RADOVI
Zavoda za znanstveni rad
Jugoslavenske akademije
znanosti i umjetnosti

Varaždin
1989.

UDK–51

Izvorni znanstveni rad
Original Scientific paper

IVAN LONČAR

HIPERPROSTORI H-ZATVORENIH PROSTORA
HYPERSPACES OF H-CLOSED SPACES

ABSTRACT. *The main purpose of this paper is the proof of the following theorems:*

a) A space X is QHC iff the space Exp(X) is QHC,

b) A space X is nearly compact iff Exp(X) is nearly compact.

1. Uvod

Neka je X topološki prostor. Partitivni skup prostora X označavati ćemo simbolom $P(X)$. Podskup partitivnog skupa čiji su elementi neprazni $A \subset X$ označavamo s $A(X)$. Podskup partitivnog skupa čiji su elementi zatvoreni $F \subset X$ (kompaktni zatvoreni $K \subset X$, zatvoreni i povezani $C \subset X$) označavat ćemo simbolom Exp(X) (Z(X), C(X)). Sve navedene skupove najčešće snabdijevamo eksponencijalnom topologijom ([Č], [K], [E]) pomoću baze sastavljene od skupova

$$<U_1,\ldots,U_k> = \{ Y \subset X : Y \subset U_1 \bigcup \ldots \bigcup U_k \ ; \ U_j \bigcap Y \in \Theta \text{ za sve } j=1,\ldots,k\},$$

gdje su $U_1,\ldots,U_k$ otvoreni podskupovi prostora X [E]. To znači da je podbaza eksponencijalne topologije sastavljena od slijedeće dvije vrsta skupova:

$$\mathrm{Exp}(U) = \{Y : Y \subset U, \text{ U otvoren u prostoru X}\},$$
$$<X,U> = \{Y : Y \subset X, \ Y \bigcap U \neq \emptyset, \text{ U otvoren u X}\}.$$

Najčešće se promatra skup svih zatvorenih podskupova prostora X. Tada je Y u gornjim relacijama također zatvoreni podskup prostora X. Poznate su još dvije topologije na $A(X)$. Prva od njih, $\varkappa$-topologija, definirana je bazom $<G> = \{ L \in A(X) : L \subset G\}$, gdje je G otvoren podskup prostora X. Pseudobaza λ-topologije na $A(X)$ sastavljena je od skupova $\lambda(U) = \{L \in A(X) : L \bigcap \bigcup \neq \emptyset, \text{ U otvoren u X}\}$.

Mi ćemo promatrati još neke topologije na skupovima Exp(X), Z(X) i C(X) koje su dozvoljene u smislu Michaela [Mi:153], tj. takve da postoji homeomorfizam i, koji ima svojstvo da je $i(x) = \{x\}$ za svaku točku $x \in X$. Razumije se da je to moguće samo ako je X T_1 prostor.

2. Hiperprostori H-zatvorenog prostora

Kažemo da je prostor X QHC ako svaki otvoreni pokrivač $U = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ posjeduje konačnu potfamiliju $\{U_{\alpha_1},\ldots,U_{\alpha \kappa}\}$ sa svojstvom $X = Cl\ U_{\alpha_1} \bigcup \ldots \bigcup Cl\ U_{\alpha_n}$. Ako je prostor X QHC i Hausdorov, tada kažemo da je X H-zatvoren ([L3], [L6]).

Podskup $A \subset X$ je Θ-zatvoren ako sadrži svaku točku $x \in X$, čija svaka otvorena okolina U ima svojstvo $Cl\ U \bigcap A \neq \emptyset$.

Svaka točka Hausdorfova prostora X je Θ-zatvoren skup. Presjek Θ-zatvorenih skupova je Θ-zatvoren skup. Unija konačno mnogo Θ-zatvorenih skupova je Θ-zatvoren. K tome je svaki Θ-zatvoren skup zatvoren. Uvodimo nadalje Θ-otvorene skupove kao komplemente Θ-zatvorenih. Svaki Θ-otvoreni skup je otvoren. Jasno je iz navedenih svojstava i definicija da familija Θ-otvorenih skupova predstavlja T_1 topologiju slabiju od zadane topologije [L6]. Ako je polazna topologija na X označena s t, tada ovu topologiju označavamo s Θt.

2.1. LEMA. Ako je (X,t) H-zatvoren prostor, tada svaka centrirana familija Θ-zatvorenih skupova ima neprazan presjek tj. prostor (X, Θ) je T_1 kvazi-kompakt. Dokaz. Vidi [L6].

