math.e

Hrvatski matematički elektronički časopis

O Jacobsthalovu nizu

Jacobsthalov niz   stanični automati

Bojan Kovačić,
Tehničko veleučilište u Zagrebu, Zagreb

Marijana Špoljarić
Visoka škola za menadžment u turizmu i informatici u Virovitici, Virovitica

Luka Marohnić
Tehničko veleučilište u Zagrebu, Zagreb

Sažetak

U članku se definira Jacobsthalov niz, te se ukratko opisuje njegova veza s Lucasovim brojevima. Detaljno se izvodi formula za opći član niza, te pripadna funkcija izvodnica. Potom se navode i dokazuju neka osnovna svojstva toga niza, kao i neke jednakosti vezane uz članove niza. Zaključno se opisuje veza Jacobsthalova niza i elementarnih staničnih automata.

1 Definicija i osnovna svojstva Jacobsthalova niza

Jacobsthalov niz svoj naziv duguje njemačkom matematičaru Ernstu Jacobsthalu (1882.–1965.). Spomenimo da je, osim po proučavanju ovoga niza, Jacobsthal poznat i po dokazu da se svaki prost broj oblika $4 \cdot k + 1$, pri čemu je $k \in \mathbb{N}$, može prikazati kao zbroj kvadrata dvaju prirodnih brojeva. Taj je dokaz Jacobsthal 1906. godine izložio u svojoj doktorskoj disertaciji ,,Primjena jedne formule iz teorije kvadratnih ostataka".

Jacobsthalov niz definiran je rekurzivno s:

$$\begin{cases} J_n = J_{n-1} + 2 \cdot J_{n-2}, \quad n \geq 2, \\ J_0 = 0,\ J_1 = 1. \end{cases} \tag{1}$$

Iz (1) se lako dobiva prvih nekoliko članova Jacobsthalova niza: 0, 1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, \dots
Osnovna rekurzija reda 2 navedena u (1) može se pojednostavniti svođenjem na rekurziju reda 1. Točnije, vrijedi sljedeća propozicija:

Propozicija 1. *Za svaki prirodan broj n vrijede jednakosti:*

$$J_{n+1} = 2 \cdot J_n + (-1)^n \tag{2}$$

i

$$J_{n+1} = 2^n - J_n. \tag{3}$$

Dokaz. Obje jednakosti najjednostavnije se dokazuju matematičkom indukcijom. Dokažimo najprije (2). Za $n = 1$ dobivamo

$$J_2 = 2 \cdot J_1 + (-1)^1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$$

čime smo provjerili valjanost baze indukcije. Pretpostavimo da (2) vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$ i sve prirodne brojeve manje od n, pa pokažimo da je (2) valjana i za broj $n + 1$. Koristeći osnovnu rekurziju iz (1) i izrečenu pretpostavku, dobivamo redom:

$$J_{n+2} = J_{n+1} + 2 \cdot J_n = J_{n+1} + (J_{n+1} - (-1)^n) = 2 \cdot J_{n+1} + (-1)^{n+1}$$

pa (2) vrijedi i za broj $n + 1$, a to smo i htjeli pokazati.

Jednakost (3) se dokazuje potpuno analogno kao i (2), pa taj dokaz prepuštamo čitatelju. ■

U nastavku ćemo odrediti zatvorenu formulu za opći član niza, tj. propis realne funkcije f jedne realne varijable takve da je $J_n = f(n)$. Vrijedi sljedeća propozicija:

Propozicija 2. *Za svaki $n \in \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \ldots\}$ vrijedi jednakost:*

$$J_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3} \tag{4}$$

Dokaz. Pokazali smo da jednakosti (2) i (3) vrijede za svaki prirodan broj n. Pomnožimo li jednakost (3) brojem 2 i zbrojimo dobivenu jednakost s jednakosti (2), zaključujemo da jednakost

$$3 \cdot J_{n+1} = 2^{n+1} + (-1)^n$$

odnosno

$$3 \cdot J_{n+1} = 2^{n+1} - (-1)^{n+1} \tag{5}$$

vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$. Zamijenimo li $n + 1$ s n, vrijednost varijable n bit će neki cijeli broj iz skupa $\mathbb{N}_0$. Preostaje jednakost (5) podijeliti s 3, čime se dobiva jednakost (4). ■

Formula (4) može se izvesti i pomoću funkcije izvodnice za Jacobsthalov niz. Izvedimo najprije zatvorenu formu za tu funkciju. Podsjetimo, funkcija izvodnica za niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je izraz

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n. \tag{6}$$

Desna strana te jednakosti je formalni red potencija. Ako je moguće, treba odrediti zatvoreni oblik funkcije f , odnosno prikazati je kao izraz koji se sastoji od konačno mnogo članova i faktora. Pritom problem konvergencije desne strane jednakosti (6) zanemarujemo.

Propozicija 3. *Funkcija izvodnica za niz (1) je*

$$f(x)=\frac{x}{(x+1)(1-2x)}. \tag{7}$$

Dokaz. Koristeći osnovnu rekurziju iz (1) imamo redom:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}J_nx_n &= J_1x+\sum_{n=2}^{\infty}J_nx^n=x+\sum_{n=2}^{\infty}\left(J_{n-1}+2J_{n-2}\right)x^n=x+\sum_{n=2}^{\infty}J_{n-1}x^n+2\sum_{n=2}^{\infty}J_{n-2}x^n=\\ &=x+\sum_{n=1}^{\infty}J_nx^{n+1}+2\sum_{n=0}^{\infty}J_nx^{n+2}=x+x\sum_{n=1}^{\infty}J_nx^n+2x^2\sum_{n=0}^{\infty}J_nx^n=\\ &=x+x\sum_{n=1}^{\infty}J_nx^n+2x^2\left(J_0x^0+\sum_{n=1}^{\infty}J_nx^n\right)=x+x\sum_{n=1}^{\infty}J_nx^n+2x^2\sum_{n=1}^{\infty}J_nx^n.\end{aligned}$$

