math.e

Hrvatski matematički elektronički časopis

Matrice s Fibonaccijevim brojevima

Fibonaccievi brojevi linearna algebra teorija brojeva

Blaženka Bakula,
Magistra edukacije matematike, zaposlena u Srednjoj školi A.B.Šimića, Grude, BiH, blaza.bakula@gmail.com

Zrinka Franušić
Docentica na PMF-Matematičkom odsjeku u Zagrebu, fran@math.hr

U prostranstvu cjelobrojnih nizova Fibonaccijev niz ne gubi svoj sjaj već više od osam stoljeća, točnije od kad se pojavio u knjizi Liber Abaci talijanskog matematičara Leonarda Bonaccija[1] poznatog i kao Leonardo Pisano, a najpoznatijeg kao Fibonacci. Bez pretjerivanja, riječ je o jednom od najpoznatijih nizova koji privlači i fascinira kako profesionalce tako i potpune amatere. Nadalje, neprestano iznenađuje sa svojom prisutnošću u očekivanim, ali i potpuno neočekivanim situacijama. O Fibonaccijevim brojevima postoji vrlo velika količina informacija, mnoštvo publikacija, knjiga, te internetskih sadržaja. U ovom radu pokazat ćemo i dokazati neke zanimljive identitete vezane uz Fibonaccijeve brojeve koristeći jednostavnu algebru matrica i determinanti. Između ostalog, pokazujemo i poznati Cassinijev[2] identitet koji se se može povezati s problemom popločavanja. Zbog mlađeg čitateljstva navest ćemo osnovna svojstva Fibonaccijevog niza, te osnovne pojmove iz linearne algebre.

1 Fibonaccijevi brojevi

Fibonaccijev niz je niz brojeva

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots .$$

Niz bi s lakoćom nastavili članom 89 koji je zbroj prethodna dva. Iskažimo njegovu matematičku definiciju.

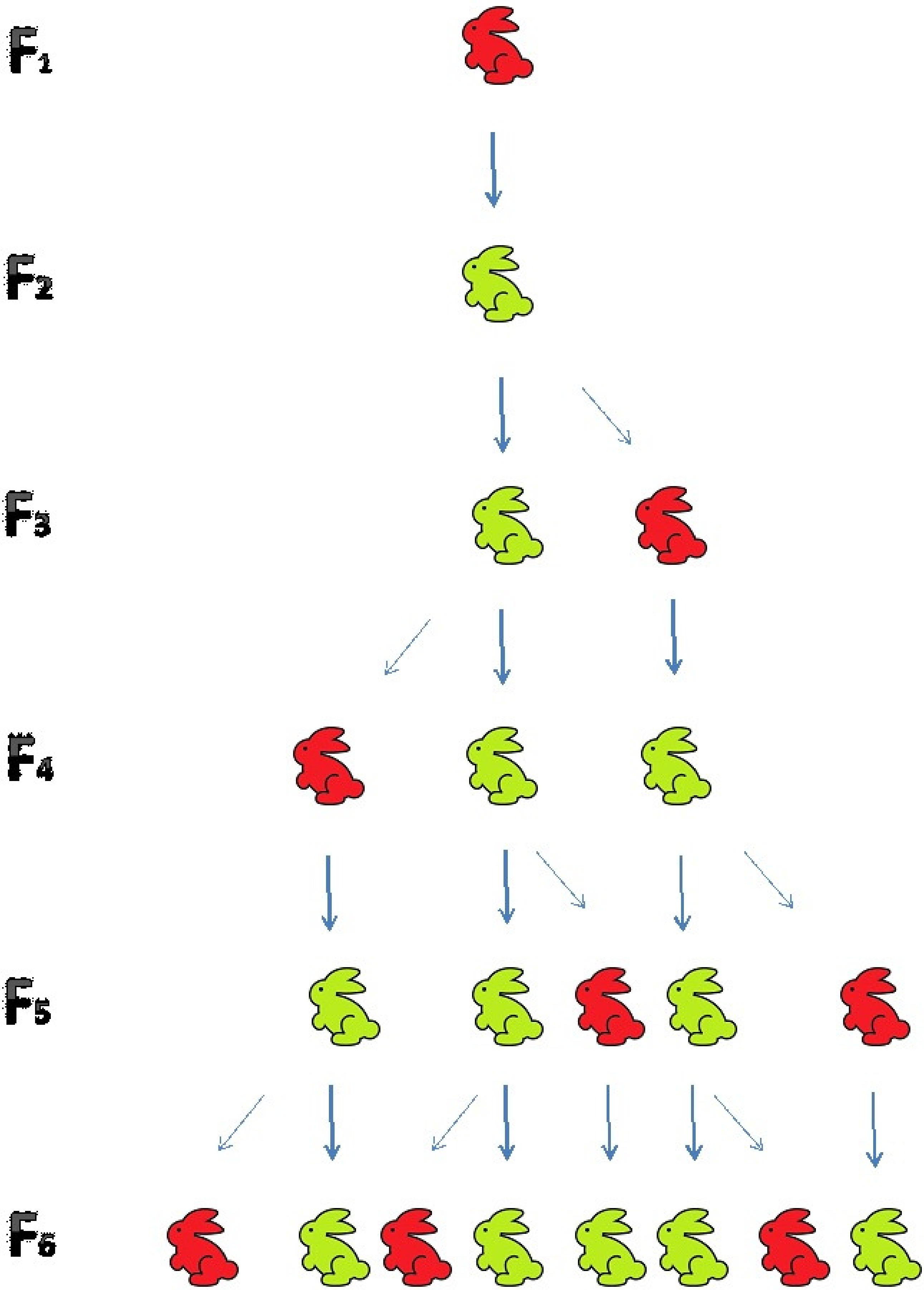
Definicija 1. *Neka je $F_1 = 1$ i $F_2 = 1$. Niz (F_n) definiran rekurzivnom relacijom*

