RADOVI Zavoda za znanstveni rad Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti	1	153—170		Varaždin 1986.

UDK 51

Izvorni znanstveni rad
Original Scientific Paper

IVAN LONČAR

PRESLIKAVANJA BESKONAČNO DIMENZIONALNIH PROSTORA

MAPPINGS OF THE INFINITE-DIMENSIONAL SPACES

In the present paper the invariability of the A-weak and the A-strong infinite dimensionality under a closed or open continuous mapping are investigated.
The obtained results are applied to the A-weak and A-strong infinite dimensionality of the limit space of an inverse system $X = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, A\}$

Neka je $f : X \to Y$ neprekidno preslikavanje topološkog prostora X na topološki prostor Y. Uz koje dodatne uvjete za preslikavanje f slijedi A-slaba (A-stroga) beskonačna dimenzionalnost prostora X iz A-slabe (A-stroge) beskonačne dimenzionalnosti prostora Y i obratno.

U radu su dani pozitivni odgovori za neke vrste otvorenih i zatvorenih preslikavanja.

Dobiveni rezultati primijenjeni su na ispitivanje A-slabe (A-stroge) beskonačne dimenzionalnosti limesa inverznog sistema.

Promatrani su i inverzni sistemi Cantorovih mnogostrukosti i istraživani uvjeti pod kojima je limes sistema također Cantorova mnogostrukost.

0. UVOD

U Uvodu ćemo utvrditi neke osnovne definicije i oznake koje ćemo koristiti u ostalim odjeljcima rada.

0.1. Neka je X topološki prostor. Kažemo da je zatvoren skup C *p r e g r a d a* među skupovima A i B ako je X—C unija dva disjuktna otvorena skupa U i V sa svojstvom $A \subseteq U$, $B \subseteq V$.

Fakultet organizacije i informatike, 42000 Varaždin.

0.2. Topološki prostor X je A-slabo (S-slabo) beskonačno dimenzionalan ako za svaki beskonačan niz $\{(A_i, B_i) : A_i \wedge B_i = \emptyset, i \in N\}$ zatvorenih podskupova prostora X postoji niz $\{C_i : i \in N\}$ pregrada među A_i i B_i za koje je $\wedge \{C_i : i \in N\} = \emptyset$ (odnosno, postoji takav prirodan broj k za koji je $C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_k = \emptyset$).

Prostor X je A-strogo (S-strogo) beskonačno dimenzionalan [2 : 528] ako nije A-slabo (S-slabo) beskonačno dimenzionalan.

0.3. Neprekidno preslikavanje $f : X \to Y$ je otvoreno (zatvoreno) *preslikavanje ako je slika svakog otvorenog (zatvorenog)* podskupa prostora X otvorena (zatvorena) u prostoru Y.

Iscrpne informacije o prostorima i preslikavanjima mogu se naći u djelima [6] i [17].

0.4. Inverzne sisteme označavati ćemo simbolom $\underline{X} = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, A\}$. Limes inverznog sistema označen je simbolom $\varprojlim \underline{X}$ ili X ako ne postoji mogućnost dvosmislenosti. Za osnovne informacije o inverznim sistemima koje će biti potrebne u radu preporučujemo djelo [6].

0.5 Kardinalan broj skupa A označavamo simbolom $|A|$. Inicijalne redne brojeve označavamo s ω_τ, a pripadne kardinalne brojeve simbolom $\aleph_\tau$. Sa N označavamo skup prirodnih brojeva.

0.6. Simbol A^d je oznaka za skup točaka gomilanja skupa A tj. točaka u čijoj se svakoj okolini nalaze točke skupa A različite od promatrane točke [6 : 43].

0.7. Najmanji ordinalan broj koji je kofinalan u uređenom skupu A označavamo s cf(A).

0.8. Nasljedni Lindelöfov broj hl(X) prostora X je najmanji kardinalan broj m koji je takav da se svaka familija otvorenih skupova prostora X može reducirati na potfamiliju s $\leqslant$ m elemenata koja ima istu uniju kao i polazna familija [6 : 284 i 248].

0.9. Kažemo da je inverzni sistem $\underline{X} = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, A\}$ σ-usmjeren ako za svaki niz $\{\alpha_n : \alpha_n \in A, n \in N\}$ postoji $\alpha \in A$ sa svojstvom $\alpha \geqslant \alpha_n$, $n \in N$.

0.10. Familija $\mathcal{N} = \{A_m : m \in M\}$ je (zatvorena) mreža prostora X ako za svaku točku x prostora X i svaku njezinu okolinu U_x postoji A_m $\mathcal{N}$ sa svojstvom $x \in A_m \subseteq U_x$.

1. OTVORENA PRESLIKAVANJA BESKONAČNO DIMENZIONALNIH PROSTORA

U ovom odjeljku izučavamo ponašanje A-slabe i A-stroge beskonačne dimenzionalnosti pri neprekidnim otvorenim preslikavanjima. Najveći dio rezultata odnosi se na separabilne metričke prostore.

Slijedeće tri leme su ključne u dokazima preostalih rezultata ovog odjeljka.

Lončar I.: Preslikavanja beskonačno dimenzionalnih prostora. Radovi Zavoda za znanstveni rad JAZU, 1, 153—170, Varaždin 1986.

1.1. LEMA. [2 : 534]. Neka je X nasljedno normalan prostor. Ako je X_n, $n \in N$, A-slabo beskonačno dimenzionalan i $X = \cup \{X_n : n \in N\}$, tada je X A-slabo beskonačno dimenzionalan prostor.

1.2. LEMA. [2 : 536]. Neka je X prebrojivo parakompaktan normalan prostor. Ako je $Y = \{X_n : n \in N\}$, gdje su X_n zatvoreni A-slabo beskonačno dimenzionalni potprostori prostora X, tada je Y A-slabo beskonačno dimenzionalan. Specijalno, ako je X A-slabo beskonačno dimenzionalan, tada je svaki F_σ-skup prostora X A-slabo beskonačno dimenzionalan.

1.3. LEMA. [7 : 1. 12. 5. Lemma.]. Neka je $f : X \to Y$ otvoreno preslikavanje metričkog prostora X na metrički prostor Y. Za svaku bazu $\mathcal{B} = \{U_s : s \in S\}$ **prostora X** postoji familija $\{A_s : s \in S\}$ podskupova prostora X za koje je $A_s \subseteq U_s$, $s \in S$, i koji imaju slijedeća svojstva:

a) A_s i $f(A_s)$, $s \in S$, su F^σ-skupovi u prostoru X odnosno Y,

b) $f/A_s : A_s \to f(A_s)$ je homeomorfizam za svaki $s \in S$,

c) $X = (\cup \{A_s : s \in S\}) \cup (\cup \{[f^{-1}(y)]^d : y \in Y\})$.

Neposredna primjena prethodnih lema daje slijedeću lemu koju ćemo tada primjeniti na inverzne sisteme beskonačno dimenzionalnih prostora.

1.4. LEMA. Neka je $f : X \to Y$ takva otvorena surjekcija između separabilnih metričkih prostora za koju svaki skup $\mathrm{Fr} f^{-1}(y)$, $y \in Y$, ima izoliranu točku. Ako je X A-slabo beskonačno dimenzionalan, tada je i Y A-slabo beskonačno dimenzionalan prostor.

D o k a z. Neka je $\{U_i : i \in N\}$ prebrojiva baza prostora X. Iz leme 1.3. i pretpostavke o skupovima $\mathrm{Fr} f^{-1}(y)$ slijedi da je $Y = \cup \{f(A_i) : i \in N\}$. Nadalje, iz Leme 1.2. slijedi da su A_i, $i \in N$, A-slabo beskonačno dimenzionalni. Iz svojstva b) Leme 1.3. slijedi da su $f(A_i)$, $i \in N$, također A-slabo beskonačno dimenzionalni. Primjenom Leme 1.1. završavamo dokaz.

1.5. KOROLAR. Ako je $f : X \to Y$ kao i u prethodnom teoremu, tada iz A-stroge beskonačne dimenzionalnosti prostoraY slijedi A-stroga beskonačna dimenzionalnost prostora X.

Slijedeće dvije leme su priprema za primjenu Leme 1.4. na inverzne sisteme. Leme se lako dokazuju indirektnim dokazom koji izostavljamo.