Prema definiciji funkcije izvodnice za Jacobsthalov niz vrijedi

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}J_nx^n$$

pa slijedi

$$f(x)=x+xf(x)+2x^2f(x)\quad\Rightarrow\quad f(x)\left(1-x-2x^2\right)=x,$$

odakle je

$$f(x)=\frac{x}{1-x-2x^2}.$$

Lako se vidi da su $x_1=-1$ i $x_2=\frac{1}{2}$ nultočke polinoma $p(x)=-2x^2-x+1$, pa konačno dobivamo

$$f(x)=\frac{x}{1-x-2x^2}=\frac{x}{(-2)(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)}=\frac{x}{(x+1)(1-2x)}.$$

■

Prethodnu propoziciju dokazat ćemo na još jedan način.

Alternativni dokaz propozicije 6. Rastavimo funkciju f na parcijalne razlomke. Tražimo realne brojeve A i B takve da vrijedi

$$f(x)=\frac{x}{(x+1)(1-2x)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{1-2x}.$$

Odavde je

$$x = \left(\frac{A}{x+1} + \frac{B}{1-2x}\right) \cdot (x+1)(1-2x)$$

što se nakon kraćenja svodi na

$$x = A(1-2x) + B(x+1).$$

Posljednja jednadžba predstavlja jednakost dvaju polinoma. Ona mora vrijediti za svaki $x \in \mathbb{R}$. Uvrštavanjem $x = -1$ odmah dobivamo $A = -\frac{1}{3}$, dok uvrštavanjem $x = \frac{1}{2}$ slijedi $B = \frac{1}{3}$. Stoga vrijedi

$$f(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-2x} - \frac{1}{x+1}\right). \tag{8}$$

Razvijmo članove unutar zagrade u redove potencija. Primijenit ćemo poznati razvoj

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Uvrstimo li umjesto x izraz $-x$ odnosno $2x$, dobivamo redom

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot x^n \quad \text{i} \quad \frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot x^n.$$

Konačno dobivamo

$$f(x) = \frac{1}{3}\left(\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot x^n - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n - (-1)^n}{3} \cdot x^n,$$

odakle, prema (4), slijedi da je koeficijent uz x^n jednak J_n, čime je dokaz završen. ■

Napomenimo da je niz (1) poseban slučaj poopćenoga Lucasova niza $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Taj se niz zadaje tako da se odaberu $x, y \in \mathbb{Z}$ sa svojstvom $x^2 - 4y > 0$, pa se definira redom:

$$\begin{cases} a = \frac{x+\sqrt{x^2-4y}}{2},\ b = \frac{x-\sqrt{x^2-4y}}{2}, \\ L_n(a,b) = \frac{a^n-b^n}{a-b},\ n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Lako se provjeri da izborom $x = 1$ i $y = -2$ dobivamo Jacobsthalov niz. Detalje ovdje izostavljamo, a mogu se naći u [1].

2 Neke jednakosti vezane uz Jacobsthalov niz

U ovoj ćemo točki dokazati nekoliko zanimljivih jednakosti vezanih uz Jacobsthalov niz. Najprije ćemo izračunati zbroj prvih n članova toga niza. Vrijedi sljedeća propozicija.

Propozicija 4. *Za svaki prirodan broj n vrijedi jednakost*

$$\sum_{k=1}^{n} J_k = \frac{1}{2}\left(J_{n+2} - 1\right). \tag{9}$$

Dokaz. Jednakost (9) se „klasično" može dokazati matematičkom indukcijom, što prepuštamo čitatelju za vježbu. Mi ćemo (9) dokazati metodom teleskopiranja koristeći jednakost (3). Napišimo jednakost (3) za $k = 1, 2, 3, \ldots, n$:

$$J_{1+1} = 2^1 - J_1,\ J_{2+1} = 2^2 - J_2,\ J_{3+1} = 2^3 - J_3,\ \ldots\ J_{n+1} = 2^n - J_n.$$

Zbrajanjem tih n jednakosti dobivamo

$$J_2 + J_3 + J_4 + \cdots + J_{n+1} = (2 + 4 + 8 + \cdots + 2^n) - (J_1 + J_2 + J_3 + \ldots + J_n).$$

Lijevoj i desnoj strani ove jednakosti dodajmo broj $J_1 = 1$, pa dobivamo

$$J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + \cdots + J_{n+1} = (2 + 4 + 8 + \cdots + 2^n) + 1 - (J_1 + J_2 + J_3 + \cdots + J_n).$$

Odavde slijedi

$$\sum_{k=1}^{n} J_k = \frac{1}{2}\left[(2 + 4 + 8 + \cdots + 2^n) + 1 - J_{n+1}\right]. \tag{10}$$

U okruglim zagradama napisan je zbroj prvih n članova geometrijskoga niza kojemu su prvi član i količnik jednaki 2. Taj je zbroj jednak

$$2 + 4 + 8 + \cdots + 2^n = 2\left(\frac{2^n - 1}{2 - 1}\right) = 2^{n+1} - 2,$$

pa jednakost (10) možemo zapisati u obliku

$$\sum_{k=1}^{n} J_k = \frac{1}{2}\left[\left(2^{n+1} - 2\right) + 1 - J_{n+1}\right] = \left(2^n - \frac{1}{2} \cdot J_{n+1}\right) - \frac{1}{2}.$$

Podijelimo li jednakost (3) s brojem 2, dobit ćemo

$$\frac{1}{2} \cdot J_{n+1} = 2^{n-1} - \frac{1}{2} \cdot J_n.$$

Pišemo li u ovoj jednakosti n umjesto $n-1$, $n+1$ umjesto n i $n+2$ umjesto $n+1$, dobivamo

$$2^n - \frac{1}{2} \cdot J_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot J_{n+2}.$$

Stoga je

$$\sum_{k=1}^{n} J_k = \frac{1}{2} \cdot J_{n+2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(J_{n+2} - 1),$$

što je i trebalo pokazati. ■

Poznato je da za niz Fibonaccijevih brojeva $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiran s

$$\begin{cases} F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 3, \\ F_1 = F_2 = 1 \end{cases}$$

vrijedi *Cassinijev identitet*:

$$F_{n+1} \cdot F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n. \tag{11}$$

(Detalji se mogu naći npr. u [4]). Analogon Cassinijeva identiteta za Jacobsthalov niz izriče sljedeća propozicija.