2.2. PROBLEM. Da li vrijedi obrat ove teme?

2.3. DEFINICIJA. Prostor X je Θ-kompaktan ako svaki Θ-otvoren pokrivač ima konačan potpokrivač, odnosno ekvivalentno, ako svaka centrirana familija Θ-zatvorenih podskupova ima neprazan presjek.

2.4. LEMA. Svaki QHC prostor je Θ-kompaktan.

2.5. LEMA. T_1 prostor (X, t) je Θ-kompaktan onda i samo onda kada je prostor $(X, \Theta t)$ kvazikompaktan.

Za svaki H-zatvoreni prostor X postoji apsolut a(X) (u smislu Iliadisa i Fornina [IF:44]) i Θ-neprekidno, zatvoreno ireducibilno preslikavanje $\pi : a(X) \rightarrow X$. K tome je a(X) kompaktan, nula-dimenzionalan i ekstremno nepovezan [IF:40]. Nije teško pokazati da je Θ-neprekidna slika kompakta QHC prostor. Imamo dakle

2.6. LEMA. Θ-neprekidna slika kompakta je QHC prostor. Hausdorffov prostor X je H-zatovren onda i samo onda kada postoji Θ-neprekidno preslikavanje kompakta K na prostor X.

2.7. LEMA. Neka je X Hausdorffov prostor i $\pi : a(X) \rightarrow X$ prirodno preslikavanje apsoluta a(X) na prostor X. Za svaki H-zatvoreni potporostor $F \subset X$ postoji kompakt $F^* \subset a(X)$ sa svojstvom $\pi(F^*) = F$.

Dokaz. Vidi [IF:53], gdje je definiran reducirani original $F^{\sim}$skupa F, koji je kompaktan ako je F H-zatvoren.

Kažemo da je podbaza S prostora X $\bigcap$ – podbaza ako za svaku točku X prostora X postoji bazna okolina $U = B_1 \bigcap \ldots \bigcap B_n$, $B_i \in S$, točke x takva da je $Cl\ (B_1 \bigcap \ldots \bigcap B_n) = Cl\ B_1 \bigcap \ldots \bigcap Cl\ B_n$.

Nije teško pokazati da je podbaza produkta prostora $\bigcap$ – podbaza. Za ovaj rad važnija je slijedeća lema.

2.8. LEMA. Za svaki T_1 prostor X je podbaza eksponencijalne topologije prostora Exp(X) $\bigcap$ – podbaza.

Dokaz. Za svaku točku iz Exp(X) postoji bazna okolina eksponencijalne topologije oblika $\langle U_1,\ldots,U_n \rangle$. Neka je $U = U_1 \bigcup \ldots \bigcup U_n$. Jasno je da je $\langle U_1,\ldots,U_n \rangle = Exp(U) \bigcap \langle X, U_1 \rangle \bigcap \ldots \bigcap \langle X, U_n \rangle$. Dakle je $Cl\ \langle U_1,\ldots,U_n \rangle =$ ([K:I,169]) $= \langle Cl\ U_1,\ldots,Cl\ U_n \rangle$

$= \mathrm{Exp}\,(\mathrm{Cl}\,U_1 \bigcup \ldots \bigcup \mathrm{Cl}\,U_n) \bigcap \langle X, \mathrm{Cl}\,U_1\rangle \bigcap \ldots \bigcap \langle X, \mathrm{Cl}\,U_n\rangle = \mathrm{Exp}\,(\mathrm{Cl}\,U) \bigcap \langle X, \mathrm{Cl}\,U_1\rangle \bigcap \ldots \bigcap \langle X, \mathrm{Cl}\,U_n\rangle = \mathrm{Cl}\,\mathrm{Exp}(U) \bigcap \mathrm{Cl}\,\langle X, U_1\rangle \bigcap \ldots \bigcap \mathrm{Cl}\,\langle X, U_n\rangle$. Iz svih ovih jednakosti slijedi $\mathrm{Cl}(\mathrm{Exp}(U) \bigcap \langle X, U_1\rangle \bigcap \ldots \bigcap \langle X, U_n\rangle) = \mathrm{Cl}\,\mathrm{Exp}(U) \bigcap \mathrm{Cl}\,\langle\langle X, U_1\rangle \bigcap \ldots \bigcap \mathrm{Cl}\,\langle X, U_n\rangle$. Dokaz je gotov jer su Exp(U) i $\langle X, U_i\rangle$ elementi podbaze eksponencijalne topologije.

Sada dokazujemo dva glavna teorema ovog odjeljka.

