Pregledni rad
UDK: 336.763.3:519.87

**Prof. dr. sc. Boško Šego**[1]
**Tihana Škrinjarić, univ. spec. oec.**[2]

# SVOJSTVA KONVEKSNOSTI OBVEZNICA

# BOND CONVEXITY PROPERTIES

**SAŽETAK**: Analiza obveznica uobičajeno uključuje analizu modificiranog Macaulayevog trajanja. Ono se interpretira kao linearna aproksimacija promjene cijene kao reakcije na promjenu kamatnog faktora. Kada su promjene kamatnog faktora veće, preporuča se razmatrati Taylorov razvoj cijene obične kuponske obveznice kao funkcije kamatnog faktora do zaključno drugog reda kao točnije aproksimacije reakcije cijene na promjenu kamatnog faktora, pri čemu se kao prva i druga derivacija funkcije cijene koriste Macaulayevo trajanje i konveksnost obveznice. Cilj rada je razmotriti neka svojstva konveksnosti obveznice s obzirom da ona utječe na reakciju cijene obveznice na promjene kamatnog faktora.

**KLJUČNE RIJEČI:** obveznice, konveksnost obveznice, Macaulayevo trajanje, Taylorov red polinoma.

**ABSTRACT:** Bond analysis usually includes the analysis of modified Macaulay's duration. It is defined as a linear approximation of reaction of bond price to the changes in interest rate (factor). When these changes are bigger, it is advisable to use a second order Taylor series approximation where the first and second derivations are Macaulay's duration and bond convexity. The purpose of the paper is to observe the properties of bond convexity because it affects the bond price reaction to changes in interest rate factor.

**KEY WORDS:** bonds, bond convexity, Macaulay's duration, Taylor series.

## 1. UVOD

Investitorima je prilikom razmatranja o ulaganju u pojedine vrijednosne papire važno imati što više dostupnih informacija o njima, pa se pri analizi obveznica, kao jednog od osnovnih dugoročnih vrijednosnih papira, uobičajeno između ostaloga analiziraju međuovisnost cijene i prinosa obveznica. Porast zahtijevanog prinosa će rezultirati smanjenjem

[1] Prof. dr. sc. Boško Šego, redoviti profesor u trajnom zvanju na Katedri za matematiku Ekonomskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu, Trg J. F. Kennedyja 6.
[2] Tihana Škrinjarić, univ. spec. oec., asistentica na Katedri za matematiku Ekonomskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu, Trg J. F. Kennedyja 6.

cijene razmatrane obveznice, i obrnuto. Dakle, postoji obrnuto razmjeran odnos između spomenutih pojmova. Najpoznatiji koncept koji se koristi pri razmatranju obveznica jest Macaulayevo (definirano u radu *The Movements of Interest Rates Bond Yields and Stocks Prices in the United States since 1856* iz 1938.) i modificirano Macaulayevo trajanje, koje se računa kao elastičnost cijene obveznice s obzirom na promjenu kamatnog faktora (ili kamatne stope). Međutim, tako definirana mjera ima nedostatak jer jednako vrednuje povećanja i smanjenja kamatnog faktora i njegov utjecaj na promjenu same cijene obveznice, što je korisno u slučaju vrlo malih promjena kamatnog faktora, a to u stvarnome svijetu često nije realna pretpostavka, posebice u turbulentnim vremenima.

Bilo je potrebno više od 30 godina od izvođenja pojma trajanja dok investitori nisu prepoznali njegovu važnost. Razlozi su jednostavni – kamatne stope dugi niz godina bile su stabilne i male, sve do 70-ih godina prošloga stoljeća kada su se zbog značajne inflacije i kamatne stope počele značajno mijenjati pa investitori počinju prepoznavati trajanje kao važan instrument koji treba analizirati prije donošenja odluka o ulaganju. Posljednjih nekoliko godina financijska tržišta ponovno se nalaze u sličnoj situaciji. Stoga se preporuča razmatrati Taylorov razvoj cijene obične obveznice u kojega uključujemo trajanje i konveksnost. Kako je konveksnost obveznice pojam koji se rijetko spominje u literaturi, cilj rada je prikazati svojstva konveksnosti, s obzirom da ona utječe na promjene cijene obveznica s obzirom na promjene kamatne stope.