Propozicija 5. *Za svaki prirodan broj n vrijedi jednakost*

$$J_{n+1} \cdot J_{n-1} - J_n^2 = (-1)^n \cdot 2^{n-1}. \tag{12}$$

Dokaz. Koristeći (4) imamo redom:

$$\begin{aligned} J_{n+1} \cdot J_{n-1} - J_n^2 &= \left(\frac{2^{n+1} - (-1)^{n+1}}{3}\right) \cdot \left(\frac{2^{n-1} - (-1)^{n-1}}{3}\right) - \left(\frac{2^n - (-1)^n}{3}\right)^2 = \\ &= \frac{\left(2^{n+1} + (-1)^n\right) \cdot \left(2^{n-1} + (-1)^n\right) - \left(2^n - (-1)^n\right)^2}{9} = \\ &= \frac{2^{2n} + (-1)^n \cdot \left(2^{n-1} + 2^{n+1}\right) + (-1)^{2n} - 2^{2n} + 2^{n+1} \cdot (-1)^n - (-1)^{2n}}{9} = \\ &= \frac{(-1)^n \cdot \left(2^{n-1} + 2 \cdot 2^{n+1}\right)}{9} = \frac{(-1)^n \cdot 2^{n-1} \cdot \left(1 + 2^3\right)}{9} = (-1)^n \cdot 2^{n-1}, \end{aligned}$$

što je i trebalo pokazati. ■

Posljednju propoziciju moguće je dokazati i na drugačiji način. Pokazat ćemo najprije da Jacobsthalove brojeve možemo izračunavati pomoću F-matrice

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

koja je analogon Q-matrici[1] $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ za Fibonaccijeve brojeve. Točnije, vrijedi sljedeća propozicija.

Propozicija 6. *Za sve prirodne brojeve n vrijedi*

$$F^n = \begin{pmatrix} J_{n+1} & 2J_n \\ J_n & 2J_{n-1} \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Dokaz. Tvrdnju ove propozicije jednostavno dokazujemo matematičkom indukcijom koristeći osnovnu rekurziju (1). Zbog $J_0 = 0$ i $J_1 = J_2 = 1$ očito je

$$F^1 = F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_2 & 2J_1 \\ J_1 & 2J_0 \end{pmatrix},$$

čime smo pokazali valjanost baze indukcije. Pretpostavimo da jednakost (13) vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$. Koristeći (1), dobivamo:

$$\begin{aligned} F^{n+1} &= F^n \cdot F = \begin{pmatrix} J_{n+1} & 2J_n \\ J_n & 2J_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{n+1} + 2J_n & 2J_{n+1} \\ J_n + 2J_{n-1} & 2J_n \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} J_{n+2} & 2J_{n+1} \\ J_{n+1} & 2J_n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

čime je dokaz završen. ■

Alternativni dokaz propozicije~11. Na matrice iz Propozicije 12 primijenimo Binet-Cauchyev[2] teorem. Determinanta desne strane jednakosti (13) je

$$\begin{vmatrix} J_{n+1} & 2J_n \\ J_n & 2J_{n-1} \end{vmatrix} = 2J_{n+1} \cdot J_{n-1} - 2J_n^2,$$

a determinanta lijeve strane

$$\det\left(F^n\right) = (\det F)^n = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}^n = (-2)^n = (-1)^n \cdot 2^n,$$

pa izjednačavanjem tih izraza dobivamo

$$J_{n+1} \cdot J_{n-1} - 2J_n^2 = (-1)^n \cdot 2^{n-1},$$

što je upravo jednakost (12). ■

U sljedeće dvije propozicije povezat ćemo članove Jacobsthalova niza i binomne koeficijente. Najprije ćemo pokazati da se svaki element Jacobsthalova niza može dobiti kao svojevrsna „linearna kombinacija" potencija broja 2 s nenegativnim cjelobrojnim eksponentom čiji su „koeficijenti" određeni binomni koeficijenti.

Propozicija 7. *Za svaki prirodan broj n vrijedi jednakost*

$$\sum_{k\geq 0} \binom{n-1-k}{k} \cdot 2^k = J_n.$$

Dokaz. Pokazat ćemo da niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ čiji je opći član

$$a_n = \sum_{k\geq 0} \binom{n-1-k}{k} \cdot 2^k \tag{14}$$

zadovoljava sve jednakosti u (1). Znamo da je prva jednakost u (1) zapravo rekurzija reda 2 koja uz dva zadana početna uvjeta ima jedinstveno rješenje. Prema definiciji, ta rekurzija i početni uvjeti definiraju Jacobsthalov niz. Dokažemo li da ista tri svojstva ima i niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, slijedit će $a_n = J_n$, za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Koristit ćemo jednakosti

$$\binom{0}{0} = 1 \quad \text{i} \quad \binom{n}{k} = 0 \quad \text{za } k > n \text{ ili } k < 0. \tag{15}$$