2.9. TEOREM. Neka je X prostor s $\bigcap$-podbazom S. Da bi prostor X bio QHC, nužno je i dovoljno da svaki S – pokrivač U prostora X posjeduje potfamiliju $\{U_j : U_j \in U, i=1,\ldots n\}$ sa svojstvom $\mathrm{Cl}\,U_1 \bigcap \ldots \bigcap \mathrm{Cl}\,U_n = X$.

Dokaz. *Nužnost.* Očigledno.

Dovoljnost. Pretpostavimo dakle da postoji bitno beskonačan otvoreni pokrivač A^* prostora X, tj. pokrivač A^* koji nema potfamilije $\{U_1,\ldots,U_n\}$ sa svojstvom

$$\mathrm{Cl}\,U_1 \bigcup \ldots \bigcap \mathrm{Cl}\,U_n = X. \quad (1)$$

Dokažimo da postoji maksimalan bitno beskonačan otvoreni pokrivač. Neka je $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_\alpha \subset \ldots,\ \alpha <$, transfinitan niz bitno beskonačnih pokrivača prostora X. Neka je B unija svih pokrivača niza. Kada B ne bi bio bitno beskonačan, tada bi postojali $U_1,\ldots,U_m \in B$ sa svojstvom (1). Možemo pretpostaviti da je $U_j \in A_{\alpha_j}$. Neka je $\beta = \max \}a_i : i=1,\ldots,m\}$. Naravno, β je jedan od a_j, recimo α_m. Tada su svi U_1 elementi pokrivača A_{α_m}. Iz pretpostavke da vrijedi (1) sada slijedi da A_{α_m} nije bitno beskonačan. Iz ove kontradikcije slijedi egzistencija maksimalnog bitno beskonačnog pokrivača. Neka je dakle A takav maksimalan bitno beskonačan pokrivač i neka je P familija svih otvorenih podskupova prostora X koji ne pripadaju pokrivaču A. Naravno da je $U \in P$ onda i samo onda kada postoji konačna potfamilija $\{U_1,\ldots,U_n\}$ pokrivača A sa svojstvom

$$\mathrm{Cl}\,U \bigcup \mathrm{Cl}\,U_1 \bigcup \ldots \bigcup \mathrm{Cl}\,U_n = X. \quad (2).$$

Kako je $\mathrm{Cl}\,U \subseteq X - \{\mathrm{Cl}\,U_1 \bigcup \ldots \bigcup \mathrm{Cl}\,U_n\}$, to je $\mathrm{Int}\,\mathrm{Cl}\,U \subseteq X - \{\mathrm{Cl}\,U_1 \bigcup \ldots \bigcup \mathrm{Cl}\,U_n\}$. Odatle slijedi

$$\mathrm{Int}\,\mathrm{Cl}\,U \bigcup \mathrm{Cl}\,U_1 \bigcup \ldots \bigcup \mathrm{Cl}\,U_n = X. \quad (3)$$

Za neki drugi $V \in P$ bit će analogno

$$\mathrm{Int}\,\mathrm{Cl}\,V \bigcup \mathrm{Cl}\,V_1 \bigcup \ldots \bigcup \mathrm{Cl}\,V_m = X. \quad (4)$$

Odatle slijedi da je

$$(\mathrm{Int}\,\mathrm{Cl}\,U \bigcap \mathrm{Int}\,\mathrm{Cl}\,V) \bigcup \ldots \bigcup \mathrm{Cl}\,U_n \bigcup \mathrm{Cl}\,V_1 \bigcup \ldots \bigcup \mathrm{Cl}\,V_m = X, \quad (5)$$

tj. $\mathrm{Int}\,\mathrm{Cl}\,U \bigcap \mathrm{Int}\,\mathrm{Cl}\,V \in P$. K tome iz (5) slijedi da je $\mathrm{Int}\,\mathrm{Cl}\,U \bigcap \mathrm{Int}\,\mathrm{Cl}\,V$ neprazan, tj. da je $U \bigcap V$ neprazan jer iz $U \bigcap V = \phi$ slijedi $\mathrm{Int}\,\mathrm{Cl}\,U \bigcap \mathrm{Int}\,\mathrm{Cl}\,V = \phi$. Iz (5) još slijedi da je

$$\mathrm{Cl}\,(\mathrm{Int}\,\mathrm{Cl}\,U \bigcap \mathrm{Int}\,\mathrm{Cl}\,V) \bigcup \mathrm{Cl}\,U_1 \bigcup \bigcup \mathrm{Cl}\,U_n \wr \mathrm{Cl}\,V_1 \bigcup \ldots \bigcup \mathrm{Cl}\,V_m = X, \quad (6)$$

tj.