Kako se u posljednjih nekoliko desetljeća, a posebice unazad par godina drastično razvijaju tržišta vrijednosnica, a s njima i same vrste vrijednosnica kojima se trguje na njima, ovaj rad želi doprinijeti postojećoj literaturi novim pogledima na već postojeće koncepte. Pokušat će se razjasniti moguće nedoumice vezane za svojstva konveksnosti obveznica. Stoga je rad strukturiran na sljedeći način. Drugo poglavlje bavi se pojmom konveksnosti obveznica i izvodom svojstava konveksnosti obveznica kao i ulogom konveksnosti u Taylorovom razvoju cijene obveznice. Treće poglavlje zaključuje rad.

## 2. TRAJANJE I KONVEKSNOST OBVEZNICE

### 2.1. Trajanje obveznice

Iskusnim sudionicima tržišta vrijednosnica definicije trajanja obveznica zasigurno su poznate. Macaulayevo trajanje se najčešće definira kao: „odnos vremenski ponderirane sadašnje vrijednosti obveznice i same sadašnje vrijednosti obveznice“ (Aljinović, Marasović, Šego 2008:239), „težinsko vrijeme do dospijeća obveznice, pri čemu su težine kvocijenti tržišne vrijednosti novčanih tokova i tekuće cijene obveznice“ (Gardijan, Kojić, Šego 2012:7). To je koncept „koji predstavlja prosječno ponderirano vrijeme do dospijeća obveznice“ (Orsag 2003:224) itd. Uz pretpostavku konstantne kamatne stope $i$ do dospijeća obveznice, trajanje kuponskih obveznica definirano je formulom:

$$D = \frac{1}{B}\sum_{t=1}^{T} t \frac{K_t}{\left(1+i\right)^t} = \frac{1}{B}\sum_{t=1}^{T} t \frac{K_t}{r^t}, \tag{2.1}$$

gdje $D$ predstavlja Macaulayevo trajanje, $B$ cijenu klasične kuponske obveznice, $K_t$ postnumerando isplate – kupone, te $i$ kamatnu stopu. Izraz $1+i$ je dekurzivni kamatni faktor, $r$. Međutim, analiza trajanja ne staje samo na tim definicijama, već se ono modificira i prikazuje kao mjera rizičnosti individualne obveznice. Na taj način ova mjera pomaže investitoru pri odluci o (ne)uključivanju pojedine obveznice u portfelj. Uz navedene pretpostavke trajanje kao mjera rizičnosti obveznice računa se formulom:

$$E_{B,r} = \frac{\dfrac{dB}{dr}}{\dfrac{B}{r}} = \frac{\dfrac{dB}{B}}{\dfrac{dr}{r}} = -D, \tag{2.2}$$

odnosno modificirano trajanje:[3]

$$\frac{1}{B}\frac{dB}{di} = -\frac{D}{1+i} = D_m. \tag{2.3}$$

Važno je uočiti razliku između trajanja i derivacije cijene obveznice s obzirom na kamatnu stopu. Naime, to nisu istovjetni pojmovi. Nadalje, trajanje kao mjera rizičnosti ima sljedeća važna svojstva: povećanje kamatne stope $i$ uzrokuje smanjenje Macaulayevog trajanja, *ceteris paribus*, povećanje vremena do dospijeća $T$ uzrokuje povećanje Macaulayevog trajanja, *ceteris paribus* itd.[4] Kao što je već spomenuto, za male promjene kamatnog faktora trajanje je dobra aproksimacija promjene cijene. U tu svrhu zapišimo izraz na sljedeći način:

$$\frac{dB}{B} = -D\frac{dr}{r}. \tag{2.4}$$

Ako je promjena kamatne stope dovoljno mala, izraz u (2.4) postaje:

$$\frac{\Delta B}{B} \approx -D\frac{\Delta r}{r} \tag{2.5}$$

Nedostatak ove mjere jest što je ona dobra za male promjene kamatnog faktora (ili kamatne stope), ali i to što jednako vrednuje utjecaj smanjenja i povećanja kamatne stope na promjenu cijene obveznice. Stoga je u analizu potrebno uključiti konveksnost obveznice.