Napomenimo da, zbog (15), ne moramo paziti na gornju granicu indeksa sumacije. Drugim riječima, sve razmatrane sume idu od $k = 0$ pa „dokle god mogu" (tj. dok „nazivnik" binomnoga koeficijenta ne postane strogo veći od „brojnika"). Tako najprije imamo:

$$a_1 = \sum_{k\geq 0} \binom{1-1-k}{k} \cdot 2^k = \sum_{k\geq 0} \binom{0-k}{k} \cdot 2^k = \binom{0-0}{0} \cdot 2^0 = 1,$$
$$a_2 = \sum_{k\geq 0} \binom{2-1-k}{k} \cdot 2^k = \sum_{k\geq 0} \binom{1-k}{k} \cdot 2^k = \binom{1-0}{0} \cdot 2^0 + \binom{1-1}{1} \cdot 2^1 = 1 + 0 = 1,$$

Dakle, niz (14) zadovoljava početne uvjete iz (1). Koristeći poznato svojstvo binomnih koeficijenata

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k-1},$$

dobivamo redom:

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k\geq 0} \binom{n-1-k}{k} \cdot 2^k = \sum_{k\geq 0} \left[\binom{n-2-k}{k} + \binom{n-2-k}{k-1} \right] \cdot 2^k = \\ &= \sum_{k\geq 0} \binom{n-2-k}{k} \cdot 2^k + \sum_{k\geq 0} \binom{n-2-k}{k-1} \cdot 2^k. \end{aligned}$$

U posljednjoj sumi zamijenimo $i := k - 1$, odnosno $k = i + 1$. Tada je nejednakost $k \geq 0$ ekvivalentna nejednakosti $i \geq -1$. Međutim, zbog jednakosti

$$\binom{n-2-(-1+1)}{-1} = \binom{n-2}{-1} = 0,$$

najmanja vrijednost indeksa sumacije u drugoj sumi je $i = 0$. Stoga dobivamo:

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k\geq 0} \binom{n-2-k}{k} \cdot 2^k + \sum_{i\geq 0} \binom{n-2-(i+1)}{i} \cdot 2^{i+1} = \\ &= \sum_{k\geq 0} \binom{n-2-k}{k} \cdot 2^k + 2\sum_{i\geq 0} \binom{n-3-i}{i} \cdot 2^i = \\ &= \sum_{k\geq 0} \binom{n-2-k}{k} \cdot 2^k + 2\sum_{k\geq 0} \binom{n-3-k}{k} \cdot 2^k. \end{aligned}$$

Iz (14) slijedi da je prva suma jednaka a_{n-1}, a druga a_{n-2}. Stoga je

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2},$$

a to je upravo rekurzija iz (1). ■

Iz Propozicija 3 i 13 izravno slijedi sljedeći identitet.

Korolar 1. *Za sve prirodne brojeve n vrijedi*

$$\sum_{k\geq 0} \binom{n-1-k}{k} \cdot 2^k = \frac{2^n - (-1)^n}{3}.$$

Promotrimo sada svojevrsni obrat Propozicije 13, tj. „linearnu kombinaciju" članova Jacobsthalova niza čiji su „koeficijenti" binomni koeficijenti iz istoga retka Pascalova trokuta. (Detaljnije o binomnim koeficijentima i Pascalovu trokutu može se naći u [5].) Pomoću takvih „linearnih kombinacija" mogu se dobiti sve potencije broja 3 kojima je eksponent nenegativan cijeli broj. Točnije, vrijedi sljedeća propozicija.

Propozicija 8. *Za svaki prirodan broj n vrijedi*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot J_k = 3^{n-1}.$$

Dokaz. Primijenit ćemo binomni poučak:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot y^k, \quad n \in \mathbb{N},\ x, y \in \mathbb{C}.$$

Uvrstimo li u binomni poučak $x = 1$, $y = 2$, odnosno $x = 1$, $y = -1$, dobit ćemo:

$$\begin{aligned} 3^k &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 2^k, \\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k &= 0. \end{aligned}$$

Koristeći jednakost (4) dobivamo redom:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot J_k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot\frac{2^k-(-1)^k}{3} = \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot 2^k - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\right) = \frac{1}{3}(3^n-0) = 3^{n-1},$$

što je i valjalo pokazati. ■

Posebno je zanimljiva veza članova Jacobsthalova niza s alternirajućim konvergentnim geometrijskim redom. Koristi se jednakost

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^k = \frac{2}{3} \tag{16}$$

koja se dobiva tako da se u formulu za zbroj konvergentnoga geometrijskoga reda

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n = \frac{1}{1-x}, \quad |x|<1,$$

uvrsti $x=-\frac{1}{2}$. Međutim, n-ti djelomični zbroj reda (16) definiran s

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

usko je povezan s Jacobsthalovim brojevima. O tome govori sljedeća propozicija.

Propozicija 9. *Za svaki nenegativan cijeli broj n vrijedi:*

$$S_n = \frac{J_{n+1}}{2^n}.$$

Dokaz. Jednakost se najbrže i najlakše dokazuje matematičkom indukcijom. Za $n=0$ imamo:

$$S_0 = \sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^k = \left(-\frac{1}{2}\right)^0 = 1 = \frac{1}{2^0} = \frac{J_1}{2^0}$$