$$(\mathrm{Cl}\,\mathrm{Int}\,\mathrm{Cl}\,U \bigcup \mathrm{Cl}\,\mathrm{Int}\,\mathrm{Cl}\,V) \bigcup \mathrm{Cl}\,U_1 \bigcup \ldots \bigcup \mathrm{Cl}\,U_n \bigcup \mathrm{Cl}\,V_1 \bigcup \ldots \bigcup \mathrm{Cl}\,V_m = X,$$

odnosno

$$(\mathrm{Cl}\,U \bigcap \mathrm{Cl}\,V) \bigcup \mathrm{Cl}\,U_1 \bigcup \ldots \bigcup \mathrm{Cl}\,_n \bigcup \mathrm{Cl}\,V_1 \bigcup \ldots \bigcup \mathrm{Cl}\,V_m = X. \quad (7)$$

Odatle slijedi

$$\mathrm{Cl}\ U \bigcap \mathrm{Cl}\ V \in P. \tag{8}$$

Nadalje iz (2) slijedi da ako je Cl W ⊂ Cl U, tada je

$$W \in P. \tag{9}$$

Iz svega slijedi da je *P* filtar. Neka je sada x bilo koja točka prostora X. Postoji U ∈ *A* sa svojstvom x ∈ U. Postoji nadalje bazna okolina $V = S_1 \bigcap \dots S_k$, gdje je $S_j \in S$, i=1,...,k, sa svojstvom x ∈ U ⊂ V. Očito je da je V ∈ *A* ∉ *A* jer iz V ∈ *P* te (8) i (9) slijedi U ∈ *P*, što nije. Iz definicije ⋂-baze slijedi $\mathrm{Cl}\ V = \mathrm{Cl}\ (S_1 \bigcap \dots \bigcap S_k) = \mathrm{Cl}\ S_1 \bigcap \dots \bigcap \mathrm{Cl}\ S_k$. Iz činjenice da je V ∉ *P* i (8) slijedi da za barem jedan S_j vrijedi $S_j \in A$. Dakle je *A* ⋂ *S* opet pokrivač prostora sastavljen od elemenata ⋂-baze *S*, koji je bitno beskonačan jer je takav i *A*. Ovo je međutim u suprotnosti s pretpostavkom o *S* u teoremu 2.9. Dokaz je gotov.

2.10. TEOREM. Da bi T_1 prostor X bio QHC, nužno je i dovoljno da Exp(X) bude QHC.

Dokaz. *Dovoljni dio teorema.* Ako je *U* neki pokrivač prostora X, tada je <X, *U*> = {<X, U>:U ∈ *U*} pokrivač prostora Exp(X). Iz pretpostavke da Exp(X) QHC slijedi da postoje skupovi $<X, U_1>, \dots, <X, U_n>$ sa svojstvom $\mathrm{Cl} <X, U_1> \bigcup \dots \bigcup \mathrm{Cl} <X, U_n> = \mathrm{Exp}(X)$. Dakle je $<X, \mathrm{Cl}\ U_1 < \bigcup \dots 8 <X, \mathrm{Cl}\ U_n> = \mathrm{Exp}(X)$. Jasno je da je također $X = \mathrm{Cl}\ U_1 \bigcup \dots \bigcup \mathrm{Cl}\ U_n$. To znači da je X QHC. Dokaz dovoljnog dijela je gotov.