1.6. LEMA. Neka je $\underline{X} = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, A\}$ inverzni sistem. Ako je $|f_{\alpha\beta}^{-1}(x_\alpha)| \leqslant k$ ($|\mathrm{Fr} f_{\alpha\beta}^{-1}(x_\alpha)| \leqslant k$) za svaki $\alpha \in A$ i svaku točku $x_\alpha \in X_\alpha$, tada je $|f_\alpha^{-1}(x_\alpha)| \leqslant k$ ($|\mathrm{Fr} f_\alpha^{-1}(x_\alpha)| \leqslant k$) za svaku točku $x_\alpha \in X_\alpha$, $\alpha \in A$.

1.7. LEMA. Neka je $\underline{X} = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, A\}$ σ-usmjeren inverzni sistem. Ako su skupovi $f_\beta^{-1}(x_\alpha)$ i $\mathrm{Fr}\, f_{\alpha\beta}^{-1}(x_\alpha)$ konačni za svaki par α, $\beta \in A$ i svaku točku $x_\alpha \in X_\alpha$, tada su konačni i skupovi $f_\alpha^{-1}(x_\alpha)$, $\mathrm{Fr} f_\alpha^{-1}(x_\alpha)$.

1.8. TEOREM. Neka je $\underline{X} = \{X_n, f_{nm}, N\}$ inverzni niz sa otvorenim preslikavanjima f_{nm} za koja je $1 \leqslant |\operatorname{Fr} f_{nm}^{-1}(x_n)| \leqslant k$ za svaki $n, m \in N$ i svaku točku $x_n \in X_n$. Ako su prostori X_n, $n \in N$, A-strogo beskonačno dimenzionalni separabilni metrički prostori, tada je $X = \varprojlim \underline{X}$ A-strogo beskonačno dimenzionalan prostor.

Dokaz. Primijeni Lemu 1.6. i Korolar 1.5.

1.9. KOROLAR. Ako je X isti kao u Teoremu 1.8., tada A-slaba beskonačna dimenzionalnost limesa X ima za posljedicu A-slabu beskonačnu dimenzionalnost prostora X_n, $n \in N$.

1.10. TEOREM. Neka je $\underline{X} = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, A\}$ dobro uređeni inverzni sistem separabilnih metričkih prostora X_α i otvorenih preslikavanja $f_{\alpha\beta}$ za koja vrijedi da je $\operatorname{Fr} f_{\alpha\beta}^{-1}(x_\alpha)$ diskretan potprostor prostora X_β. Ako je $\operatorname{cf}(A) > \omega_1$, tada iz A-stroge beskonačne dimenzionalnosti prostora X_α, slijedi A-stroga beskonačna dimenzionalnost limesa $X = \varprojlim \underline{X}$.

Dokaz. Iz rada [26] slijedi da je $w(X) \leqslant \aleph_0$. Iz Leme 1.11. slijedi da je svaki $\operatorname{Fr} f^{-1}(x_\alpha)$ diskretan potprostor prostora X. Primjenom korolara 1.5. završavamo dokaz.

1.11. LEMA. Neka je $\underline{X} = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, A\}$ dobro uređeni inverzni sistem sa svojstvima $hl(X_\alpha) < \aleph$ i $\operatorname{cf}(A) > \omega_\tau$. Ako je $f_{\alpha\beta}^{-1}(x_\alpha)$ ($\operatorname{Fr} f_{\alpha\beta}^{-1}(x_\alpha)$), $\alpha \in A$, $x_\alpha \in X_\alpha$, diskretan potprostor prostora X_β, tada je $f_\alpha^{-1}(x_\alpha)$ ($\operatorname{Fr} f^{-1}(x_\alpha)$) diskretan potprostor limesa $X = \varprojlim \underline{X}$.

Dokaz. Neka je $x \in f_\alpha^{-1}(x_\alpha)$. Postoji $\beta \geqslant \alpha$ sa svojstvom $x = f_\beta^{-1}(x_\beta)$ za neki $x \in f_{\alpha\beta}^{-1}(x_\alpha)$ [15]. Kako je x_β izolirana točka skupa $f_{\alpha\beta}^{-1}(x_\alpha)$, postoji otvoren skup $U_\beta \ni x_\beta$ sa svojstvom $U_\beta \wedge f_{\alpha\beta}^{-1}(x_\alpha) = \{x_\beta\}$. To znači da je $f_\beta^{-1}(U_\beta) \wedge f_\alpha^{-1}(x_\alpha) = f_\beta^{-1}(x_\beta) = \{x\}$. Dokaz je gotov.

Slijedeći teorem sličan je Teoremu 1.10. a odnosi se na inverzni niz konačno dimenzionalnih prostora.

1.12. TEOREM. Neka je $\underline{X} = \{X_n, f_{nm}, N\}$ inverzni niz separabilnih metričkih prostora X_n i otvorenih surjekcija f_{nm} sa svojstvom $|\operatorname{Fr} f_{nm}^{-1}(x_n)| \leqslant k$. Ako je $\operatorname{ind} X_n = i$, tada je $\operatorname{ind}(\varprojlim \underline{X}) = i$. Dokaz. Iz |7 : 149| slijedi da je $\operatorname{ind} X = \dim X \leqslant i$, $X = \varprojlim \underline{X}$. S druge strane je, zbog Leme 1.6. i |7 : 1. 12. 6. Theorem |, $\dim X \geqslant i$. Dokaz je gotov.

Ako su originali $f^{-1}(y)$ diskretni potprostori prostora X, tada iz Leme 1.3. c) slijedi $X = \bigvee \{A_s : s \in S\}$ i $Y = \bigvee \{f(A_s) : s \in S\}$. Ako su X i Y separabilni metrički prostori, tada možemo pretpostaviti da su A_s i $f(A_s)$ zatvoreni |3 : 194|. Iz Lema 1.1. i 1.2. sada slijedi

1.13. TEOREM. Ako je $f : X \to Y$ takva otvorena surjekcija između separabilnih metričkih prostora da su originali $f^{-1}(y)$ diskretni potprostori prostora X, tada je X A-slabo (A-strogo) beskonačno dimenzionalan onda i samo onda kada je Y A-slabo (A-strogo) beskonačno dimenzionalan.

1.14. TEOREM. Neka je $\underline{X} = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, A\}$ dobro uređeni inverzni sistem separabilnih metričkih prostora X_α i otvorenih surjekcija $f_{\alpha\beta}$ sa svojstvom da je $f_{\alpha\beta}^{-1}(x_\alpha)$ diskretan. Ako je $cf(A) > \omega_1$, tada je $X = \underleftarrow{\lim}\, \underline{X}$ A-slabo (A-strogo) beskonačno dimenzionalan onda i samo onda kada su svi X_α A-slabo (A-strogo) beskonačno dimenzionalni.

D o k a z. X je separabilan metrički prostor jer je $w(X) \leqslant \aleph_0$ [26]. Projekcije $f_\alpha : X \to X_\alpha$, $\alpha \in A$, imaju diskretne originale $f^{-1}(y)$ (1.11. Lema). Primjenom Teorema 1.13. završavamo dokaz.

Za konačno dimenzionalne prostore možemo dokazati ovaj teorem.

1.15. TEOREM. Ako je $\underline{X} = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, A\}$ inverzni sistem separabilnih metričkih prostora X_α i otvorenih preslikavanja s diskretnim originalima $f_{\alpha\beta}^{-1}(x_\alpha)$, tada iz ind $X_\alpha \leqslant n$, $\alpha \in A$, slijedi $\mathrm{ind}(\underleftarrow{\lim}\, \underline{X}) \leqslant n$.

D o k a z. Provodimo ga totalnom indukcijom. A) Ako je $\mathrm{ind}X_\alpha \leqslant 0$, tada je $\mathrm{ind}(\underleftarrow{\lim}\underline{X}) \leqslant 0$ | 6 : 466 |. B) Pretpostavimo sada da je teorem istinit za $\mathrm{ind}X_\alpha \leqslant k$.C) Dokažimo da je teorem istinit za $\mathrm{ind}X_\alpha \leqslant k + 1$. Neka je x točka limesa X koji nije u zatvorenom skupu $F \subseteq X$. Postoji $\alpha \in A$ sa svojstvom $f_\alpha(x) \in \overline{f_\alpha(F)}$. Iz definicije male induktivne dimenzije i $\mathrm{ind}X_\alpha \leqslant k + 1$ slijedi da postoji pregrada L_α među $f_\alpha(x)$ i $\overline{f_\alpha(F)}$. Za svaki $\beta > \alpha$ neka je $L_\beta = f_{\alpha\beta}^{-1}(L_\alpha)$ Iz [7 : 1. 12. 7.] slijedi da je indL $\leqslant$ k. To znači da inverzni sistem $\underline{L} = \{L_\beta, f_{\beta\gamma}/L_\gamma, \alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma\}$ zadovoljava hipotezu indukcije B) tj. da je $\mathrm{ind}(\underleftarrow{\lim}\, \underline{L}) = \mathrm{ind}\, f_\alpha^{-1}(L_\alpha) \leqslant k$. Odatle slijedi da je $\mathrm{ind}(\lim X) \leqslant k + 1$. Dokaz je gotov.

