

Nastavak iz Poučka broj 57.

Periodičnost u svijetu oko nas¹

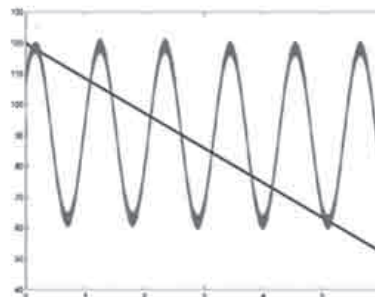
Matematika u biologiji

JOSIP LUKAČ²

U trećem razredu srednje škole proučavaju se trigonometrijske funkcije, koje su specifične po tome što se periodički ponavljaju. U ovom ćemo članku pokazati da matematičko svojstvo periodičnosti nalazi primjenu u velikom broju pojava iz našega života i svijeta koji nas okružuje. Nastavljamo putovanje kroz svijet prirodnih znanosti – fizike, biologije i geografije – dokazujući da je matematika temelj na kojem ostale prirodne znanosti objašnjavaju i tumače pojave kojima se bave.

Zdravlje

Jeste li se ikada pitali kako liječnik pacijentu mjeri tlak? Sigurno ste vidjeli da njegov tlakomjer nije niti sličan tlakomjerima koje imamo kod kuće. Vidjeli ste stetoskop kojim liječnik sluša rad srca. Što se zapravo događa u krvnim žilama prilikom mjerenja tlaka? Kada liječnik pumpa zrak u rukavicu za mjerenje tlaka koja je pacijentu stavljena iznad lakta, on želi na trenutak postići da tlak u rukavici bude veći nego tlak u krvnoj žili. Tada, to znamo iz fizike, zato što je vanjski tlak veći, krv u žili na trenutak prestane teći. Nakon toga, liječnik postepeno ispušta zrak iz rukavice. Kada na stetoskopu čuje tok krvi, očita sa skale tzv. gornji ili sistolički tlak. Liječnik i dalje ispušta zrak iz rukavice. Onog trenutka kada tlak u rukavici (vanjski tlak) bude manji od tlaka u krvnoj žili, liječnik sa skale očita tzv. donji ili dijastolički tlak. Također prilikom mjerenja tlaka, na stetoskopu liječnik čuje dva jaka udarca srca. Prvi udarac je sistolički tlak, a drugi udarac je dijastolički tlak. Sinusoida na donjem grafu je tlak krvi, a pravac je vanjski tlak (tlak koji nastaje pumpanjem zraka u rukavicu za mjerenje tlaka). Presjek pravca i gornje amplitude je sistolički tlak, a presjek pravca i donje amplitude je dijastolički tlak.



¹Rad Periodičnost u svijetu oko nas napravljen je u okviru kolegija Metodika nastave matematike 3 pod vodstvom prof. dr. sc. Aleksandre Čižmešije

²Josip Lukač, student pete godine matematike i fizike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu

Puls svake osobe je broj udaraca srca u jednoj minuti. Svaki krug na grafu predstavlja jedan otkucaj srca. Koliki je puls? Horizontalna jedinica na grafu je 0.2 s, a vertikalna 0.5 mV.

Elektrokardiogram mjeri električnu aktivnost srca osobe u milivoltima u vremenu.



- Koliki je period gornje EKG slike.
- Kolika je amplituda?

Rješenje: Puls je broj udaraca srca u minuti. Prvo pogledamo na slici udaljenost između dvije amplitude. Prebrojimo kvadratiće i vidimo da ih je 5. Jedan kvadratić nam predstavlja vremensku jedinicu od 0.2 s.

Dakle, horizontalna udaljenost između dvije amplitude je period i on iznosi $5 \cdot 0.2 = 1$ s. Budući da 1 minuta ima 60 s, a vrijeme između dva udarca srca je 1 s, pa srce ima 60 otkucaja u minuti.

Jedinica vertikalne osi je 0.5 mV. Brojanjem kvadratića vidimo da ih imamo 6 za amplitudu. Dakle, amplituda je $6 \cdot 0.2 = 3$ mV.

Skakavci

Populacija skakavaca nakon t mjeseci gdje je $0 \leq t \leq 12$ procijenjena je funkcijom $P(t) = 7500 + 3000 \sin(9t)$.