čime smo pokazali valjanost baze indukcije. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n\in\mathbb{N}$, pa pokažimo da vrijedi za broj $n+1$. Koristeći jednakost (2) dobivamo redom:

$$S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\left(-\frac{1}{2}\right)^k = \left[\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^k\right] + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} = S_n + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{J_{n+1}}{2^n} + \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{2\cdot J_{n+1}+(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{J_{n+2}}{2^{n+1}},$$

pa tvrdnja propozicije vrijedi i za broj $n+1$. ■

Iz razmatranja ispred Propozicije 16 ili iz Propozicije 3 slijedi

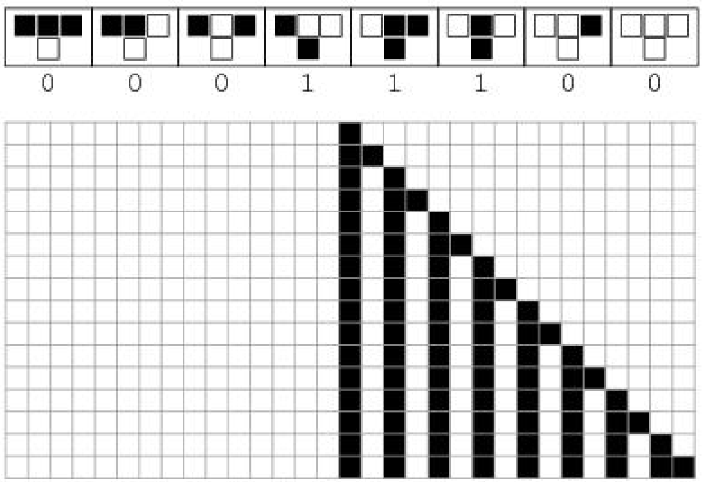
Korolar 2.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{J_{n+1}}{2^n} = \frac{2}{3}.$$

3 Veza Jacobsthalova niza i elementarnih staničnih automata

Grubo rečeno, stanični automat je model dinamičnog fizikalnog sustava u kojem su vrijeme i prostor diskretizirani, a interakcije su samo lokalne. Svaki stanični automat sastoji se od regularne n-dimenzionalne rešetke, odnosno n-dimenzionalnog polja stanica (ćelija) od kojih je svaka u jednom od mogućih stanja. Ukupan broj takvih stanja je konačan.

Najjednostavnija klasa jednodimenzionalnih staničnih automata su elementarni stanični automati. Njegove stanice mogu biti u točno dva moguća stanja (0 ili 1). Stanice smještene neposredno lijevo i neposredno desno od promatrane stanice nazivamo susjedne stanice. Stanica i njezine dvije susjedne stanice tvore strukturu koju nazivamo konfiguracija. Svaka konfiguracija može imati ukupno $2^3=8$ stanja. Za svaku konfiguraciju definiramo pravilo odlučivanja o vrijednostima stanica u sljedećem retku rešetke. To pravilo je funkcija koja svakoj stanici u 2., 3., 4,\dots, retku rešetke pridružuje 0 ili 1 zavisno o konfiguraciji smještenoj neposredno iznad te stanice. Zbog toga postoji ukupno $2^8=256$ mogućih pravila pridruživanja.

Pravila za izgradnju rešetke elementarnih staničnih automata definirao je i opisao Stephen Wolfram 1983. godine. (Za detalje vidjeti [3].) Mi ćemo izdvojiti tzv. *Pravilo 28*. Ovo pravilo prikazano je na slici 1 kao i razvoj jedne crne ćelije nakon 15 koraka. Istaknimo da se „izgradnja“ rešetke zasniva na jednakosti $(28)_{10}=(00011100)_2$.



Slika 1: Pravilo 28.

Formalno gledajući, Pravilo 28 je funkcija $f:\{0,1\}^3\to\{0,1\}$ definirana propisom

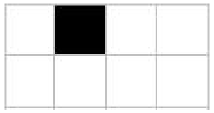
$$f(x,y,z) = (x + y + xz + xyz) \mod 2.$$

(Detaljnije o Pravilu 28 može se naći u [2] ili [3].) Ovo pravilo pregledno možemo zapisati u obliku tablice 1.

(x,y,z)	$f(x,y,z)$
$(0,0,0)$	0
$(0,0,1)$	0
$(0,1,0)$	1
$(0,1,1)$	1
$(1,0,0)$	1
$(1,0,1)$	0
$(1,1,0)$	0
$(1,1,1)$	0

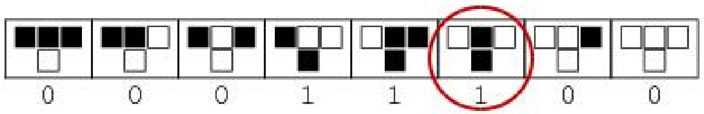
Tablica 1: Tablično zadavanje Pravila 28.

Promotrimo sliku 1, pa zaključimo kako smo na temelju prvoga retka dobili drugi redak. Kao osnovnu stanicu najprije uzimamo jedinu crnu ćeliju u prvom retku. Njezini lijevi i desni susjedi su bijele ćelije, pa imamo konfiguraciju „bijela–crna–bijela" (vidjeti sliku 2).



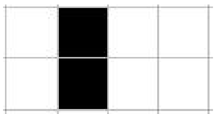
Slika 2: Prvi redak rešetke elementarnih staničnih automata.

Primjenom Pravila 28 na navedenu konfiguraciju kao rezultat dobivamo jednu crnu ćeliju (vidjeti sliku 3).



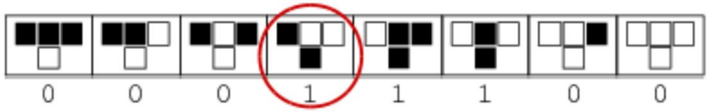
Slika 3: Rezultat primjene Pravila 28 na konfiguraciju „bijela–crna–bijela".

To znači da će prva ćelija u drugom retku rešetke biti crna (vidjeti sliku 4).



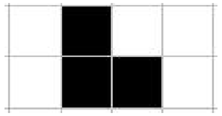
Slika 4: Prva ćelija drugoga retka rešetke elementarnih staničnih automata.

Pomaknimo se za točno jedno mjesto udesno od crne ćelije u prvom retku rešetke. Sada je osnovna stanica bijela ćelija. Njezin lijevi susjed je crna, a desni bijela ćelija, pa imamo konfiguraciju „crna–bijela–bijela". Primjena Pravila 28 na tu konfiguraciju kao rezultat daje crnu ćeliju (vidjeti sliku 5).