1.16. KOROLAR. Neka je $\underline{X}$ kao i u prethodnom teoremu. Ako je svaki X_α (strogo) prebrojivo dimenzionalan, tada je $X = \lim \underline{X}$ (strogo) prebrojivo dimenzionalan.

Posljednja dva teorema sugeriraju nam slijedeći:

1.17. PROBLEM. Neka je X kao i u teoremu 1.16. i neka je svaki X_α A-slabo (A-strogo) beskonačno dimenzionalan. Dali je i lim X A-slabo (A-strogo) beskonačno dimenzionalan?

Promatranje otvorenih preslikavanja s diskretnim originalima točaka završiti ćemo sa slijedećom.

1.18. LEMA. Neka je $f : X \to Y$ otvorena surjekcija među separabilnim metričkim prostorima. Ako su originali $f^{-1}(y)$ diskretni, tada je $\mathrm{ind}F = \mathrm{ind}f(F)$ za svaki zatvoreni $F \subseteq X$. D o k a z. Iz leme 1.3. slijedi da je $X = \bigvee \{A_i : i \in N\}$ i $Y = \bigvee \{f(A_i) : i \in N\}$. Odatle slijedi da je $F = \bigvee \{F \wedge A_i : \in N\}$ i $f(F) = \bigvee \{f(F \wedge A_i) : i \in N\}$. Skupovi $A_i \wedge F$ i $f(A_i \wedge F)$ su homeomorfni pa imaju jednake male induktivne dimenzije. Primjenom teorema o sumi završavamo dokaz.

1.19. LEMA. Neka su f i F kao u prethodnoj lemi. F je A-slabo (A-strogo) beskonačno dimenzionalan onda i samo onda kada je f(F) A-slabo (A-strogo) beskonačno dimenzionalan. Slično vrijedi za (strogu) prebrojivu dimenzionalnost.

Prelazimo na izučavanje ponašanja beskonačne dimenzionalnosti pri otvorenim preslikavanjima koja imaju konačne originale točaka. Slijedeći teorem dokazao je Polkovski |23|.

1.20. TEOREM. Neka su X i Y normalni prostori a $f : X \to Y$ otvorena surjekcija s konačnim originalima $f^{-1}(y)$. Ako je X A-slabo beskonačno dimenzionalan a Y slabo parakompaktan, tada je Y A-slabo beskonačno dimenzionalan. Ako je X slabo parakompaktan a Y A-slabo beskonačno dimenzionalan, tada je X A-slabo beskonačno dimenzionalan.

1.21. Napomena. Normalan slabo parakompaktan prostor je prebrojivo parakompaktan |6 : 399|. Klasa prebrojivo parakompaktnih prostora je perfektna |6 : 398|.

Mi ćemo najprije dokazati neke teoreme o ponašanju beskonačne dimenzionalnosti pri lokalnim homeomorfizmima, a zatim dobivene rezultate primijeniti na inverzne sisteme. U tu svrhu navedimo neke pripremne rezultate.

1.22. TEOREM. |21 : 178|. Metrički prostor X je A-slabo beskonačno dimenzionalan onda i samo onda kada je $X = K \cup (\cup \{P_n : n \in N\})$, gdje je K A-slabo beskonačno dimenzionalan kompaktan potprostor a P_n otvoreni konačno dimenzionalni potprostori sa svojstvom: Ako je $\{x_i : i \in N\}$, $x_i \in \cup \{P_n : n \in N\}$ niz točaka koji nema gomilišta, tada postoji $k \in N$ takav da je $x_i \in P_n$ za sve $i \geq k$.

1.23. TEOREM. |3 : 3.5. Theorem.|. Neka je $f : X \to Y$ otvorena surjekcija s konačnim originalima $f^{-1}(y)$. Ako je X metrički prostor, tada postoji familija $\{X_i : i \in N\}$ potprostora prostora X sa svojstvima:

1) $X = \cup \{X_i : i \in N\}$;

2) X_i, $i \in N$, je zatvoren u X;

3) $f(X_i)$, $i \in N$, je zatvoren u Y;

4) Restrikcija $f/X_i : X_i \to f(X_i)$, $i \in N$, je zatvoreni lokalni homeomorfizam.

Sada dokazujemo neke teoreme o ponašanju beskonačne dimenzije pri lokalnim homeomorfizmima. Za preslikavanje $f : X \to Y$ označavamo s HL_f skup svih točaka prostora X u kojima je f lokalni homeomorfizam.

1.24. LEMA. Neka je $f : X \to Y$ surjekcija među nasljedno Lindelöfovim prostorima. Ako je HL_f gust u prostoru X, tada je X A-slabo (A-strogo) beskonačno dimenzionalan onda i samo onda kada je Y A-slabo (A-strogo) beskonačno dimenzionalan.

D o k a z. Za svaki $h \in HL_f$ promatrajmo okolinu $U_h \in h$ za koju je $f(U_h)$ otvoren u Y i za koju je $f/U_h : U_h \to f(U_h)$ homeomorfizam. Iz regularnosti prostora X slijedi egzistencija otvorenih skupova V_h i W_h sa svojstvom $h \in W_h \subseteq \overline{W}_h \subseteq V_h \overline{V}_h \subseteq U_h$. Kako je $\cup \{W_h : h \in HL_f\}$ parakompaktan prostor, možemo pokrivač $\{W_h : h \in HL_f\}$ profiniti lokalno konačnim pokrivačem i dokazati da je $X = \cup \{\overline{W}_h : h \in HL_f\}$. To pak znači da je $\{V_h\}$ pokrivač prostora X. Zbog pretpostavke da je X Lindelöfov prostor slijedi da postoji prebrojiva familija koja pokriva X. To znači da je $X = \cup \{\overline{V}_i : \in N\}$ i $f(X) = Y = \cup \{f(\overline{V}_i) : i \in N\}$. Ako je X A-slabo beskonačno dimenzionalan, tada je svaki $\overline{V}_i$ A-slabo beskonačno dimenzionalan (1.2. Lema). Iz Leme 1.1. sada slijedi da je Y A-slabo beskonačno dimenzionalan. Ako pretpostavimo da je Y A-slabo beskonačno dimenzionalan, tada promatramo otvorene skupove V'_h i W'_h sa svojstvom $f(h) \in \overline{W}'_h \subseteq W'_h \subseteq V'_h \subseteq \overline{V}'_h \subseteq f(U_h)$, $h \in HL_f$. Sada je $Y = \in \{\overline{V}'_i : i \in N\}$. Skupovi $\overline{V}_h \wedge f^{-1}(\overline{V}'_i)$ i $f(\overline{V}_h \wedge f^{-1}(\overline{V}'_i))$ su homeomorfni, a skupovi $V'_{i,h} = V_h \wedge f^{-1}(V'_i)$, $i \in N$, pokrivaju X. Kako je svaki $\overline{V}'_i$ A-slabo beskonačno dimenzionalan, to je $\overline{V}_h \wedge f^{-1}(\overline{V}'_i)$ A-slabo beskonačno dimenzionalan. Kako postoji prebrojiva potfamilija tih skupova koji pokrivaju X, to je X A-slabo beskonačno dimenzionalan. Dokaz je gotov.

1.25. LEMA. Iz pretpostavki leme 1.24. slijedi da je zatvoreni $F \leqslant X$ A-slabo beskonačno dimenzionalan onda i samo onda kada je $f(F)$ A-slabo beskonačno dimenzionalan.

D o k a z. Sada je $f(F) = \cup \{f(V_i \wedge F) : i \in N\}$ jer je $F = \cup \{V_i \wedge F : i \in N\}$. Primjenom leme 1.2. završavamo dokaz.

1.26. NAPOMENA. Poznato je [2 : 457] da je HL_f gust u prostoru X ako je $f : X \to Y$ otvoreno preslikavanje sa prebrojivim originalima točaka, a X lokalno kompaktan ili kompletan u smislu Čecha. Iz lema 1.24. i 1.25. sada slijedi

1.27. TEOREM. Neka je $f : X \to Y$ otvorena surjekcija među lokalno kompaktnim ili potpunim u smislu Čecha separabilnim metričkim prostorima. Ako je $f^{-1}(y$, $y \in Y$, najviše prebrojiv, tada je zatvoreni $F \subseteq X$ A-slabo beskonačno dimenzionalan (A-strogo beskonačno dimenzionalan) onda i samo onda kada je $f(F)$ A-slabo (A-strogo) beskonačno dimenzionalan.