- Nađite početnu populaciju i populaciju nakon 5 mjeseci.
- Kolika je najveća populacija na danom intervalu i kada je ona javlja?
- Kada je populacija 9000, a kada 6000?
- Tijekom kojih vremenskih intervala populacija prelazi 10 000?

Rješenja:

- Početnu populaciju nalazimo tako da izračunamo vrijednost zadane funkcije kada je argument, odnosno vrijeme, nula: $P(0) = 7500 + 3000 \sin(0) = 7500$.

Populaciju nakon 5 mjeseci računamo uvrštavanjem $t = 5$.

Dobivamo $P(5) = 7500 + 3000 \sin(45) \approx 10053$.

- Najveća populacija se javlja kada je $\sin(9t) = 1$, tj. kada je $9t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, odnosno za $t = \frac{\pi}{18} + \frac{2}{9}k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq t \leq 12$.

Koristeći program MS Excel, dobivaju se podaci upisani u donju tablicu. Stupac s danima dobiven je množenjem podataka iz stupca t brojem 30 (broj dana u mjesecu).

k	t	dani
1	0.872664626	26
2	1.570796327	47
3	2.268928028	68
4	2.967059728	89
5	3.665191429	110
6	4.36332313	131
7	5.061454831	152
8	5.759586532	173
9	6.457718232	194
10	7.155849933	215
11	7.853981634	236
12	8.552113335	257
13	9.250245036	278
14	9.948376736	298
15	10.64650844	319
16	11.34464014	340

$$c) P(t) = 9000 \Rightarrow 9000 = 7500 + 3000 \sin(9t) \Leftrightarrow \sin(9t) = \frac{1}{2}$$

$$9t = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ili } 9t = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$t = \frac{\pi}{54} + \frac{2}{9}k\pi \text{ ili } t = \frac{5\pi}{54} + \frac{2}{9}k\pi, k \in \mathbb{Z}, 0 \leq t \leq 12$$

Koristeći program MS Excel, dobiveni su podaci navedeni u tablicama. (Stupac s danima dobiven je množenjem podataka iz stupca t brojem 30 (broj dana u mjesecu).)

$$\text{Za } t = \frac{\pi}{54} + \frac{2}{9}k\pi, k \in \mathbb{Z}:$$

k	t	dani
1	0.694797	21
2	1.331417	40
3	1.968037	59
4	2.604657	78
5	3.241277	97

$$\text{Za } t = \frac{5\pi}{54} + \frac{2}{9}k\pi, k \in \mathbb{Z}:$$

k	t	dani
1	0.98902	30
2	1.687152	51
3	2.385283	72
4	3.083415	93
5	3.781547	113

6	3.877896	116
7	4.514516	135
8	5.151136	155
9	5.787756	174
10	6.424375	193
11	7.060995	212
12	7.697615	231
13	8.334235	250
14	8.970854	269
15	9.607474	288
16	10.24409	307
17	10.88071	326
18	11.51733	346

6	4.479678	134
7	5.17781	155
8	5.875942	176
9	6.574074	197
10	7.272205	218
11	7.970337	239
12	8.668469	260
13	9.3666	281
14	10.06473	302
15	10.76286	323
16	11.461	344

$$P(t) = 6000 \Rightarrow 6000 = 7500 + 3000 \sin(9t) \Leftrightarrow \sin(9t) = -\frac{1}{2}$$

$$9t = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ili } 9t = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$t = -\frac{\pi}{54} + \frac{2}{9}k\pi \text{ ili } t = -\frac{5\pi}{54} + \frac{2}{9}k\pi, k \in \mathbb{Z}, 0 \leq t \leq 12$$

Koristeći program MS Excel, dobivaju se ovi podaci.