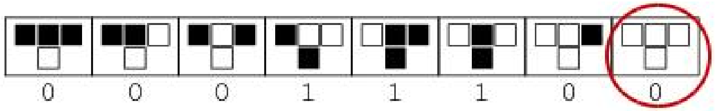
Slika 5: Primjena Pravila 28 na konfiguraciju „crna–bijela–bijela".

Zbog toga će druga ćelija u drugomu retku rešetke također biti crna (vidjeti sliku 6).



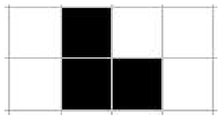
Slika 6: Prikaz druge ćelije drugoga retka rešetke elementarnih staničnih automata.

Pomaknimo se za još jedno mjesto udesno. Osnovna stanica je bijela ćelija čiji su i lijevi i desni susjed također bijele ćelije. Stoga imamo konfiguraciju „bijela–bijela–bijela". Primjena Pravila 28 na ovu konfiguraciju kao rezultat daje bijelu ćeliju (vidjeti sliku 7).



Slika 7: Primjena Pravila 28 na konfiguraciju „bijela–bijela–bijela".

Stoga će treća ćelija u drugom retku rešetke biti bijela (vidjeti sliku 8).

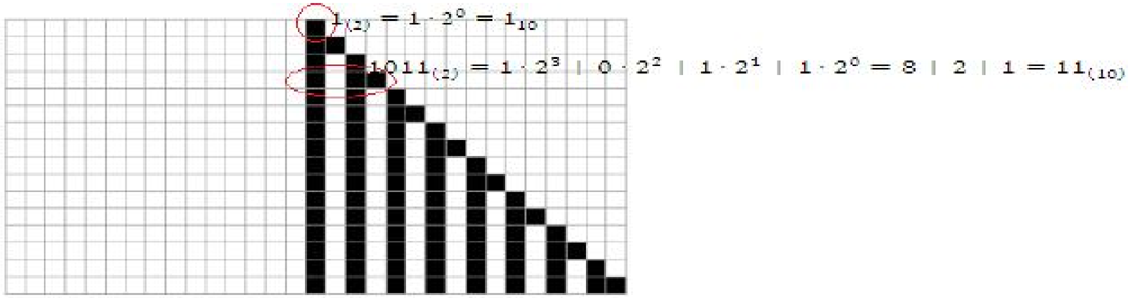


Slika 8: Treća ćelija drugog retka rešetke elementarnih staničnih automata.

Daljnjim pomicanjem udesno u prvom retku rešetke opet dolazimo na bijelu ćeliju kojoj su susjedi bijele ćelije, pa primjenom Pravila 28 kao rezultat opet dobivamo bijelu ćeliju. Tako zaključujemo da će sve ostale ćelije u drugom retku biti bijele i ne moramo ih dalje promatrati. U svakom retku rešetke uočimo blok ćelija koji počinje i završava crnom ćelijom, te takav da su lijevo i desno od toga bloka isključivo bijele ćelije. Takav blok sigurno postoji jer se u svakom retku rešetke nalazi barem jedna crna ćelija (dobivena primjenom Pravila 28 ili na konfiguraciju „bijela–crna–bijela" ili „bijela–crna–crna"). Svakoj crnoj ćeliji uočenoga bloka pridružimo broj 1, a svakoj bijeloj broj 0. Na taj način svakom bloku bijektivno pridružujemo binarni broj koji počinje i završava znamenkom 1. Zapišemo li te binarne brojeve u dekadskom zapisu, dobivamo redom:

$$\left.\begin{array}{c}(1)_2 = (1)_{10}\\ (11)_2 = (3)_{10}\\ (101)_2 = (5)_{10}\\ (1011)_2 = (11)_{10}\\ (10101)_2 = (21)_{10}\\ \ldots\end{array}\right|$$

Dobiveni brojevi tvore niz $1, 3, 5, 11, 21, \ldots$ Iz ispisa prvih nekoliko članova Jacobsthalova niza naslućujemo da je dobiveni niz zapravo podniz Jacobsthalova niza. Pokazat ćemo da je ova slutnja točna, tj. da rešetka elementarnih staničnih automata dobivena primjenom Pravila 28 na gore opisani način zapravo generira podniz Jacobsthalova niza.



Slika 9: Generiranje Jacobsthalova niza pomoću elementarnih staničnih automata.

Pogledajmo najprije koje se sve konfiguracije mogu pojaviti unutar jednoga bloka. Pokažimo da se ni u jednom bloku ne mogu pojaviti „jednobojne" konfiguracije, tj. konfiguracije „bijela–bijela–bijela" i „crna–crna–crna", kao ni konfiguracije „bijela–bijela–crna" i „crna–bijela–bijela". Najprije dokažimo da se ni u jednom bloku ne može pojaviti konfiguracija „crna–crna–crna". Radi jednostavnosti, označimo tu konfiguraciju s C.

Pretpostavimo suprotno, tj. neka je n prvi redak u kojemu se pojavljuje C. Pogledajmo kako iz ćelija u $(n-1)$-vom retku rešetke može nastati C. Prema Pravilu 28 postoje tri mogućnosti.

Prva crna ćelija u C ne može nastati iz konfiguracije „crna–bijela–bijela". Primjena Pravila 28 na konfiguraciju „bijela–bijela–bijela", odnosno „bijela–bijela–crna" kao rezultat daje bijelu, a ne crnu ćeliju. Zbog toga druga ćelija u C mora biti bijela, što je suprotno pretpostavci da C sadrži blok od tri crne ćelije.

Prva crna ćelija u C ne može nastati ni iz konfiguracije „bijela–crna–crna". Primjena Pravila 28 na konfiguraciju „crna–crna–bijela" kao rezultat daje bijelu ćeliju. Stoga je drugu crnu ćeliju u C moguće dobiti isključivo primjenom Pravila 28 na konfiguraciju „crna–crna–crna". To bi značilo da se C pojavljuje i u $(n-1)$-vom retku, što je suprotno pretpostavci da je n prvi redak u kojemu se pojavljuje C.