Kao primjenu navodimo slijedeća dva teorema.

1.28. TEOREM. Neka je $\underline{X} = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, A\}$ inverzni sistem kompaktnih metričkih prostora X_α i otvorenih surjekcija $f_{\alpha\beta}$ sa svojstvom $|f_{\alpha\beta}^{-1}(x_\alpha)| \leqslant k$. Prostor $X = \lim \underline{X}$ je A-slabo (A-strogo) beskonačno dimenzionalan ako i samo ako su prostori X_α A-slabo (A-strogo) beskonačno dimenzionalni.

D o k a z. Projekcije $f_\alpha : X \to X_\alpha$, $\alpha \in A$, imaju originale točaka potencije $\leqslant k$ (1.6. Lema). Nadalje je X metrizabilan prema teoremu Arhangelskoga. Primjena teorema 1.27. završava dokaz.

1.29. TEOREM. Neka je $\underline{X}$ σ-usmjereni inverzni sistem ($\aleph_1$-usmjereni inverzni sistem) kompaktnih metričkih prostora i otvorenih surjektivnih veznih preslikavanja sa svojstvom $|f_{\alpha\beta}^{-1}(X_\alpha)| < \aleph_0$ $(|f_{\alpha\beta}^{-1}(x_\alpha) \leqslant \aleph_0)$. Prostor $X = \lim \underline{X}$ je A-slabo beskonačno dimenzionalan onda i samo onda kada su prostori X_α A-slabo beskonačno dimenzionalni.

Za σ-usmjerene inverzne sisteme vrijedi doduše jači rezultat o A-slaboj beskonačnoj dimenzionalnosti, ali se tada metrizabilnost ne može dokazati.

1.30. TEOREM. Ako je $\underline{X} = \{X_\alpha\ f_{\alpha\beta}^{\beta}, A\}$ σ-usmjereni inverzni sistem kompaktnih A-slabo beskonačno dimenzionalnih prostora X_α, tada je $X = \lim \underline{X}$ A-slabo beskonačno dimenzionalan prostor.

D o k a z. Neka je $\{A_i, B_i) : i \in N\}$ niz parova disjuktnih zatvorenih podskupova prostora X. Za svaki par (A_i, B_i) postoji $\alpha_i \in A$ sa svojstvom $f_\beta(A_i) \wedge f_\beta(B_i) = \phi$, $\beta \geq \alpha_i$. Iz δ-usmjerenosti sistema $\underline{X}$ slijedi da postoji $\gamma > \alpha_i$, $i \in N$. Kako je X_γ A-slabo beskonačno dimenzionalan, postoji niz $\{C_i : i \in N\}$ pregrada među skupovima $f_\gamma(A_i)$ i $f_\gamma(B_i)$ sa praznim presjekom $\wedge\{C_i : i \in N\}$. Jasno je da su skupovi $f^{-1}(C_i)$ pregrade među skupovima A_i i B_i. Dokaz je gotov.

Inverzni sistem $\underline{X} = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, A\}$ nazivamo faktorizirajući ili f — s i s t e m ako za svaku funkciju $f : \lim X \to [0,1]$ postoji $\alpha \in A$ i funkcija $g_\alpha : X \to [0,1]$ sa svojstvom faktorizacije $f = g_\alpha f_\alpha$ [25].

1.31. TEOREM. Ako je $\underline{X} = \{X_\alpha, f_{\ \beta}, A\}$ σ-usmjereni f-sistem sa normalnim limesom X, tada A-slaba beskonačna dimenzionalnost prostora X_α ima za posljedicu A-slabu beskonačnu dimenzionalnost prostora X.

D o k a z. Za svaka dva disjuktna zatvorena skupa A_i i B_i prostora X postoji, zbog normalnosti, neprekidna realna funkcija $f_i : X \to [0,1]$ sa svojstvom $f_i(A_i) = \{0\}$, $f_i(B_i) = \{1\}$. Neka je $g_{\alpha,i} : X_{\alpha,i} \to [0,1]$ faktorizirajuća funkcija. Skupovi $g_{\alpha,i}^{-1}(0)$ i $g_{\alpha,i}^{-1}(1)$ su disjuktni, zatvoreni i sadrže skupove $f_{\alpha,i}(A_i)$ i $f_{\alpha,i}(B_i)$. To znači da su zatvorenja ovih skupova disjuktna. Preostali dio dokaza je sličan odgovarajućem dijelu dokaza prethodnog teorema.

1.32. LEMA. [25 : 28]. A) Ako je $\underline{X}$ σ-usmjereni sistem s Lindelöfovim limesom, tada je $\underline{X}$ f-sistem.

B) Neka je $\underline{X} = \{X_\alpha, \overline{f}_{\alpha\beta}, A\}$ σ-usmjereni inverzni sistem prostora X_α čiji je Suslinov broj [6 : 86] $c(X_\alpha)$ najviše prebrojiv a preslikavanja $f_{\alpha\beta}$ otvorena, tada je $\underline{X}$ f-sistem.

Iz ove leme i prethodnog teorema sada slijede ovi teoremi.

1.33. TEOREM. Neka je $\underline{X} = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, A\}$ σ-usmjereni inverzni sistem Lindelöfovih prostora X_α i perfektnih preslikavanja $f_{\alpha\beta}$. Ako su prostori X_α, $\alpha \in A$, A-slabo beskonačno dimenzionalni, tada je $X = \lim \underline{X}$ A-slabo beskonačno dimenzionalan.

1.34. TEOREMI. Neka je $\underline{X} = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, A\}$ σ-usmjereni sistem separabilnih metričkih prostora X_α i otvorenih preslikavanja $f_{\alpha\beta}$. Ako su prostori X_α, $\alpha \in A$, A-slabo beskonačno dimenzionalni, tada je $X = \lim \underline{X}$ A-slabo beskonačno dimenzionalan.

Dokažimo sada dva teorema za inverzne sisteme beskonačno dimenzionalnih Cantorovih mnogostrukosti [2 : 550].

1.35. TEOREM. Neka je $\underline{X} = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, A\}$ inverzni sistem beskonačno dimenzionalnih metričkih Cantorovih mnogostrukosti X_α. Ako su preslikavanja f_α otvorena sa svojstvom $|f_{\alpha\beta}^{-1}(x_\alpha)| \leqslant k$, tada je $X = \lim \underline{X}$ beskonačno dimenzionalna Cantorova mnogostrukost.

D o k a z. Neka je F zatvoren A-slabo beskonačno dimenzionalan podskup prostora X koji je po Arhangelskijevom teoremu metrizabilan. Iz teorema 1.27. slijedi da je $f_\alpha(F)$ A-slabo beskonačno dimenzionalan za svaki $\alpha \in A$. Iz pretpostavke da je X_α beskonačno dimenzionalna Cantorova mnogostrukost slijedi da je $X_\alpha \setminus f_\alpha(F)$ povezan. Iz teorema 1.27. opet slijedi da je $f_{\alpha\beta}^{-1} f_\alpha(F)$ A-slabo beskonačno dimenzionalan tj. da je skup $Y_{\alpha\beta} = X_\beta \setminus f_{\alpha\beta}^{-1} f_\alpha(F)$ povezan. Inverzni sistem $Y_\alpha = \{Y_{\alpha\beta}, f_{\beta\gamma}/Y_{\alpha\gamma}, \alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma\}$ ima otvorena i zatvorena vezna preslikavanja pa mu je limes Y'_α povezan. Kako je $X \setminus F = \cup \{Y'_\alpha : \alpha \in A\}$, to je $X \setminus F$ povezan [6 : 6. 1. 10. Corollary]. Dokaz je gotov.

Na sličan način dokazuje se slijedeći teorem.

1.36. TEOREM. Neka je $\underline{X} = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, A\}$ σ-usmjeren ($\aleph_1$-usmjeren) inverzni sistem beskonačno dimenzionalnih metričkih Cantorovih mnogostrukosti X_α. Ako su preslikavanja $f_{\alpha\beta}$ otvorena s konačnim originalima točaka ($|f_{\alpha\beta}^{-1}(x_\alpha)| \leqslant \aleph_0$), tada je $X = \lim \underline{X}$ beskonačno dimenzionalna Cantorova mnogostrukost.

Napomenimo da u slučaju $\aleph_1$-usmjerenosti X ne mora biti metrizabilan prostor iako ostaje Cantorova mnogostrukost što će biti dokazano u drugom odjeljku.

