematici, ponajviše koristi u elektrotehnici, fizici i drugim tehničkim znanostima. U tim se znanostima imaginarna jedinica obično označava s j radi naglašavanja razlike u odnosu na označavanje jakosti struje (koja se u tim strukama označava s i). Npr. u elektrotehnici se diferencijalne jednadžbe (kojima se opisuje izmjenična struja) nastoje „zamijeniti" algebarskima (kojima se opisuje istosmjerna struja), pa se sinusni valni oblici zamjenjuju rotirajućim radijvektorima koje je lako opisati pomoću kompleksnih brojeva. Detalje ovdje izostavljamo, a zainteresiranoga čitatelja upućujemo na literaturu [4].

Literatura:

1. S. Kurepa: *Matematička analiza 1 – diferenciranje i integriranje*, Školska knjiga, Zagreb, 1999.
2. B. Pavković, D. Veljan: *Elementarna matematika 1*, Školska knjiga, Zagreb, 2004.
3. I. Gusić: *Zašto su uvedeni kompleksni brojevi*, Math.e – hrvatski matematički elektronski časopis, br. 1, 2004.
4. B. Kuzmanović: *Osnove elektrotehnike 1*, Element, Zagreb, 2005.
5. Steven R. Finch: *Mathematical constants,* Cambridge University Press, 2003.
6. Charles Siefe: *Zero: A Biography of a Dangerous Idea,* Penguin Books, USA, 2000.
7. David Blatner: *The Joy of Pi,* Walker/Bloomsbury, USA, 1997.
8. BBC dokumentarni film *The Story of One,* United Kingdom, 2005.
9. en.wikipedia.org

[32] Rafael Bombelli (1526. – 1572.), talijanski matematičar