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \qquad (1)$$

za $n \geq 3$ naziva se Fibonaccijev niz. Član niza F_n zove se n-ti Fibonaccijev broj.

Napomenimo da se ponekad za početne vrijednosti niza uzimaju vrijednosti $F_0 = 0$ i $F_1 = 1$.

U već spomenutoj knjizi Liber Abaci taj niz predstavlja rješenje problema o razmnožavanju zečeva. Pretpostavimo da $1.$ siječnja raspolažemo s jednim parom zečeva. Taj par dobiva po jedan par mladih zečeva svakog prvog dana u mjesecu, počevši od $1.$ ožujka. Svaki novi par dobiva po jedan par zečeva svakog prvog dana u mjesecu, ali tek nakon navršena dva mjeseca života. Problem je koliko će parova zečeva biti nakon n mjeseci. Odgovor je upravo n-ti Fibonaccijev broj F_n.



Slika 1: Razmnožavanje zečeva (crveni zeko označava par novorođenih, a zeleni par star bar jedan mjesec)

Eksplicitno, Fibonaccijeve brojeve možemo izračunati pomoću formule

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^n - \beta^n\right),$$

pri čemu su α i β korijeni takozvane zlatne jednadžbe

$$x^2 - x - 1 = 0,$$

to jest

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,,\; \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\,.$$

Konstanta α poznatija je pod nazivom zlatni rez.

Uz Fibonaccijev niz često se veže i Lucasov[3] niz (L_n) koji je definiran istom rekurzijom (1).

Definicija 2. *Neka je* $L_0 = 2$ *i* $L_1 = 1$*. Niz* (L_n) *definiran rekurzivnom relacijom*

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, \tag{2}$$

za $n \geq 2$ *naziva se Lucasov niz.*

Predodžbe radi, prvih nekoliko članova Lucasova niza su

$$2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, \ldots.$$

Eksplicitno ih računamo pomoću formule

$$L_n = \alpha^n + \beta^n.$$

Fibonaccijevi i Lucasovi brojevi zadovoljavaju različite algebarske identitete. Budući da su generirani rekurzivnim relacijama (1) i (2), prirodno je takve identitete dokazivati pomoću principa matematičke indukcije. Prisjetimo ga se. Ako je neka tvrdnja točna za broj 1 i ako iz pretpostavke da tvrdnja vrijedi za prirodni broj n slijedi da je ispravna i za sljedeći broj $n+1$, tada ona vrijedi za svaki prirodni broj n.