Ako je $f : X \to Y$ lokalni homeomorfizam, tada preinakom dokaza leme 1.24. dobivamo

1.37. LEMA. Ako je $f : X \to Y$ lokalni homeomorfizam među Lindelöfovim prostorima, tada je zatvoreni $F \subseteq X$ A-slabo (A-strogo) beskonačno dimenzionalan onda i samo onda kada je $f(F)$ A-slabo (A-strogo) beskonačno dimenzionalan.

1.38. LEMA. [4 : 357]. Ako je $f : X \to Y$ otvoreno preslikavanje sa svojstvom $|f^{-1}(y)| = k, y \in Y$, a X T_2-prostor, tada je f lokalni homeomorfizam i zatvoreno preslikavanje.

Iz ove dvije leme slijedi lema koju ćemo iskoristiti za inverzni niz Lindelöfovih prostora.

1.39. LEMA. Neka su X i Y Lindelöfovi prostori a $f : X \to Y$ otvoreno preslikavanje sa svojstvom $|f^{-1}(y)| = k$ za svaki $y \in Y$. Prostor X je A-slabo (A-strogo) beskonačno dimenzionalan onda i samo onda kada je Y A-slabo (A-strogo) beskonačno dimenzionalan.

1.40. TEOREM. Neka je $\underline{X} = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, A\}$ inverzni sistem Lindelöfovih prostora X_α i otvorenih preslikavanja. $f_{\alpha\beta}$ sa svojstvom $|f_{\alpha\beta}^{-1}(x_\alpha)| \leqslant k$. Ako za svaku točku x_α prostora X_α postoji $\alpha \geq \beta$ sa svojstvom $|f_\beta^{-1}(x_\alpha)| = k.$, tada je $X = \lim \underline{X}$ A-slabo (A-strogo) beskonačno dimenzionalan onda i samo onda kada je svaki X_α A-slabo (A-strogo) beskonačno dimenzionalan.

D o k a z. Lako je dokazati da je $|f_\alpha^{-1}(x_\alpha)| = k$ za svaku točku x_α i svaki $\alpha \in A$. Iz leme 1.38. slijedi da su f_α zatvoreni lokalni homeomorfizmi. To znači da su projekcije f_α savršena preslikavanja a X Lindelöfov prostor. Lema 1.39. završava dokaz.

Za dobro uređene inverzne sisteme nasljedno Lindelöfovih prostora možemo dokazati slijedeći

1.41. TEOREM. Neka je $X = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, A\}$ dobro uređeni inverzni sistem nasljedno Lindelöfovih prostora X_α i otvorenih preslikavanja $f_{\alpha\beta}$ s najviše prebrojivim originalima točaka. Ako su prostori X_α, $\alpha \in A$, i $X = \lim \underline{X}$ lokalno kompaktni i $cf(A) > \omega_1$, tada je X A-slabo (A-strogo) beskonačno dimenzionalan onda i samo onda kada su X_α takvi prostori.

D o k a z. Projekcije f_α su otvorena preslikavanja s najviše prebrojivim originalima točaka. Primjena Leme 1.7. i 1.26. završava dokaz budući da je X nasljedno Lindelöfov prostor |15 ili 26|.

1.42. NAPOMENA. Ako u teoremu 1.41. izostaviti lokalnu kompaktnost prostora X i X_α te otvorenost preslikavanja, tada je X A-slabo beskonačno dimenzionalan ako su takvi X_α. Naime, dobiveni sistem ima nasljedno Lindelöfov limes |15| pa je f-sistem (Lema 1.3 2.). Možemo dakle na njega primjeniti teorem 1. 31.

Završimo sada ovaj odjeljak s teoremima za otvorena konačno kratna preslikavanja.

1.43. TEOREM. Ako je $f : X \to Y$ otvorena surjekcija među metričkim prostorima sa $|f^{-1}(y)| \leqslant \aleph_0, y \in Y$, tada je X A-slabo beskonačno dimenzionalan onda i samo onda kada je Y A-slabo beskonačno dimenzionalan.

D o k a z. Koristimo teorem 1.22. Neka je X A-slabo beskonačno dimenzionalan i neka je $X = K \cup (\cup \{P_n : n \in N\})$, gdje su P_n otvoreni konačno dimenzionalni potprostori prostora X. Sada je $Y = f(K) \cup (\cup \{f(P_n) : n \in N\})$. Ako je U otvoren konačno dimenzionalan podskup prostora Y, tada je $f^{-1}(U)$ otvoren konačno dimenzionalan podskup prostora X [7 : 288]. To znači da je $f^{-1}(U) \subseteq \bigvee \cup \{P_n : n \in N\}$ tj. $f^{-1}(U) \subseteq P_n$ za neki $n \in N$. Odatle slijedi da je $U \subseteq f(P_n)$ i $f^{-1}(\cup \{f(P_n) : n \in N\}) = \cup \{P_n : n \in N\}$ i $f^{-1}(f(K)) = K$. Iz teorema 1.13. sada slijedi da je f(K) A-slabo beskonačno dimenzionalan. Nije teško dokazati da svaki niz $\{y_i : i \in N\}$ točaka iz Y koji nema gomilišta kofinalno sadržan u nekom $f(P_n)$. Iz teorema 1.22. slijedi da je Y A-slabo beskonačno dimenzionalan. Obratno, ako je

Y A-slabo beskonačno dimenzionalan, tada je $Y = K \cup (\cup \{P_n : n \in N\}$. Kao i prije dokazujemo da je $X = f^{-1}(K) \cup (\cup \{f^{-1}(P_n) : n \in N\})$, gdje je $f^{-1}(K)$ kompaktan pa i A-slabo beskonačno dimenzionalan po teoremu 1.13. Ako je $\{x_i : i \in N\}$ niz točaka prostora X bez gomilišta, tada je $\{f(x_i) : i \in N\}$ niz bez gomilišta zbog kočanosti originala točaka i otvorenosti preslikavanje f. Konačno, iz teorema 1.22. slijedi da je Y A-slabo beskonačno dimenzionalan.

1.44. NAPOMENA. Drugi dokaz prethodnog teorema može se dobiti iz teorema 1.23. uzme li se u obzir da je teorem 1.43. ispravan za lokalne homeomorfizme. Ako su potencije originala točaka ograničene, tada je moguć i drugačiji dokaz koji ćemo sada provesti. Dokažimo prethodno dvije leme.

1.45. LEMA. Neka je $f : X \to Y$ otvoreno preslikavanje sa svojstvom $|f^{-1}(y)| \leqslant k$. Skup $Y' = \{y : |f^{-1}(y)| = k\}$ je otvoren podskup prostora Y.

D o k a z. Neka je $y' \in Y'$ i $f^{-1}(y') = \{x_1, \ldots, x_k\}$. Odaberimo okoline $U_i \ni x_i$, $i = 1, \ldots, k$, tako da bude $U_i \wedge U_j = \emptyset$ za $i \neq j$. Skup $V = \wedge \{f(U_i) : i = 1, \ldots, k\}$ je otvoren i sadrži samo točke čiji originali imaju k točaka tj. $V \subseteq Y'$. Odatle slijedi da je Y' otvoren skup i dokaz je gotov.

Analogno se dokazuje slijedeća lema.

1.46. LEMA. Neka je $f : X \to Y$ otvoreno preslikavanje sa svojstvom $|f^{-1}(y)| \leq \aleph_0$, $y \in Y$. Skup $Y'' = \{y : |f^{-1}(y)| \geq k\}$ je otvoren u prostoru Y.

1.47. NAPOMENA. Sada možemo teorem 1.43. dokazati ovako. Ako je $k = 1$, tada je $f : X \to Y$ homeomorfizam i dokaz je gotov. Neka je teorem 1.43. ispravan za $k = n$. Dokažimo ga za $k = n + 1$. Promatrajmo skup $Y' = \{y : |f^{-1}(y)| = n + 1\}$. Sada je $Y = Y' \cup (X \setminus Y')$. Analogno je $X = f^{-1}(y') \cup f^{-1}(X \setminus Y')$. Skup $X \setminus Y$ je po pretpostavci A-slabo beskonačno dimenzionalan onda i samo onda kada je $f^{-1}(X \setminus Y')$ A-slabo beskonačno dimenzionalan. Ista tvrdnja vrijedi za Y' i $f^{-1}(Y')$. Iz leme 1.1. slijedi da je X A-slabo beskonačno dimenzionalan onda i samo onda kada je Y takav.

Slijedeća primjena leme 1.45. je generalizacija lema 1.24 i 1.37.