Prva crna ćelija u C ne može nastati ni iz konfiguracije „bijela–crna–bijela". Drugu crnu ćeliju u C tada bismo mogli dobiti isključivo iz konfiguracije „crna–bijela–bijela", pa kao u prvoj mogućnosti zaključujemo da iz konfiguracije koja počinje dvjema bijelim ćelijama ni u kojem slučaju ne možemo dobiti treću crnu ćeliju u C.

Tako smo pokazali da se unutar jednoga bloka ne može pojaviti konfiguracija C. Potpuno analogno se pokazuje da se unutar jednoga bloka ne mogu pojaviti preostale tri spomenute konfiguracije. Detalje prepuštamo čitatelju.

Označimo s B_n prirodan broj čiji binarni zapis korespondira bloku u n-tom retku tablice elementarnih staničnih automata. Ne istaknemo li drugačije, pretpostavljamo da je n bilo koji prirodan broj. Pretpostavljamo i da je B_n zapisan u binarnom, a ne u dekadskom zapisu. Uočimo da je broj B_n neparan jer njegov binarni zapis završava znamenkom 1. (Dokaz tvrdnje da je prirodan broj neparan ako i samo ako njegov binarni zapis završava znamenkom 1 prepuštamo čitatelju.)

Primjedba 1. Broj B_{n+1} ima točno jednu binarnu znamenku više od broja B_n. Preciznije, za neparne $n \in \mathbb{N}$ broj B_{n+1} dobiva se tako da se broju B_n zdesna dopiše 1, dok se za parne $n \in \mathbb{N}$ broj B_{n+1} dobiva tako da se između posljednje dvije jedinice (gledajući slijeva nadesno) u zapisu broja B_n umetne nula. Te su činjenice također izravne posljedice Pravila 28, odnosno jednakosti $f(1,0,0) = 1$ i $f(1,1,0) = 0$. Njihovu provjeru prepuštamo čitatelju.

Budući da je $B_1 = 1$, iz Primjedbe 1 izravno slijedi da broj B_n u svojem zapisu ima točno n binarnih znamenaka.

Izračunajmo zbroj $Z_n := B_n +_2 B_{n+1}$. (S $+_2$ označeno je binarno zbrajanje.) Broj Z_n je zbroj dvaju strogo pozitivnih prirodnih brojeva od kojih prvi ima n, a drugi $n+1$ znamenaka, pa Z_n ima ili $n+1$ ili $n+2$ znamenaka. Tvrdimo da je Z_n ima točno $n+2$ znamenaka i da je jedino vodeća znamenka broja Z_n jednaka 1.

Brojevi B_n i B_{n+1} imaju posljednju znamenku jednaku 1. Stoga je posljednja znamenka broja Z_n jednaka $1 +_2 1 = 0$. Navedenim zbrajanjem „nastaje" jedinica koja se prenosi u zbroj znamenaka na pretposljednjim mjestima brojeva B_n i B_{n+1}.

Prema konstrukciji brojeva B_n navedenoj u Primjedbi 1, točno jedan od brojeva B_n i B_{n+1} ima pretposljednju znamenku 1, a drugi pretposljednju znamenku 0. Točnije, ako je n paran broj, onda je pretposljednja znamenka broja B_n jednaka 1 (jer smo broju B_{n-1} zdesna nadopisali 1), a pretposljednja znamenka broja B_{n+1} jednaka je 0 (jer smo između posljednje dvije znamenke broja B_n umetnuli nulu). Ako je n neparan broj, onda B_n ima pretposljednju znamenku 0, a B_{n+1} pretposljednju znamenku 1. U svakom je slučaju, dakle, pretposljednja znamenka broja Z_n jednaka $1 +_2 1 = 0$. I na ovom mjestu opet „nastaje" jedinica koja se prenosi u zbroj znamenaka na neposredno sljedećoj poziciji.

Neka je i prva pozicija (gledajući zdesna nalijevo) na kojoj broj Z_n ima znamenku 1. Pretpostavimo da je $i \leq n$. (Iz gornjih razmatranja slijedi $i \geq 3$.) Na i-toj poziciji broja Z_n dobit ćemo znamenku 1 ako i samo ako brojevi B_n i B_{n+1} na i-toj poziciji imaju jednake znamenke. Naime, $(i-1)$-va znamenka broja Z_n jednaka je nuli, pa se i-ta znamenka broja Z_n dobiva zbrajanjem i-te znamenke broja B_n, i-te znamenke broja B_{n+1} i jedinice „nastale" zbrajanjem kojim je dobivena nula na $(i-1)$-voj poziciji. Ako bi brojevi B_n i B_{n+1} na i-toj poziciji imali različite znamenke, onda bi i-ta znamenka broja Z_n bila jednaka nuli, što je suprotno pretpostavci da je i prva pozicija na kojoj broj Z_n ima znamenku 1.

Uzmimo najprije da brojevi B_n i B_{n+1} na i-toj poziciji imaju nule. To znači da je bijela ćelija koja odgovara nuli na i-toj poziciji broja B_{n+1} dobivena primjenom Pravila 28 na konfiguraciju koja započinje bijelom ćelijom (koja odgovara nuli na i-toj poziciji broja B_n). Jedine dvije konfiguracije koje dolaze u obzir su „bijela–bijela–bijela" i „bijela–bijela–crna". Ranije smo pokazali da se te konfiguracije ne mogu pojaviti unutar jednoga bloka rešetke. Stoga na i-toj poziciji u brojevima B_n i B_{n+1} ne mogu biti nule.