Kao primjer navodimo osnovnu relaciju koja povezuje Fibonaccijeve i Lucasove brojevi, to jest

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1}, \tag{3}$$

za $n \geq 1$. Jednakost pokazujemo pomoću principa matematičke indukcije. Za $n = 1$ jednakost vrijedi jer je

$$F_0 + F_2 = 1 = L_1.$$

Pretpostavimo sada da jednakost vrijedi za $n = k$, odnosno $L_k = F_{k-1} + F_{k+1}$. Za $n = k+1$ imamo

$$F_k + F_{k+2} = F_{k-1} + F_{k-2} + F_{k+1} + F_k = (F_{k-1} + F_{k+1} + (F_{k-2} + F_k) = L_k + L_{k-1} = L_{k+1},$$

što je i trebalo pokazati.
U onom što slijedi pokazat ćemo kako možemo dokazati i izvesti još identiteta s Fibonaccijevim i Lucasovim brojevima koristeći elementarna svojstva matrica.

2 Matrice i determinante reda 2

Matrica reda 2 je kvadratna shema koja se sastoji od 4 elementa posložena u 2 retka i 2 stupca. Simbolički ju zapisujemo kao

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Elementi matrice a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} su najčešće realni brojevi, pa takvu matricu nazivamo realnom. Elementi matrice su indeksirani tako da nas upućuju na kojoj se poziciji u matrici nalaze. Tako se element a_{21} nalazi na presjeku drugog retka i prvog stupce. Na skupu svih matrica reda 2 jednostavno uvodimo dvije operacije, zbrajanje matrica i množenje matrica skalarom (realnim brojem). Te se operacije izvršavaju prirodno, 'po elementima'. Dakle,

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix},$$

$$\alpha \cdot A = \alpha \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{pmatrix}.$$

Na primjer,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$3 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Množenje matrica ne ćemo definirati po analogiji i to je prilično neočekivano. Umnožak ili produkt dviju matrica definiramo na sljedeći način

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Na primjer,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -5 \\ -20 & -13 \end{pmatrix}.$$

Zbog ovakve 'neobične' definicije i množenje matrica imat će neka 'neobična' svojstva. Na primjer, općenito ne će vrijediti svojstvo komutativnosti.

Uz matricu reda 2 često vežemo i pojam determinante. To je broj koji pridružujemo matrici, a definiramo ga kao

$$\det A = |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Zahvaljući 'neobično' definiranom množenju matrica vrijedit će sljedeće važno svojstvo, u matematici poznatije kao Binet-Cauchyjev teorem,

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|.$$

Provjerimo to na gornjem primjeru,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2, \quad \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -2, \quad \begin{vmatrix} -8 & -5 \\ -20 & -13 \end{vmatrix} = 4.$$

3 Identiteti s Fibonaccijevim i Lucasovim

brojevima

Matricu Q definirat ćemo kao

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Primijetimo da je determinanta matrice Q jednaka $|Q| = -1$. Nadalje, vrijedi

$$\begin{aligned} Q^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \\ Q^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \\ Q^4 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Uočimo da se u matricama Q^2, Q^3, Q^4 pojavljuju Fibonaccijevi brojevi. Nije teško pretpostaviti kako će izgledati matrica Q^n.

Teorem 3. *Neka je $n \geq 1$. Tada*

$$Q^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Dokaz 4. *Neka je $n = 1$.*

$$Q^1 = \begin{pmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = Q.$$

Pretpostavimo da (4) vrijedi za $n = k \geq 1$. Želimo pokazati da (4) vrijedi za $n = k + 1$. Zaista,

$$Q^{k+1} = Q^k Q^1 = \begin{pmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{k+1} + F_k & F_{k+1} \\ F_k + F_{k-1} & F_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{k+2} & F_{k+1} \\ F_{k+1} & F_k \end{pmatrix}.$$

Prema principu matematičke indukcije slijedi da formula (4) vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Pomoću Teorema 3 dokazujemo poznatu Cassinijevu formulu za Fibonaccijeve brojeve.