## 2.2. Konveksnost obveznice

Trajanje je kao mjera rizičnosti dobra mjera koja lokalno aproksimira učinke promjene[5] kamatnih stopa na samu cijenu obveznice od interesa. Razmatranje samo prve derivacije u uvjetima volatilnih kamatnih stopa nije dovoljno. Konveksnost obveznice je mjera pogreške koju činimo koristeći samo prvu derivaciju prilikom analize učinaka promjene kamatne

[3] Izvode formula (2.2) i (2.3) vidjeti u Aljinović, Marasović, Šego (2011.).

[4] Za ostala svojstva te dokaze vidjeti (Gardijan, Kojić, Šego 2012.).

[5] Dakle, za infinitezimalno male promjene.

stope (Cvitanić, Zapatero, 2004.). U praksi je uočeno da povećanje kamatne stope izaziva manje smanjenje cijene obveznice nego što je njeno povećanje, kada se kamate smanje za jednak postotni bod (Vujnović-Gligorić, Savić, 2011:93). Iz tih razloga potrebno je modificirati izračun rizičnosti obveznice, pa ćemo razmotriti najprije drugu derivaciju cijene obveznice s obzirom na kamatni faktor:

$$\frac{d}{d(1+i)}\left(\frac{dB}{d(1+i)}\right)=\frac{d}{d(1+i)}\left[-\sum_{t=1}^{T} t\frac{K_t}{(1+i)^{t+1}}\right]=\sum_{t=1}^{T} t(t+1)\frac{K_t}{(1+i)^{t+2}} . \tag{2.6}$$

Očito je druga derivacija pozitivna, što znači da je krivulja cijene kuponske obveznice konveksna. Što je konveksnost veća, to će aproksimacija rizičnosti pomoću trajanja biti manje precizna. Sama konveksnost obveznice $C_b$ definira se kao omjer druge derivacije i same cijene obveznice (može se uočiti analogija s trajanjem):

$$C_b=\frac{1}{B}\frac{d^2B}{d(1+i)^2}=\frac{1}{B}\sum_{t=1}^{T} t(t+1)\frac{K_t}{(1+i)^{t+2}} . \tag{2.7}$$

Analizirajmo svojstva konveksnosti obične kuponske obveznice, s obzirom na njenu važnost u analizi rizičnosti iste. U literaturi su ova svojstva zanemarena te se ne izvode. Stajalište autora jest da je od važnosti razmotriti ova svojstva s obzirom na implikacije koje slijede iz njih. U nastavku ih iznosimo.

**Svojstvo 1.** Konveksnost kuponskih obveznica je uvijek pozitivna veličina.

Ovo svojstvo nije potrebno posebno dokazivati jer je očito iz (2.7) da se u izrazu za konveksnost množe i zbrajaju pozitivne veličine.

**Svojstvo 2.** Povećanje (smanjenje) kamatne stope dovodi do smanjenja (povećanja) konveksnosti obveznice, *ceteris paribus*[6].

Ovo svojstvo možemo provjeriti derivirajući funkciju $C_b$ s obzirom na kamatnu stopu $i$ ili na sljedeći način. Povećajmo kamatnu stopu za proizvoljan iznos $\delta > 0$ i promotrimo dobijenu vrijednost u odnosu na vrijednost funkcije $C_b$ prije povećanja stope $i$:

$$C_b(i)=\frac{1}{B}\sum_{t=1}^{T} t(t+1)\frac{K_t}{(1+i)^{t+2}} ,$$

te nakon povećanja $i$ za iznos $\delta$:

$$C_b(i+\delta)=\frac{1}{B}\sum_{t=1}^{T} t(t+1)\frac{K_t}{(1+i+\delta)^{t+2}} .$$

[6] U literaturi se često zanemaruje pretpostavka *ceteris paribus* prilikom navođenja nekog od svojstava.