1.48. LEMA. Neka je $f : X \to Y$ otvorena surjekcija među nasljedno Lindelöfovim prostorima. Ako je $|f^{-1}(y)| \leq k$ za sve $y \in Y$, tada je X A-slabo beskonačno dimenzionalan onda i samo onda kada je Y A-slabo beskonačno dimenzionalan.

D o k a z. Ponavljanje dokaza iz 1.47. uz primjenu leme 1.37.

2. ZATVORENA PRESLIKAVANJA BESKONAČNO DIMENZIONALNIH PROSTORA

Prvi teorem ovog odjeljka je slijedeći teorem.

2.1. TEOREM. Neka je $f : X \to Y$ zatvorena surjekcija između prebrojivo parakompaktnih prostora prebrojive zatvorene mreže tako da je $|f^{-1}(y)| = k$ za sve $y \in Y$. Potprostor $F \subseteq X$ je A-slabo beskonačno dimenzionalan onda i samo onda kada je $f(F)$ A-slabo beskonačno dimenzionalan.

D o k a z. Neka je $\mathcal{N} = \{N_i : i \in N\}$ prebrojiva zatvorena mreža prostora X. Za svaki $y \in Y$ je $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_k\}$. Iz regularnosti slijedi da postoje otvoreni skupovi $U_i \ni x_i$, $i = 1, \dots, k$. sa svojstvom $\overline{U_i} \wedge \overline{U_j} = \emptyset, i \neq j$. Postoji nadalje $N_i \in \mathcal{N}$ sa svojstvom $x_i \wedge N_i \subseteq U_i$. Skup $Y' = \wedge \{f(N_i) : i = 1, \dots, k\}$ je zatvoren skup prostora Y. K tome iz $y' \in Y'$ slijedi da u svakom $N_i, i = 1, \dots, k$, postoji točka x'_i tako da je $f(x'_i) = y'$. To znači da je restrikcija $f_i : N_i \wedge f^{-1}(Y') \rightarrow Y'$ zatvoreno1-1 preslikavanje tj. homeomorfizam. Na taj se način prostori X i Y raspadaju na prebrojivo mnogo zatvorenih međusobno homeomorfnih podskupova. Isto vrijedi za skupove F i f(F). Primjenom leme 1.2. završavamo dokaz.

2.2. NAPOMENA. Souslinovi prostori kao metričke slike potpunih separabilnih metričkih prostora definirani su u radu [12]. Svaki Souslinov prostor ima prebrojivu zatvorenu mrežu.

2.3. LEMA. Ako u lemi 2.1. pretpostavimo da je $|\mathrm{Fr}f^{-1}(y)| = k$, tada je iz A-slabe beskonačne dimenzionalnosti prostora X slijedi A-slaba beskonačna dimenzionalnost prostora Y.

D o k a z. Na skup $X' = X \setminus (\cup \{\mathrm{Int}f^{-1}(y) : y \in Y\}$ primjeni lemu 2.1.

2.4. TEOREM. Neka je $\underline{X} = \{X_n, f_{nm}, N\}$ niz T_3 prebrojivo parakompaktnih prostora zatvorene prebrojive mreže. Ako su f_{nm} zatvorena preslikavanja sa $|f_{nm}^{-1}(x_n)| \leq k$ i za točku x_n postoji $m > n$ takav da je $|f_{nm}^{-1}(x_n)| = k$, tada je $X = \lim \underline{X}$ A-slabo (A-strogo) beskonačno dimenzionalan onda i samo onda kada su prostori X_n A-slabo (A-strogo) beskonačno dimenzionalni.

D o k a z. Kako je $f^{-1}(x_n)$ k-član skup, to je X prebrojivo parakompaktan [6 : 398] prostor prebrojive zatvorene mreže. Lema 2.1. završava dokaz.

Očito je da su separabilni metrički prostori prebrojivo parakompaktni i prebrojive mreže jer imaju prebrojivu bazu. Za njih vrijedi i ovaj teorem.

2.5. TEOREM. Neka je $\underline{X} = \{X_\alpha \ , f_{\alpha\beta}, A\}$ dobro uređeni inverzni sistem separabilnih metričkih prostora X_α i zatvorenih preslikavanja $f_{\alpha\beta}$ sa svojstvom $|f_{\alpha\beta}^{-1} (x_\alpha)| \leq k$. Ako je $\mathrm{cf}(A) > \omega_1$ i za svaku točku x_α postoji $\beta \geq \alpha$ sa $|f_{\alpha\beta}^{-1} \ (x \ )| = k$, tada je $X = \lim \underline{X}$ A-slabo (A-strogo) beskonačno dimenzionalan onda i samo onda kada su X_α A-slabo (A-strogo) beskonačno dimenzionalni.

D o k a z. X je separabilan metrički prostor jer iz [26] slijedi da ima prebrojivu bazu. Primjenom teorema 2.1. završavamo dokaz.

2.6. TEOREM. Neka je $\underline{X} = \{X_\alpha \ , f_{\alpha\beta} \ , A\}$ inverzni sistem sa svojstvima: a) X_α su lokalno povezani kompaktni metrički prostori, b)

$|f_{\alpha\beta}^{-1}(x_\alpha)| \leq k$ za sve $\alpha, \beta \in A$ i $x_\alpha \in X_\alpha$, c) X je lokalno povezani inverzni sistem [10 : 412]. Tada je $X = \lim X$ A-slabo beskonačno dimenzionalan onda i samo onda kada su prostori X_α A-slabo beskonačno dimenzionalni.

D o k a z. Iz [10] slijedi da je X lokalno povezan. To znači da je $w(X) \leqslant \aleph_0$ tj. da je X metrizabilan [4 : 352]. Preostaje nam da primjenimo [12].

2.7. NAPOMENA. Iz [10] slijedi da uvjet c) možemo zamijeniti uvjetom c') X je σ-usmjeren ili uvjetom c'') $\underline{X}$ je dobro uređeni inverzni sistem.

Iz leme 2.3. možemo dobiti slijedeći teorem.

2.8. TEOREM. Neka je X bilo koji inverzni sistem iz teorema 2.5.-2.6. uz zamjenu uvjeta o $f_{\alpha\beta}^{-1}(x_\alpha)$ s uvjetom: $|\mathrm{Fr}f_\beta^{-1}(x_\alpha)| \leqslant k$ a za svaku točku x_α postoji $\alpha > \beta$ za koji je $|\mathrm{Fr}f_\beta^{-1}(x_\alpha)| = k$. Ako su svi prostori X_α A-strogo beskonačno dimenzionalni tada je $X = \lim X$ A-strogo beskonačno dimenzionalan.

Ako je $f : X \to Y$ zatvoreno preslikavanje sa svojstvom $|f^{-1}(y)| \leq k$, tada promatramo skupove $A_k = \{y : |f^{-1}(y)| \leq k-1$ i $B_k = y : |f^{-1}(y)| = k\}$. Ako X ima prebrojivu bazu β, tada za svaku točku $y \in B_k$ postoje $U_1, \ldots, U_k$ iz baze tako da je $U_i \supseteq x_i$, $f^{-1}(y) = \{x_1, \ldots, x_k\}$ i $\bar{U}_i \wedge \bar{U}_j = \emptyset$, $i \neq j$. Skup $Y' = \wedge\{f(\bar{U}_i) : i = 1, \ldots, k\}$ je zatvoren i $y' \in Y'$ ima za posljedicu $y \in B_k$. Na temelju svega ovoga dobivamo

2.9. TEOREM. Neka je $f : X \to Y$ zatvorena surjekcija sa svojstvom $|f^{-1}(y)| \leq k$ a prostori X i Y separabilni metrički prostori. Prostor X je A-slabo (A-strogo, S-slabo) beskonačno dimenzionalan onda i samo onda kada je Y takav prostor.

D o k a z. Slično kao i u napomeni 1.47. dokaz provodimo totalnom indukcijom uz primjenu teorema 2.1. na B_k dok je za A_k teorem 2.9. istinit po pretpostavci indukcije. Dokaz je gotov.

Ako je $|f^{-1}(y)| \leqslant \aleph_0$, tada je $Y = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n \cup \ldots$ a $X = f^{-1}(B_1) \cup \ldots \cup f^{-1}(B_n) \cup \ldots$. Primjena teorema 2.9. i teorema 21 iz [2 : 534] daje

2.10. TEOREM. Neka je $f : X \to Y$ zatvorena surjekcija između separabilnih metričkih prostora. Ako je $|f^{-1}(y)| \leqslant \aleph_0$, tada je X A-slabo beskonačno dimenzionalan onda i samo onda kada je Y A-slabo beskonačno dimenzionalan.