Korolar 5. *[Cassinijeva formula] Neka je $n \geq 1$. Tada je*

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n. \tag{5}$$

Dokaz 6. *Budući da je $|Q| = -1$, prema Binet-Cauchyjevom teoremu slijedi da je $|Q^n| = (-1)^n$. Iz Teorema 3 slijedi da je $|Q^n| = F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2$, pa je*

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n.$$

Kombinatorni dokaz i interpretaciju jednakosti (5) dat ćemo u sljedećem poglavlju. Nadalje, kao posljedicu Teorema 3 imamo i sljedeće četiri jednakosti:

Korolar 7. *Vrijedi*

$$\begin{aligned} F_{m+n+1} &= F_{m+1}F_{n+1} + F_mF_n, \\ F_{m+n} &= F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1}, \\ F_{m+n} &= F_mF_{n+1} + F_{m-1}F_n, \\ F_{m+n-1} &= F_mF_n + F_{m-1}F_{n-1} \end{aligned} \tag{6}$$

za sve $m, n \geq 1$.

Dokaz 8. *Budući da je* $Q^mQ^n = Q^{m+n}$, *imamo*

$$\begin{pmatrix} F_{m+1} & F_m \\ F_m & F_{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{m+n+1} & F_{m+n} \\ F_{m+n} & F_{m+n-1} \end{pmatrix}.$$

Množenjem matrica dobivamo

$$\begin{pmatrix} F_{m+1}F_{n+1} + F_mF_n & F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1} \\ F_mF_{n+1} + F_{m-1}F_n & F_mF_n + F_{m-1}F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{m+n+1} & F_{m+n} \\ F_{m+n} & F_{m+n-1} \end{pmatrix}$$

odkuda slijede tražene jednakosti.

Neka je $m = n$. Tada jednakost (6) daje formulu za računanje Fibonaccijevih brojeva s neparnim indeksom

$$F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1},$$

a jednakost (6) formulu za računanje Fibonaccijevih brojeva s parnim indeksom

$$F_{2n} = F_{n+1}F_n + F_nF_{n-1} = F_n(F_{n+1} + F_{n-1}),$$

odnosno

$$F_{2n} = F_nL_n.$$

Korolar 9. *Vrijedi*

$$F_{m+1}L_n + F_mL_{n-1} = L_{m+n}$$

za $m \geq 0$, $n \geq 1$. *\end {cor}*

Dokaz 10. *Zbrajanjem jednakosti (6) i jednakosti* $F_{m+n-1} = F_{m+1}F_{n-1} + F_mF_{n-2}$ *koju smo dobili zamjenom* n *s* $n-1$ *u (6), dobivamo*

$$F_{m+1}(F_{n+1} + F_{n-1}) + F_m(F_n + F_{n-2}) = F_{m+n+1} + F_{m+n-1}.$$

Primjenom jednakosti (3) slijedi

$$F_{m+1}L_n + F_mL_{n-1} = L_{m+m},$$

što je i trebalo dokazati.

Evo još jedne jednakosti koji povezuje Fibonaccijeve i Lucasove brojeve.

Korolar 11. *Vrijedi*

$$2F_{m+n} = F_m L_n + F_n L_m \tag{7}$$

za $m, n \geq 0$. *\end {cor}*

Dokaz 12. *Zbrajanjem jednakosti (6) i (6) dobivamo*

$$2F_{m+n} = F_m(F_{n-1} + F_{n+1}) + F_n(F_{m+1} + F_{m-1}) = F_m L_n + F_n L_m.$$

Teorem 13. *Vrijedi*

$$Q^n \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Dokaz 14.

$$Q^n \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} + 2F_n & 2F_{n+1} - F_n \\ F_n + 2F_{n-1} & 2F_n - F_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Primjenom jednakosti (3) dobivamo traženu jednakost. Na primjer,