Razlika je

$$C_b(i+\delta)-C_b(i)=\frac{1}{B}\sum_{t=1}^{T}t(t+1)\frac{K_t}{(1+i+\delta)^{t+2}}-\frac{1}{B}\sum_{t=1}^{T}t(t+1)\frac{K_t}{(1+i)^{t+2}}$$

$$==\frac{1}{B}\left[\sum_{t=1}^{T}\frac{t(t+1)K_t}{(1+i+\delta)^{t+2}}-\frac{t(t+1)K_t}{(1+i)^{t+2}}\right].$$

Kako je

$$(1+i+\delta)^{t+2}>(1+i)^{t+2},$$

slijedi

$$\frac{t(t+1)K_t}{(1+i+\delta)^{t+2}}<\frac{t(t+1)K_t}{(1+i)^{t+2}},\ \forall t.$$

Stoga je

$$C_b(i+\delta)-C_b(i)=\frac{1}{B}\left[\sum_{t=1}^{T}\frac{t(t+1)K_t}{(1+i+\delta)^{t+2}}-\frac{t(t+1)K_t}{(1+i)^{t+2}}\right]<0,$$

čime je dokazano drugo svojstvo. Posljedica ovoga svojstva ukazuje da povećanje ili smanjenje kamatne stope nema jednak učinak na promjenu cijene obveznice, dakle, trajanje i nije jako pouzdana mjera s obzirom na svoju linearnost.

**Svojstvo 3.** Porast (smanjenje) vremena do dospijeća obveznice dovodi do povećanja (smanjenja) konveksnosti obveznice, *ceteris paribus*.

Za dokaz ovoga svojstva razmotrimo razliku vrijednosti funkcije $C_b$ do dospijeća $T$+1 i $T$:

$$C_b(T)=\frac{1}{B}\sum_{t=1}^{T}t(t+1)\frac{K_t}{(1+i)^{t+2}}$$

i

$$C_b(T+1)=\frac{1}{B}\sum_{t=1}^{T+1}t(t+1)\frac{K_t}{(1+i)^{t+2}},$$

$$C_b(T+1)-C_b(T)=\frac{1}{B}\sum_{t=1}^{T+1}t(t+1)\frac{K_t}{(1+i)^{t+2}}-\frac{1}{B}\sum_{t=1}^{T}t(t+1)\frac{K_t}{(1+i)^{t+2}}=$$

$$=\frac{1}{B}\left[\sum_{t=1}^{T+1} t(t+1)\frac{K_t}{(1+i)^{t+2}} - \sum_{t=1}^{T} t(t+1)\frac{K_t}{(1+i)^{t+2}}\right]=$$

$$=\frac{1}{B}\left[(T+1)(T+2)\frac{K_{T+1}}{(1+i)^{T+3}}\right].$$

Kako je posljednji izraz očito pozitivan, vrijedi

$$C_b(T+1)-C_b(T)>0,$$

čime je dokazano svojstvo 3. To znači da ona obveznica koja ima veće vrijeme do dospijeća uz sve ostale značajke jednake u odnosu na neku drugu, njena cijena će jače reagirati na promjene kamatne stope.

**Svojstvo 4.** Povećanje (smanjenje) postnumerando isplata – kupona dovodi do povećanja (smanjenja) konveksnosti obveznice.