Dokaz slijedeće leme sličan je dokazu leme 2.3.

2.11. LEMA. Neka je $f : X \to Y$ zatvorena surjekcija između separabilnih metričkih prostora. Ako je $|\mathrm{Fr}f^{-1}(y)| \leqslant \aleph_0$, $y \in Y$, tada iz A-slabe beskonačne dimenzionalnosti prostora X slijedi A-slaba beskonačnost prostora Y. Obrnuto, iz A-stroge beskonačne dimenzionalnosti prostora Y slijedi A-stroga beskonačna dimenzionalnost prostora X.

Na temelju ove leme možemo iz dokaza teorema 2.5. dobiti

2.12. TEOREM. Neka je $\underline{X} = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, A\}$ dobro uređeni inverzni sistem separabilnih metričkih prostora sa svojstvom $cf(A) > \omega_1$. Ako su preslikavanja $f_{\alpha\beta}$ zatvorene surjekcije sa svojstvom $|Frf_{\alpha\beta}^{-1}(x_\alpha)| \leqslant \leqslant \aleph_0$, tada iz A-stroge beskonačne dimenzionalnosti prostora X_α, $\alpha \in A$, slijedi A-stroga beskonačna dimenzionalnost limesa $X = = \lim\underline{X}$.

U preostalom dijelu ovog odjeljka koristiti ćemo slijedeći Skljarenkov teorem citiran u radu [1 : 23].

2.13. TEOREM. Ako je $f : X \to Y$ preslikavanje slabo beskonačno dimenzionalnog kompakta X na strogo beskonačno dimenzionalan kompakt Y, tada postoji točka $y \in Y$ za koju je $|f^{-1}(y)| \geqslant c = 2^{\aleph_0}$.

2.14. KOROLAR. Neka je $f : X \to Y$ surjekcija među kompaktnim prostorima sa svojstvom $|f^{-1}(y)| \leqslant \aleph_0$, $y \in Y$. Ako je X A-slabo beskonačno dimenzionalan, tada je i Y A-slabo beskonačno dimenzionalan. Obrnuto, ako je Y strogo beskonačno dimenzionalan, tada je i X takav.

2.15. KOROLAR. Neka je $f : X \to Y$ surjekcija među kompaktnim prostorima sa svojstvom $|Frf^{-1}(y)| \leqslant \aleph_0$, $y \in Y$. Ako je Y strogo beskonačno dimenzionalan, tada je i X takav.

Odatle odmah na poznati način slijedi

2.16. TEOREM. Neka je $\underline{X} = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, A\}$ (σ-usmjereni, $\aleph_1$-usmjereni) inverzni sistem kompaktnih prostora X_α i preslikavanja $f_{\alpha\beta}$ sa svojstvom ($|Frf_{\alpha\beta}^{-1}(x_\alpha)| < \aleph_0$, $|Frf_{\alpha\beta}^{-1}(x_\alpha)| \leqslant \aleph_0$) $|Frf_{\alpha\beta}^{-1}(x_\alpha)| \leqslant \leqslant k$. Ako su X_α strogo beskonačno dimenzionalni, tada je $X = = \lim\underline{X}$ strogo beskonačno dimenzionalan.

Slijedeća lema je jednostavna posljedica definicije beskonačne dimenzionalnosti.

2.17. LEMA. Normalan prebrojivo kompaktan prostor je A-slabo beskonačno dimenzionalan onda i samo onda kada je S-slabo beskonačno dimenzionalan.

2.18. LEMA. [2 : 543]. Normalan prostor X je S-slabo beskonačno dimenzionalan onda i samo onda kada je maksimalna kompaktifikacija βX slabo beskonačno dimenzionalna.

2.19. KOROLAR. Neka je $f : X \to Y$ zatvorena surjekcija sa svojstvom $|f^{-1}(y)| \leqslant k$, $y \in Y$. Ako su X i Y normalni prostori, tada S-slaba beskonačna dimenzionalnost prostora X ima za posljedicu S-slabu beskonačnu dimenzionalnost prostora Y.

D o k a z. Neka je $\beta f : \beta X \to \beta Y$ proširenje preslikavanja f na maksimalnu kompaktifikaciju βX. Iz leme 1. rada [22] slijedi da je $|(\beta f)^{-1}(y)| \leqslant k$ za svaku točku $y \in Y$. Iz 2.18. i 2.14. slijedi da je Y S-slabo beskonačno dimenzionalan.

Potpuno analogno, uz primjenu leme 2.17., dokazujemo

2.20. TEOREM. Neka je $f : X \to Y$ zatvorena surjekcija među normalnim prebrojivo kompaktnim prostorima tako da je $|f^{-1}(y)| \leqslant k$. Ako je X slabo beskonačno dimenzionalan, tada je i Y slabo beskonačno dimenzionalan.

2.21. Napomena. Dovoljno je u prethodnom teoremu pretpostaviti da je $|Frf^{-1}(y)| \leqslant k$ za svaku točku $y \in Y$.

Odatle odmah slijedi ovaj teorem za neprekidnost stroge beskonačne dimenzionalnosti.

2.22. TEOREM. Neka je $\underline{X} = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, A\}$ inverzni sistem normalnih prebrojivo kompaktnih X_α i potpuno zatvorenih preslikavanja $f_{\alpha\beta}$ sa svojstvom $|Frf_{\alpha\beta}^{-1}(x_\alpha)| \leqslant k$. Ako su prostori X_α strogo beskonačno dimenzionalni, tada je i $X = \lim \underline{X}$ strogo beskonačno dimenzionalan.

D o k a z. Iz rada [16] slijedi da je X prebrojivo kompaktan. Projekcije f_α su potpuno zatvorena preslikavanja [9]. To znači da je za svaka dva disjuktna zatvorena podskupa $F_1, F_2 \subseteq X$ skup $f_\alpha(F_1) \wedge f_\alpha(F_2)$ konačan. Odatle pak lako slijedi da postoji $\alpha \in A$ za koji je $f_\alpha(F_1) \wedge f_\alpha(F_2) = \emptyset$. Sada iz normalnosti prostora X_α slijedi normalnost limesa X. Primjenom napomene 2.21. završavamo dokaz.

2.23. TEOREM. Ako su prostori X_α kompaktni, tada u teoremu 2.22. možemo izostaviti pretpostavku potpune zatvorenosti preslikavanja. Vidi teorem 2.16.

U prvom odjeljku ispred teorema 1.31. definirali smo f-sisteme. Primjenom svojstva navedenog u dokazu teorema 1.31. i korolara 3.6.3. iz rada [6] lako slijedi

2.24. TEOREM. Ako je $X = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, A\}$ inverzni f-sistem s normalnim limesom X, tada je prostor βX homeomorfan limesu sistema $\beta X = \{\beta X_\alpha, \beta f_{\alpha\beta}, A\}$.

2.25. TEOREM. Neka je $X = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, A\}$ σ-usmjereni inverzni sistem Lindelöfovih prostora X_α i zatvorenih preslikavanja $f_{\alpha\beta}$ sa svojstvom $|f_{\alpha\beta}^{-1}(x_\alpha)| \leqslant k$. Prostor $X = \lim X$ je S-slabo (S-strogo) beskonačno dimenzionalan onda i samo onda ako su prostori X_α takvi.

D o k a z. Iz [25 : 28] slijedi da sistem βX zadovoljava 2.24. i 2.23. Lema 2.18. završava dokaz.

2.26. TEOREM. Neka je $X = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, A\}$ dobro uređeni inverzni sistem normalnih prostora X_α sa svojstvima $hl(X_\alpha) < \aleph_\tau$ i $cf(A) > > \omega_\tau$. Ako su preslikavanja $f_{\alpha\beta}$ takva zatvorena preslikavanja da je $|f_{\alpha\beta}^{-1}(x_\alpha)| \leqslant k$, tada je $X = \lim$ S-slabo (S-strogo) beskonačno dimenzionalan onda i samo onda kada su prostori X_α takvi.

D o k a z. Iz rada [15] slijedi da je $\underline{X}$ f-sistem. Preostali dio dokaza sličan je onom u prethodnom teoremu.

Potpuno analogno se na temelju [25 : 28], [13] i [22] dokazuje

2.27. TEOREM Neka je $\underline{X} = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, A\}$ σ-usmjereni inverzni sistem prostora X_α sa Suslinovim brojem $c(X_\alpha) \leqslant \aleph_0$ i otvoreno-zatvorenim preslikavanjima $f_{\alpha\beta}$ sa $|f_{\alpha\beta}^{-1}(x_\alpha)| \leqslant k$ Limes $X = \lim X$ je S-slabo (S-strogo) beskonačno dimenzionalan onda i samo onda kada su prostori X_α S-slabo (S-strogo) beskonačno dimenzionalni.