$$F_{n+1} + 2F_n = F_{n+1} + F_n + F_n = F_{n+2} + F_n = L_{n+1}.$$

Korolar 15. *Vrijedi*

$$L_{n-1}L_{n+1} - L_n^2 = 5(-1)^{n+1}. \tag{8}$$

Dokaz 16. *Prema Teoremu 13 i Binet-Cauchyjevom teoremu slijedi*

$$\begin{vmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{vmatrix}.$$

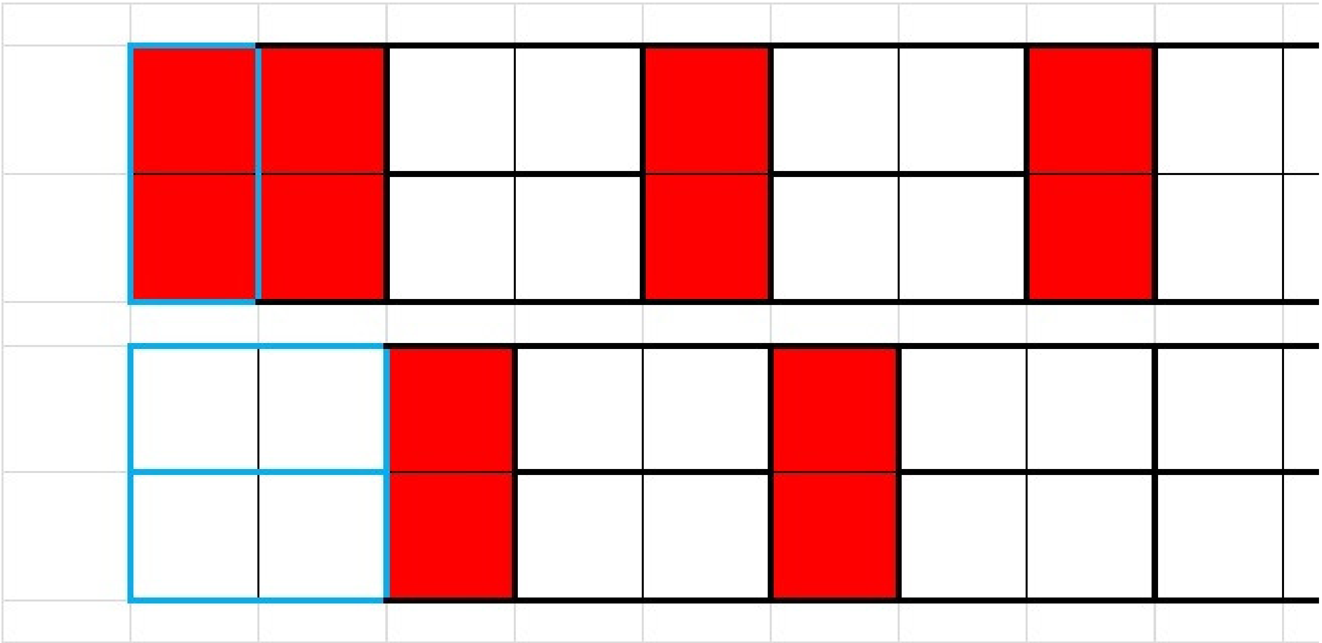
Dakle

$$(F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2)(-5) = L_{n+1}L_{n-1} - L_n^2,$$

pa primjenom Cassinijeve formule (5) dobivamo traženi identitet.

4 Cassinijeva formula i domino

Na kraju dajemo još jednu zanimljivu interpretaciju Fibonaccijevih brojeva pomoću koje se može pokazati Cassinijeva formula (5). Radi se o popločavanju ploče dimenzije $2 \times n$ *pomoću domino pločica dimenzije* 1×2 *koje možemo postaviti vertikalno (crvena pločica) ili horizontalno (bijela pločica). Označimo s* T_n *broj načina na koji se može izvesti.*