U svrhu dokazivanja ovoga svojstva promatramo razliku konveksnosti $C_b(K_t)$ i onu za slučaj kada uvećamo kupone za proizvoljan iznos $\delta > 0$, $C_b(K_t+\delta)$:

$$C_b(K_t)=\frac{1}{B}\sum_{t=1}^{T} t(t+1)\frac{K_t}{(1+i)^{t+2}}$$

i

$$C_b(K_t+\delta)=\frac{1}{B}\sum_{t=1}^{T} t(t+1)\frac{K_t+\delta}{(1+i)^{t+2}}.$$

Razlika je dana izrazom

$$C_b(K_t+\delta)-C_b(K_t)=\frac{1}{B}\sum_{t=1}^{T} t(t+1)\frac{K_t+\delta}{(1+i)^{t+2}} - \frac{1}{B}\sum_{t=1}^{T} t(t+1)\frac{K_t}{(1+i)^{t+2}} =$$

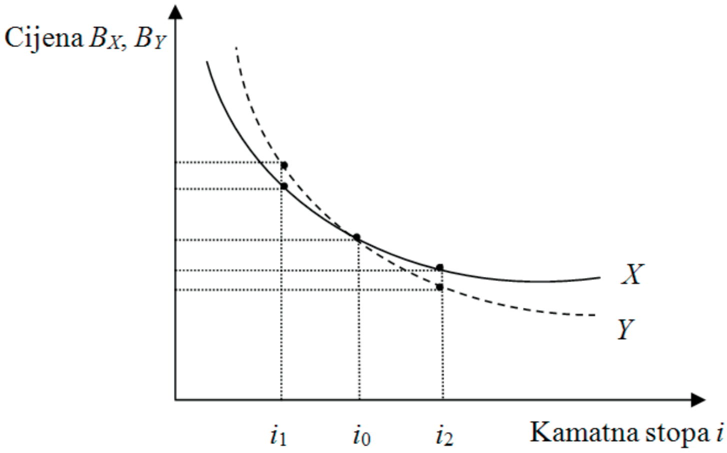
$$=\frac{1}{B}\left[\sum_{t=1}^{T}\frac{t(t+1)(K_t+\delta)-t(t+1)K_t}{(1+i)^{t+2}}\right]=$$

$$=\frac{1}{B}\sum_{t=1}^{T}\frac{t(t+1)\delta}{(1+i)^{t+2}} > 0.$$

Doista, povećanje postnumerando isplata dovodi do povećanja konveksnosti analizirane obveznice (*ceteris paribus*), pa smo dokazali da vrijedi svojstvo 4. Posljedice ovoga svojstva slične su kao kod prethodnoga. Dakle, ona obveznica koja ima veće postumerando isplate i sve ostale značajke jednake u odnosu na drugu, njena cijena će jače reagirati na promjene kamatne stope.

**Svojstvo 5.** Ona obveznica koju obilježava veća konveksnost u odnosu na druge je bolja investicijska prilika za investitora.

Svojstvo 5. ilustriramo slikom 1. iz koje je razvidno da ukoliko se kamatna stopa s razine $i_0$ smanji na razinu $i_1$, onda se uočava da zbog veće konveksnosti obveznice $Y$ dolazi do većeg povećanja cijene $B_Y$ u odnosu na obveznicu $X$, tj. $B_Y > B_X$ ako je $i_1 < i_0$. Stoga onaj investitor koji očekuje da će doći do smanjenja kamatne stope na razinu $i_1$ kupuje obveznicu $Y$ kako bi ju u budućnosti mogao prodati po većoj cijeni u odnosu na onu po kojoj je kupio obveznicu. Pritom je ta cijena veća u odnosu na cijenu obveznice $X$ koja je manje konveksna. S druge strane, ukoliko očekuje da će doći do povećanja kamatne stope na razinu $i_2$, pričekat će s kupnjom jer će doći do smanjenja cijene obveznice $Y$, i to u većoj mjeri u odnosu na promjenu cijene obveznice $X$.




**Slika 1.** Usporedba dvije obveznice s većom i manjom konveksnošću

*Izvor:* izradili autori.