$$\text{Za } t = -\frac{\pi}{54} + \frac{2}{9}k\pi, k \in \mathbb{Z}:$$

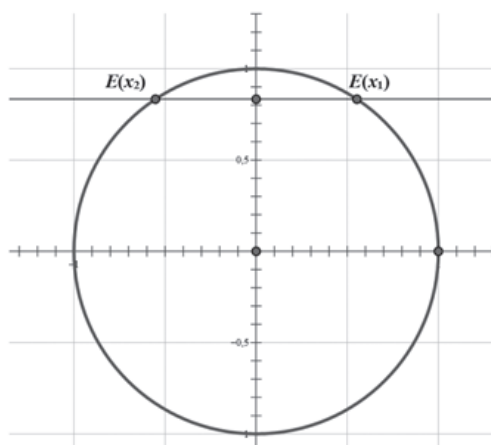
k	t	dani
1	0.639954	19
2	1.338086	40
3	2.036217	61
4	2.734349	82
5	3.432481	103
6	4.130613	124
7	4.828744	145
8	5.526876	166
9	6.225008	187
10	6.923139	208
11	7.621271	229

$$\text{Za } t = -\frac{5\pi}{54} + \frac{2}{9}k\pi, k \in \mathbb{Z}:$$

k	t	dani
1	0.407243	12
2	1.105375	33
3	1.803507	54
4	2.501639	75
5	3.19977	96
6	3.897902	117
7	4.596034	138
8	5.294165	159
9	5.992297	180
10	6.690429	201
11	7.388561	222

12	8.319403	250	12	8.086692	243
13	9.017534	271	13	8.784824	264
14	9.715666	291	14	9.482956	284
15	10.4138	312	15	10.18109	305
16	11.11193	333	16	10.87922	326
17	11.81006	354	17	11.57735	347

$$d) P(t) = 10\,000 \Rightarrow \sin(9t) = \frac{5}{6}$$



$$x_1 = \sin^{-1}\left(\frac{5}{6}\right) \approx 0.98511078, \quad x_2 = \pi - x_1 \approx 2.15648187$$

$$9t \in \bigcup \langle 0.98511078 + 2k\pi, 2.15648187 + 2k\pi \rangle, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$t \in \bigcup \left\langle 0.1094568 + \frac{2k\pi}{9}, 0.2396091 + \frac{2k\pi}{9} \right\rangle, \quad k \in \mathbb{Z}$$

pa su traženi intervali oblika $\langle 0.1095 + 0.6981k, 0.2396 + 0.6981k \rangle$ u mjesecima, odnosno (nakon množenja s $\frac{365}{12}$) u danima $\langle 3.3293 + 21.2348k, 7.2881 + 21.2348k \rangle$.

Populacija veća od 10 000 bit će od 3. do 7. dana, od 25. do 29. dana, od 46. do 50. dana, od 67. do 71. dana, od 88. do 92. dana, od 110. do 113. dana, od 131. do 135. dana, od 152. do 156. dana, od 173. do 177. dana, od 194. do 198. dana, od 216. do 220. dana, od 237. do 241. dana, od 258. do 262. dana, od 279. do 283. dana, od 301. do 305. dana, od 322. do 326. dana, od 343. do 347. dana, od 364. do 368. dana.

Vodeni tvrdokrilci

Ekolog proučavajući vrstu vodenih tvrdokrilaca procjenjuje populaciju kolonije tijekom perioda od 8 tjedana. Ako je t broj tjedana nakon početne procjene, tada se populacija u tisućama može modelirati funkcijom $P(t) = 5 + 2\sin(6t)$, $0 \leq t \leq 8$.

- Kolika je početna populacija?
- Koliko iznose najmanja i najveća populacija?
- Tijekom kojeg je vremenskog intervala populacija prelazila 6000?

Rješenja:

- $P(0) = 5 + 2\sin 0 = 5$. Budući da zadana funkcija daje populaciju u tisućama, onda je početna populacija 5000.
- Amplituda funkcije je 2000, pa je najveća populacija $2000 + 5000 = 7000$, a najmanja populacija je $5000 - 2000 = 3000$.
- $5 + 2\sin(6t) > 6 \Leftrightarrow \sin(6t) > \frac{1}{2}$

$$x_1 = \frac{\pi}{6}, \quad x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

$$6t \in \bigcup \left\langle \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\rangle, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$t \in \bigcup \left\langle \frac{\pi}{36} + \frac{1}{3}k\pi, \frac{5\pi}{36} + \frac{1}{3}k\pi \right\rangle, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Koristeći program MS Excel, dobivaju se sljedeći podaci:

k	t - (lijevi rub intervala)	od dana	t - (desni rub intervala)	do dana
1	1.134464014	8	1.483529864	10
2	2.181661565	15	2.530727415	18
3	3.228859116	23	3.577924967	25
4	4.276056667	30	4.625122518	32
5	5.323254219	37	5.672320069	40
6	6.37045177	45	6.71951762	47
7	7.417649321	52	7.766715171	54