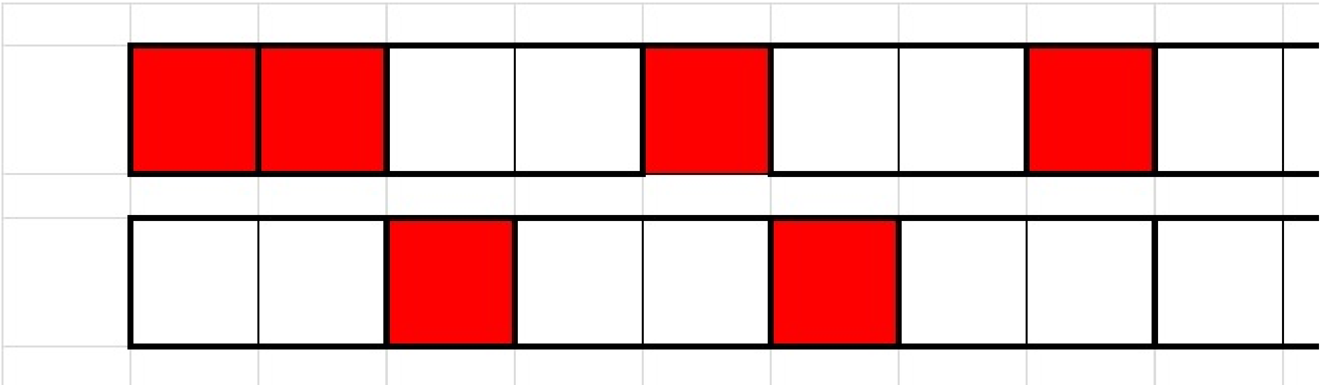


Slika 2: Popločavanje može započeti na točno ova dva načina (uokvireno plavo)

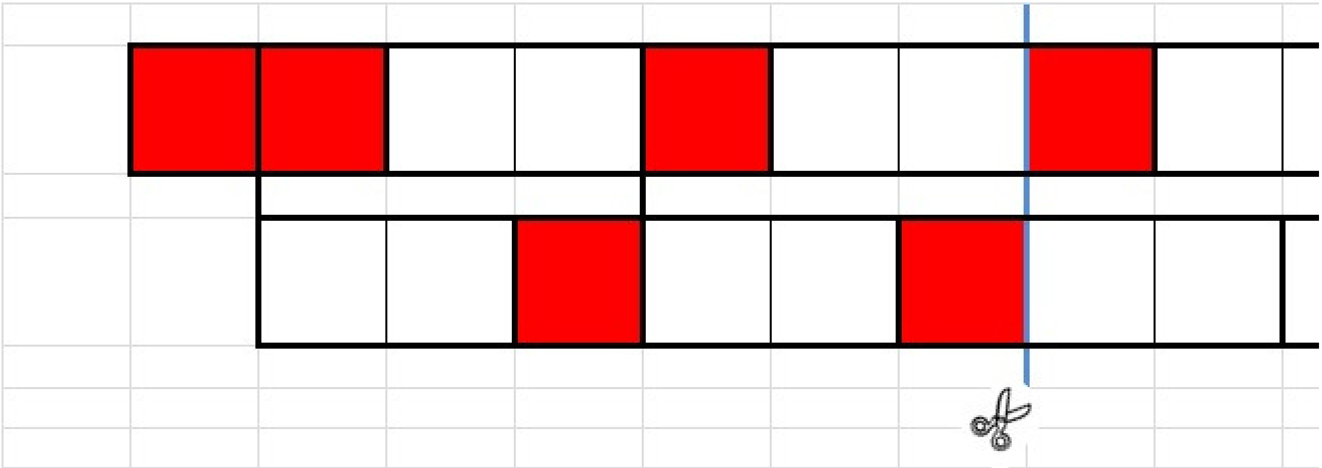
Budući da popločavanje možemo započeti ili s jednom vertikalno postavljenom pločicom ili s dvije horizontalno postavljene (vidi Sliku 2) slijedi da je

$$T_n = T_{n-1} + T_{n-2}.$$

Kako je $T_1 = 1$ *i* $T_2 = 2$*, zaključujemo da je* $T_n = F_{n-1}$ *jer imamo istu rekurziju kao za Fibonaccijeve brojeve, samo su početni (pa onda i svi ostali) članovi niza pomaknuti za jedno mjesto. Sada ćemo proučiti popločavanje dviju ploča istih dimenzija. Broj načina na koji možemo popločati te dvije ploče je* T_n^2*. Zbog jednostavnosti umjesto ploče dimenzije* $2 \times n$ *koju popločavamo pločicama dimenzije* 1×2 *možemo promatrati ploču dimenzije* $1 \times n$ *koju popločavamo pločicama dimenzije* 1×1 *i* 1×2 *(Slika 3). Uočimo da dva popločavanja na Slici 3 upravo odgovaraju dvama popločavanjima na Slici 2.*