Završimo sada ovaj odjeljak s nekim teoremima za inverzne sisteme beskonačno dimenzionalnih Cantorovih mnogostrukosti. Dokažimo najprije jednu pomoćnu lemu.

2.28. LEMA. Neka je $f : X \to Y$ preslikavanje sa $|f^{-1}(y)| \leqslant \aleph_0$, a $F \subseteq X$ kompaktan potprostor. Ako je F slabo beskonačno dimenzionalan, tada je i f(F) slabo beskonačno dimenzionalan.

D o k a z. Neka je X_1 skup koji se dobiva ako skupu $X \setminus \cup \{\operatorname{Int} f^{-1}(y)\}$ dodamo jednu točku iz $f^{-1}(y) \wedge F$ ako je $\operatorname{Fr} f^{-1}(y) \wedge F = \emptyset$. Restrikcija f/X_1 zadovoljava uvjete leme 2.11. Dokaz je gotov.

2.29. TEOREM. Neka je $\underline{X} = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, A\}$ inverzni sistem beskonačno dimenzionalnih Cantorovih mnogostrukosti X_α. Ako su preslikavanja $f_{\alpha\beta}$ monotona i $|\operatorname{Fr} f_{\alpha\beta}^{-1}(x_\alpha) \leqslant k$, tada je $X = \lim \underline{X}$ beskonačno dimenzionalna Cantorova mnogostrukost.

D o k a z. Neka je F slabo beskonačno dimenzionalni podskup limesa X. Iz prethodne leme slijedi da je $f_\alpha(F)$ slabo beskonačno dimenzionalan za svaki $\alpha \in A$. Inverzni sistem $\underline{Y}_\alpha$ iz dokaza teorema 1.35. ima povezan limes jer su f_α monotona preslikavanja. Sada možemo dalje nastaviti dokaz kao i za teorem 1.35.

Potpuno analogno dokazuje se slijedeći teorem.

2.30. Neka je $X = \{X_\alpha, f_{\alpha\beta}, A\}$ σ-usmjereni ($\aleph_1$-usmjereni inverzni sistem beskonačno dimenzionalnih Cantorovih mnogostrukosti X_α. Ako su preslikavanja $f_{\alpha\beta}$ takva monotona preslikavanja da je $|\operatorname{Fr} f_{\alpha\beta}^{-1}(x_\alpha)| < \aleph_0$ ($|\operatorname{Fr} f_{\alpha\beta}^{-1}(x_\alpha)| \leqslant \aleph_0$), tada je $X = \lim \underline{X}$ beskonačno dimenzionalna Cantorova mnogostrukost.

LITERATURA

A l e k s a n d r o v P. S., O nekotoryh osnovnyh napravljenijah v obščej topologii, UMN 19(1964), 3—46.

A l e k s a n d r o v P. S., P a s y n k o v V. A., Vvedenije v teoriju razmernosti, Nauka, Moskva, 1973.

A r h a n g e l' s k i j A.V., Otobraženija otkritye i bliskie k otkritym. Svjazi meždu prostranstvami. Trudy Mosk. mat. obšč. 15(1966), 181—223.

A r h a n g e l' s k i j A. V., P o n o m a r e v V. I., Osnovy obščej topologii v zadačah i upražnenijah, Nauka, Moskva, 1974.

B a l a d z e V. H., O funkcijah razmernostnogo tipa, Trudy Tbilis. mat. univ. 68(1982), 5—41.

E n g e l k i n g R., General Topology, PWN, Warszawa, 1977.

E n g e l k i n g R., Dimension Theory, PWN, Warszawa, 1978.

F e d o r č u k V. V., Beskonečnomernye bikompakty, Izv. AN SSSR. Ser. mat. 42(1978), 1162—1178.

F e d o r č u k V. V., Metod razvertivaemyh spektrov i vpol'ne zamknutyh otobraženij, UMN 35(1980), 112—121.

G o r d h G. R. and M a r d e š i ć S., Characterizing local connectedness in inverse limits, Pacific J. Math. 58(1975), 411—417.

H i s a o K a t o, A note on infinite-dimension under refinable maps, Proc. Amer. Math. Soc. 88(1983), 177—180.

J a y n e J. E., R o g e r s C. A., Functions fermeés en partie, C. R. Acad. Sci. 13(1980), 667—670.

Keesling J. E., Open and closed mappings and compactification, Fund. math. 65(1969), 73—81.
Koyama Akira, Refinable maps in dimension theory, Topol. and Appl. 17(1984), 247—255.
Lončar I., Lindelöfov broj i inverzni sistemi, Zbornik radova Fakulteta organizacije i informatike Varaždin 7(1983), 115—123.
Lončar I., Inverse limits for spaces which generalize compact spaces, Glasnik mat. 17(37)(1982), 155—173.
Mamuzić Z., Uvod u opštu topologiju, Beograd, 1960.
Mardešić S., Lokalno povezani, uređeni i lančasti kontinuumi, Radovi JAZU, Zagreb, 1960, 147—166.
Nagami K., Countable paracompactness of inverse limits and products, Fund. math. 73(1972), 261—270.
Nagami K., Mappings of finite order and dimension theory, Japan J. math., 30(1950), 25—64.
Nagata J., Modern dimension theory, Amsterdam, 1965.
Pasynkov V. A., Faktorizacionnye teoremy v teoriji razmernosti, UMN 36(1981), 147—175.
Polkovski L. T., Open and closed mappings and infinite dimension, Gen. Topol. and Relat. Mod. Anal. and Algebra. 5, Berlin 1983, 561—564.
Pol R., A weakly infinite-dimensional compactum which is not countable-dimensional, Proc. Amer. Math. Soc. 82(1981), 634—636.
Ščepin E. V., Funktory i nesčetnye stepeni kompaktov, UMN 36(1981), 3—62.
Tkačenko M. G., Cepi i kardinaly, DAN SSSR 239(1978), 546—549.
Väisälä Jussi, Local topological properties of contable mappings, Duke Math. J. 41(1974), 541—546.
Yajima Yukinobu, On the dimension of limits of inverse systems, Proc. Amer. Math. Soc. 91(1984), 461—466.

IVAN LONČAR

MAPPINGS OF THE INFINITE-DIMENSIONAL SPACES

Let $f : X \to Y$ be a mapping between normal spaces. Under which conditions on f, X and Y does the A-weak (A-strong) infinite-dimensionality of Y y hold from A-weak (A-strong) infinite-dimensionaly of X.

In the present paper the partial answers for open and for closed mappings are given.

In Section 1. we prove that, if $f : X \to Y$ is an open surjection between separable metric spaces such that $\mathrm{Fr} f^{-1}(y)$ has an isolated point ($f^{-1}(y)$ is discrete), then Y is Aweakly infinite-dimensional if (iff) X is A-veakly infinite-dimensional (1.4. Lemma and 1.13. Theorem). By virtue of this statements we prove that $\lim \underline{X}$ is A-strongly infinite-dimensional if $\underline{X}$ is an inverse sequence of A-strongly infinite-dimensional separable metric spaces such that $1 \leqslant | \mathrm{Fr} f_{nm}^{-1} (x_n) | \leqslant k$ (1.8. Theorem). If $\underline{X}$ is a well-ordered inverse system, then one can assume that $\mathrm{Fr} f_{\alpha\beta}^{-1} (x_\alpha)$ is a discrete subspace of X_β (Theorem 1.10.). In Lemma 1.24. and 1.25. we prove that if $f : X \to Y$ is a local homeomorphism between hereditarily Lindelöf spaces, then a closed subset A of X is A-weakly infinite-dimensional iff f(A) is A-weakly infinite-dimensional. In theorems 1.28.—1.34. we consider the inverse systems of A-weakly (A-strongly) infinite-dimensional spaces and open bonding mappings with finite fibers. In this case the limit of inverse system of infinite-dimensional Cantor-manifolds is an infinite-dimensional Cantor-manifold (Theorem 1. 35. and 1.36.).

Section 2. contains the results on infinite-dimensionality under closed mappings with finite or contable fibers. Using Theorem 2.13. and S-weak infinite-dimensionality of βX (Lemma 2.28.) we prove some theorems for a A-weak (A-strong) infinite-dimensionality of a limit of an inverse systems of countably compact spaces (2.22. Theorem) and for a σ-directed inverse system of Lindelöf spaces (2.25. Theorem). Inverse systems of infinite-dimensional Cantor-manifolds are also considered (2.29. and 2.30. Theorem).