Ekologija

Živimo u vremenu velikih zagađivanja okoliša napose u velikim gradovima. Tisuće i tisuće automobila prolazi ulicama. Kemijske tvornice ispuštaju štetne plinove u atmosferu. Kako ćemo izračunati količinu zagađenja u zraku? Odgovor nam ponovno daje matematika. U industrijskom gradu, količina zagađenja u zraku postaje veća tijekom radnog tjedna kada su tvornice otvorene, a zagađenje je manje tijekom vikenda. Broj miligrama zagađenja po kubnom metru zraka dan je funkcijom $P(t) = 40 - 12\sin(51.4t)$, gdje je t broj dana nakon nedjeljne ponoći.

- Kolika je minimalna razina zagađenja?
- U kojem vremenu tijekom tjedna se javlja minimalno zagađenje?

Rješenja:

- Minimalno zagađenje se javlja kada je $\sin(51.4t) = 1$ i iznosi $40 - 12 = 28 \text{ mg/m}^3$.
- To minimalno zagađenje se javlja kada je:

$$\begin{aligned} 40 - 12\sin(51.4t) &= 28 \\ -12\sin(51.4t) &= 28 - 40 \\ \sin(51.4t) = 1 &\Rightarrow 51.4t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{102.8} + \frac{1}{25.7}k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Koristeći program MS Excel dobivaju se sljedeći podaci. Treći stupac dobije se množenjem podataka iz stupca t brojem 24 (broj sati u jednom danu).

k	t	Sati od nedjelje u ponoć	Sati po danima	Dani u tjednu
1	0.152801	4	4	Ponedjeljak
2	0.275042	7	7	
3	0.397283	10	10	
4	0.519524	12	12	
5	0.641765	15	15	
6	0.764006	18	18	
7	0.886247	21	21	
8	1.008488	24	0	Utorak
9	1.130729	27	3	
10	1.25297	30	6	
11	1.375211	33	9	
12	1.497452	36	12	
13	1.619693	39	15	
14	1.741934	42	18	
15	1.864175	45	21	
16	1.986416	48	0	Srijeda
17	2.108657	51	3	
18	2.230898	54	6	
19	2.353138	56	8	
20	2.475379	59	11	

21	2.59762	62	14	
22	2.719861	65	17	
23	2.842102	68	20	
24	2.964343	71	23	
25	3.086584	74	2	Četvrtak
26	3.208825	77	5	
27	3.331066	80	8	
28	3.453307	83	11	
29	3.575548	86	14	
30	3.697789	89	17	
31	3.82003	92	20	
32	3.942271	95	23	
33	4.064512	98	2	Petak
34	4.186753	100	4	
35	4.308994	103	7	
36	4.431235	106	10	
37	4.553476	109	13	
38	4.675717	112	16	
39	4.797958	115	19	
40	4.920199	118	22	
41	5.04244	121	1	Subota
42	5.164681	124	4	
43	5.286921	127	7	
44	5.409162	130	10	
45	5.531403	133	13	
46	5.653644	136	16	
47	5.775885	139	19	
48	5.898126	142	22	
49	6.020367	144	0	Nedjelja
50	6.142608	147	3	
51	6.264849	150	6	
52	6.38709	153	9	
53	6.509331	156	12	
54	6.631572	159	15	
55	6.753813	162	18	
56	6.876054	165	21	
57	6.998295	168	24	

Literatura:

1. Real life dana examples,
<http://www.mybookezzz.com/periodic-functions-real-life-data-examples/> (9.10.2013)
2. Blood flow and blood pressure,
<http://math.arizona.edu/~maw1999/blood/trig.html> (9.10.2013)
3. H. Jounge, R. Freedman: *University physics with modern physics*. 12th edition Pearson International Edition, 2007.