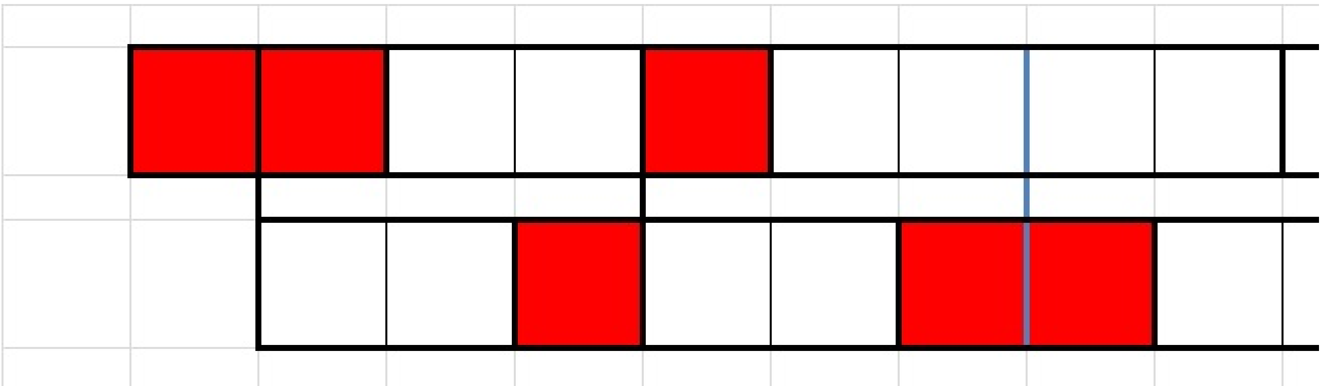


Slika 3: Popločavanje pločicama dimenzije 1×1 *i* 1×2



Slika 4: Pomaknute ploče dimenzije $1 \times n$ s istaknutim crtama loma

Sada donju ploču pomaknimo za jedno mjesto udesno i pogledajmo na koliko mjesta možemo 'prelomiti' i gornju i donju ploču istovremeno, a da pritom ne lomimo domino pločice. Na primjeru sa Slike 4 to se može učiniti na točno 3 mjesta. Reći ćemo da u ovom slučaju imamo 3 crte loma. Posljednju crtu loma označili smo plavom bojom. Sada zamijenimo dijelove ploče ('repove') koje se nalaze s desnih strana plave crte (Slika 5). Na taj način se gornja ploča povećala za točno jedno mjesto, a donja smanjila za jedno. Uočimo da se broj crta loma se nije promijenio. Općenito možemo zaključiti da postoji bijekcija između skupa svih mogućih popločavanja dviju ploča iste dimenzije $1 \times n$ i skupa svih mogućih popločavanja dviju ploča dimenzija $1 \times (n+1)$ i $1 \times (n-1)$ uz pretpostavku da su to popločavanja s barem jednom crtom loma.

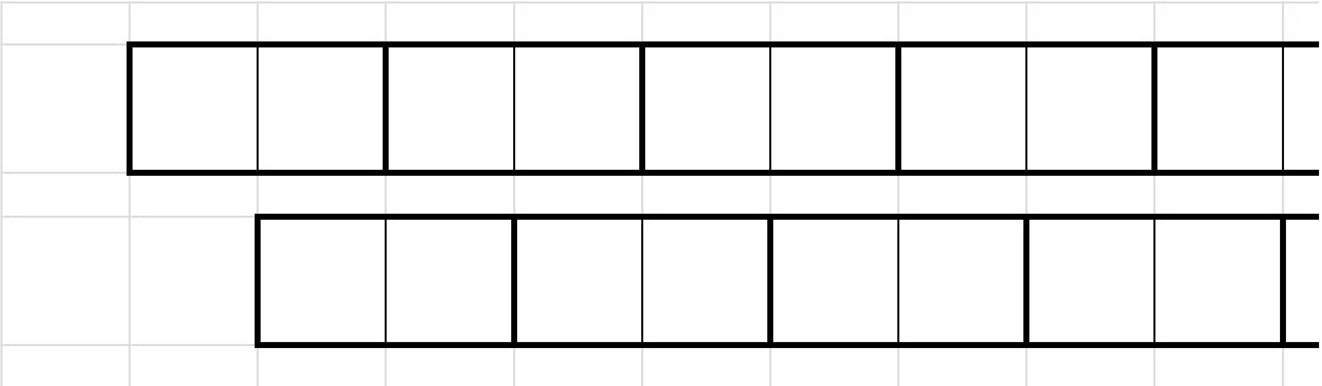


Slika 5: Ploče dimenzije $1 \times (n+1)$ i $1 \times (n-1)$ nastale nakon zamjene 'repova'