## 2.3. Taylorov razvoj cijene obveznice kao točnija aproksimacija rizičnosti obveznice

Samo trajanje i konveksnost obveznice ne razmatraju se odvojeno, već se koriste u Taylorovoj formuli, kako bi se točnije aproksimirali učinci promjena kamatnih stopa na cijenu obveznice. U tu svrhu prikažimo najprije Taylorovu formulu u općenitom obliku, koja se koristi za aproksimaciju realne funkcije $f(x)$ u okolini točke $x_0$ koja je derivabilna do uključivo $n$-tog reda:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \ldots + R_n.$$

Taylorov razvoj cijene obveznice kao funkcije kamatnog faktora u okolini $r_0$ do zaključno drugog reda možemo pisati ovako:

$$B(r) \approx B(r_0) + \frac{r - r_0}{1!} B'(r_0) + \frac{(r - r_0)^2}{2!} B''(r_0),$$

odnosno

$$B(r) \approx B(r_0) + (r - r_0)\frac{dB}{dr} + \frac{1}{2}(r - r_0)^2 \frac{d^2B}{dr^2},$$

to jest

$$B(r) - B(r_0) \approx (r - r_0)\frac{dB}{dr} + \frac{1}{2}(r - r_0)^2 \frac{d^2B}{dr^2}. \quad (2.8)$$

Sada možemo izraz (2.10) preoblikovati u

$$\Delta B \approx \Delta r \frac{dB}{dr} + \frac{1}{2}\Delta^2 r \frac{d^2B}{dr^2}, \quad (2.9)$$

gdje su

$$\frac{dB}{dr} = -\frac{B}{r}D$$

i

$$\frac{d^2B}{dr^2} = B \cdot C_b.$$

Uvrstimo li posljednje dvije jednakosti u (2.9), dobijamo:

$$\Delta B \approx -\Delta r \frac{B}{r}D + \frac{1}{2}\Delta^2 r B C_b = B\left(-D\frac{\Delta r}{r} + \frac{1}{2}C_b \Delta^2 r\right). \quad (2.10)$$

Upravo smo pokazali kako Taylorov razvoj cijene obveznice ovisi o njenom trajanju i konveksnosti. Prilikom empirijske analize svojstava cijene obveznice preporuča se korištenje izraza (2.10) kao točnije aproksimacije utjecaja promjene kamatne stope na cijenu obveznice. Kako izraz (2.10) uključuje i konveksnost obveznice, razmatranje njenih svojstava je nužno u ovakvoj analizi.

## 3. ZAKLJUČAK

Najčešće korištene mjere rizičnosti obveznica, trajanje i konveksnost, omogućavaju usporedbu rizičnosti kuponskih obveznica različitih značajki u smislu ocjene osjetljivosti njihove cijene na promjene vrijednosti varijabli. Analizom analitičkih izraza kojima se računaju ove mjere moguće je izvesti njihova svojstva koja općenito vrijede za sve kuponske obveznice uz određene pretpostavke. Tako su u radu pokazana svojstva i posljedice konveksnosti na samu cijenu obveznice, nakon čega je ukazana važnost Taylorovog razvoja do zaključno drugog reda cijene obveznice. Autori se nadaju da su u ovome radu otklonjene nedoumice vezane za razumijevanje konveksnosti obične obveznice i njezinih svojstava.

## LITERATURA:


1. Aljinović, Z., Marasović, B., Šego, B. (2011.), Financijsko modeliranje, Ekonomski fakultet u Splitu, Split.
2. Cvitanić J., Zapatero, F. (2004.), Introduction to the Economics and Mathematics of Financial Markets, MIT Press, England.
3. Gardijan, M., Kojić, V., Šego, B. (2012.), Trajanje obveznica: pravila i primjene, poglavlje u: Matematički modeli u analizi razvoja hrvatskog financijskog tržišta (urednici Aljinović, Z., Marasović, B.), Sveučilište u Splitu, Ekonomski fakultet, Split, str. 5.-27.
4. Macaulay, F. R. (1938). The Movements of Interest Rates Bond Yields and Stocks Prices in the United States since 1856. New York: National Bureau of Economic Research.
5. Orsag, S. (2003.), Vrijednosni papiri, Revicon, Sarajevo.
6. Vujnović-Gligorić, B., Savić, B. (2011.), Imunizacija investicionog portfelja banaka. Tranzicija, Vol. 12, No. 25-26, str. 84.-95.