Uzmimo sada da brojevi B_n i B_{n+1} na i-toj poziciji imaju jedinice. To znači da je crna ćelija koja odgovara jedinici na i-toj poziciji broja B_{n+1} dobivena primjenom Pravila 28 na konfiguraciju koja započinje crnom ćelijom (koja odgovara jedinici na i-toj poziciji broja B_n). Jedina konfiguracija koja dolazi u obzir je „crna–bijela–bijela". Ranije smo pokazali da se ta konfiguracija ne može pojaviti unutar jednoga bloka rešetke. Stoga na i-toj poziciji u brojevima B_n i B_{n+1} ne mogu biti jedinice.

Time smo iscrpili sve moguće slučajeve, pa zaključujemo da je pretpostavka $i \leq n$ bila pogrešna. Dakle, $i \geq n+1$. Gledajući zdesna nalijevo, znamenka na $(n+1)$-vom mjestu broja B_n jednaka je 0 (jer B_n ima točno n znamenaka), dok je znamenka na $(n+1)$-vom mjestu broja B_{n+1} jednaka 1 (to je vodeća znamenka broja B_{n+1}). Stoga je $(n+1)$-va znamenka broja Z_n jednaka $0 +_2 1 +_2 1 = 0$. (Posljednja jedinica u ovom zbroju „nastaje" zbrajanjem kojim je dobivena nula na n-toj poziciji broja Z_n.) Odatle slijedi da broj Z_n ima točno $n+2$ znamenaka, te da vrijedi jednakost:

$$Z_n = (1\underbrace{00\ldots0}_{n+1 \text{ nula}})_2 = 1 \cdot 2^{n+1} + 0 \cdot 2^n + \cdots + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 2^{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tako smo pokazali da niz brojeva $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zadovoljava sljedeće jednakosti:

$$\begin{cases} B_1 = 1, \\ B_n + B_{n+1} = 2^{n+1}, \quad \text{za svaki } n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{17}$$

Iz (1), (3) i (17) proizlazi da je niz $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zapravo podniz Jacobsthalova niza čiji je prvi član J_2. Preciznije, zaključujemo da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi jednakost:

$$B_n = J_{n+1}. \tag{18}$$

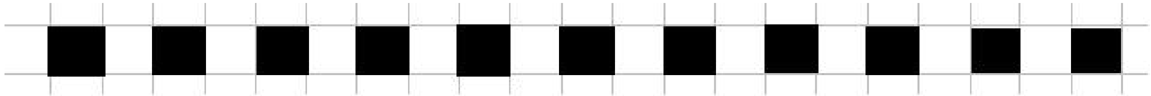
Iz (4) i (18) odmah slijedi zatvorena formula za opći član niza $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$B_n = \frac{2^{n+1} - (-1)^{n+1}}{3}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Odaberemo li npr. $n = 21$ i uvrstimo tu vrijednost u (19), dobit ćemo

$$B_{21} = \frac{2^{22} - 1}{3} = 1398101 = (101010101010101010101)_2.$$

Stoga će 21. redak rešetke elementarnih staničnih automata izgledati kao na slici 10.



Slika 10: Dvadesetprvi redak rešetke elementarnih staničnih automata.

Zaključno napomenimo sljedeće. Budući da nam konfiguracija „crna–crna–crna" nije bitna u postupku „izgradnje" rešetke elementarnih staničnih automata, toj konfiguraciji umjesto broja 0 (kao u Pravilu 28) možemo pridružiti broj 1, a da se postupak „izgradnje" rešetke elementarnih staničnih automata time nimalo ne promijeni. To pridruživanje zapravo znači da broj $(00011100)_2 = (28)_{10}$ zamjenjujemo brojem $(10011100)_2 = (156)_{10}$, odnosno umjesto Pravila 28 primjenjujemo Pravilo 156. Tako smo dokazali sljedeću tvrdnju.

Propozicija 10. *Pravila 28 i Pravilo 156 generiraju istu rešetku elementarnih staničnih automata, odnosno isti podniz Jacobsthalova niza.*

Čitatelja zainteresiranoga za daljnja svojstva i primjene Jacobsthalova niza upućujemo na literaturu navedenu u donjem popisu.

Bibliografija

[1]

Eric W. Weisstein: *Jacobsthal Number*, javno dostupno na
http://mathworld.wolfram.com/JacobsthalNumber.html (20. 7. 2013.)

[2]

Eric W. Weisstein: *Rule 28*, javno dostupno na
http://mathworld.wolfram.com/Rule28.html (20. 7. 2013.)

[3]

Stephen Wolfram: *New Kind of Science*, Wolfram Media, Champaign (SAD), 2002.

[4]

A. Dujella: *Fibonaccijevi brojevi*, Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb, 2000.

[5]

D. Veljan: *Kombinatorna i diskretna matematika*, Algoritam, Zagreb, 2001.

[6]

http://en.wikipedia.org/wiki/Jacobsthal_number (20. 7. 2013.)

[7]

F. Koken, D. Bozkurt: *On the Jacobsthal numbers by matrix methods*, International Journal of Contemporary Mathematical Sicences 3(13) (2008.), 605-614.

[8]

H. W. Gould: *A history of the Fibonacci* Q-matrix and a higher-dimensional problem}, javno dostupno na www.fq.math.ca/Scanned/19-3/gould.pdf (10. 9. 2013.)

---

[1]Naziv ,,Q-matrica" prvi je upotrijebio Charles H. King koji ju je detaljno proučavao u svom magistarskom radu ,,Some properties of Fibonacci numbers", objavljenom 1960. godine na San Jose State College. Za detalje o Q-matrici vidjeti u [8].

[2]Poznata tvrdnja da je determinanta umnoška dviju kvadratnih matrica jednaka umnošku determinanti tih matrica, odnosno $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$ za sve $A, B \in M_n$, $n \in \mathbb{N}$.

ISSN 1334-6083