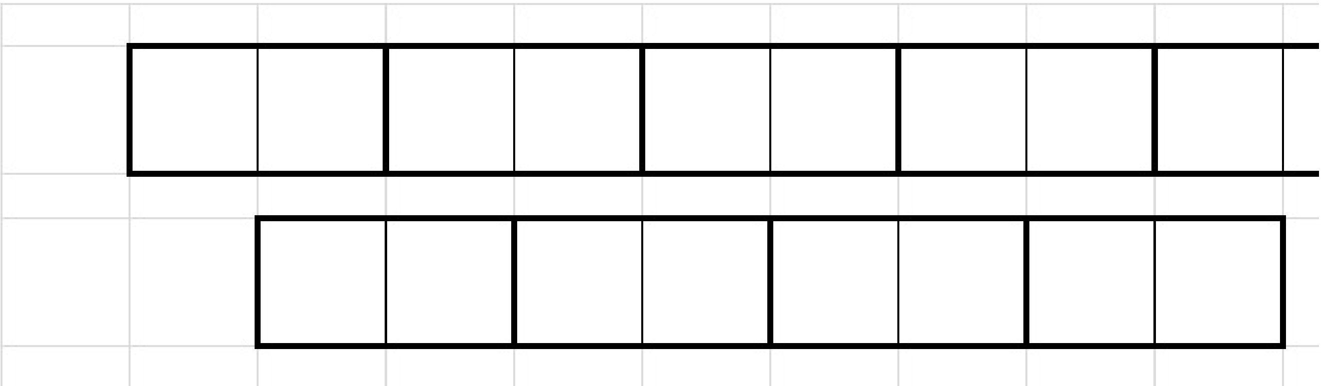
Sada nam preostaje prebrojati načine popločavanja u kojima se ne pojavljuje prijelom. Ukoliko je n paran pojavit će se točno jedno takvo popločavanje dviju ploča iste dimenzije $1 \times n$, dok svako popločavanje dviju ploča dimenzija $1 \times (n+1)$ i $1 \times (n-1)$ uvijek ima crtu loma jer je broj polja na pločama neparan (pa u popločavanje moramo uključiti pločicu dimenzije 1×1). Točno obratno se dešava ako je n neparan (Slika 6, 7). Stoga smo opravdali formulu

$$T_n^2 - T_{n-1} \cdot T_{n+1} = (-1)^n,$$

što uz $T_n = F_{n-1}$ upravo predstavlja Cassinijevu formulu (5).



Slika 6: Popločavanje ploča dimenzije $1 \times n$, n paran, koje nema crte loma



Slika 7: Popločavanje ploča dimenzije $1 \times (n+1)$ i $1 \times (n-1)$, n neparan, koje nema crte loma

Bibliografija

[1]

B. Bakula, Fibonaccijeve matrice i determinante, diplomski rad, PMF - Matemački odsjek, Sveučilište u Zagrebu, 2013.

[2]

A. Dujella, Fibonaccijevi brojevi, HMD, Zagreb, 2000.

[3]

T. Koshy, Fibonacci and Lucas numbers with applications, John Wiley & Sons, 2001.

[4]

Cassini's Identity, dostupno na http://www.cut-the-knot.org/arithmetic/algebra/CassinisIdentity.shtml

[5]

Fibonacci Tilings, dostupno na http://www.cut-the-knot.org/arithmetic/combinatorics/FibonacciTilings.sh…

---

[1]najtalentiraniji europski matematičar srednjeg vijeka (1170.-1250.)

[2]Giovanni Domenico Cassini, talijanski matematičar, astronom, inženjer (1625.-1712.)

[3]François Édouard Anatole Lucas, francuski matematičar (1842.-1891.)

ISSN 1334-6083