Dokaz nužnog dijela teorema: Iz teorema 2.9 i 2.8 slijedi da je dovoljno pokazati da za bilo koji podbazni pokrivač *U* postoji konačna potfamilija sa svojstvom $<X, \mathrm{XI}\ U_1> \bigcup \dots \bigcup <X, \mathrm{Cl}\ U_n> \bigcup \mathrm{Exp}\ (V_1) \bigcup \dots \bigcup \mathrm{Exp}\ (V_m) = \mathrm{Exp}(X)$. Neka je Exp(X) = ⋃ {<X, U> : U ∈ *U*>} ⋃ {Exp(V) : V ∈ *U*}. Promatrajmo skup A = X − ⋃ {U: U ∈ *U*}: Kako je A ⋂ U = ϕ za svaki element tipa U, to je A ∈ Exp(V) za neki V ∈ *U*, tj. A ⊂ V. Neka je B = V − A i C = X − ClV. Skup ClC je regularno zatvoren, pa je i QHC. To znači da postoji konačno mnogo U-ova koji imaju svojstvo $\mathrm{Cl}\ C \subset \mathrm{Cl}\ U_1 \bigcup \dots \bigcup \mathrm{Cl}\ U_n$. Svaki zatvoreni podskup F ⊂ X je ili dio skupa V ili siječe Cl C, tj. siječe neki Cl U_j. Dakle je $\mathrm{Exp}(C) = \mathrm{Exp}(V) \bigcup <X, \mathrm{Cl}\ U_1> \bigcup \dots \bigcup <X, \mathrm{Cl}\ U_n>$. Pogotovo je sada $\mathrm{Exp}(X) = \mathrm{Cl}\ \mathrm{Exp}(U) \bigcup \mathrm{Cl} <X, U_1> \bigcup \dots \bigcup \mathrm{Cl}\ U_n$. Prema tome, podbazni pokrivač *U* nije bitno beskonačan. Iz teorema 2.9. slijedi da je Exp(X) QHC prostor. Dokaz je gotov.

Promatrajmo sada neke potprostore hiperprostora Exp(X). U daljnjem tekstu bit će nam potrebna slijedeća poznata lema.

2.11. LEMA. [E:162]. Neka je X Hausdorffov prostor, $J_n(X)$ potprostor prostora Exp(X) čiji elementi sadrže najviše n točaka prostora X i $J(X) = \bigcup \{J_n(X) : n \in N\}$. Neka je nadalje $j_n : X^n \to J_n(X)$ preslikavanje koje svakoj točki $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$ pridružuje točku $\{x_1, \dots, x_n\} \in J_n(X)$. Tada je j_1 homeomorfizam a svako preslikavanje j_n je neprekidno zatvoreno preslikavanje s kompaktnim originalima točaka, tj. perfektno preslikavanje.

Dokaz. Sve osim kompaktnosti originala je poznato (vidi [E] ili [K]), a perfektnost originala slijedi iz činjenice da se u točku $\{x_1, \dots, x_n\} \in J_n(X)$ preslikava najviše n! točaka prostora X^n.

2.12. NAPOMENA. Ako je X T_1 prostor, tada j_n, $n \geq 2$, ne mora biti zatvoreno preslikavanje, ali ostaje neprekidno.

2.13. LEMA. Da bi T_1 prostor X bio QHC, nužno je i dovoljno da $J_n(X)$ bude QHC za svaki prirodan broj n.

Dokaz. *Nužnost.* Poznato je da je produkt QHC prostora QHC prostor [H]. Dakle je X^n QHC prostor. Nadalje je neprekidna slika QHC prostora QHC prostor (Lema 2.6), pa je $J_n(X)$ QHC kao neprekidna slika prostora X^n preko preslikavanja j_n.

Dovoljnost. Neka je U otvoreni pokrivač prostora X. Jasno je da je $= \{<X, U> : U \in U\}$ pokrivač prostora Exp(X). Kako je $J_n(X)$ QHC, postoji konačna potfamilija familije sa svojstvom $Cl <X, U_1> \bigcup \ldots \bigcup Cl <X, U_n> \subset J_n(X)$. Odatle slijedi $<(X, Cl\ U_1> \bigcup \ldots \bigcup <X, Cl\ U_n> \subset J_n(X)$ [K:I, 169] i $X = Cl\ U_1 \bigcup \ldots \bigcup Cl\ U_n$. Dokaz je gotov.

2.14.1. NAPOMENA. Iz ovog dokaza slijedi da je X QHC ako je QHC bilo koji Y sa svojstvom $J_1(X) \subset Y \subset Exp(X)$.

Promatrajmo sada skup svih zatvorenih $F \subset X$ za koje postoji kompakt $K \subset a(X)$ sa svojstvom $\pi(K) = F$. Kao potprostor od Exp(X) neka je označen simbolom $Exp_K(X)$. Ako sa $Exp_H(X)$ označimo potprostor prostora Exp(X) sastavljen od H-zatvorenih potprostora prostora X, tada iz leme 2.7. slijedi 2.15. LEMA. $Exp_H(X)$ je potprostor prostora $Exp_K(X)$.

Jasno je da su prostori $Exp_H(X)$ i $Exp_K(X)$ jednaki kao skupovi onda i samo onda kada je svaki zatvoreni potprostor prostora X i H-zatvoren, tj. onda i samo onda kada je X kompaktan [IF:52, Theorem 9.].

Dokažimo sada posljednji teorem ovog odjeljka.

2.16. TEOREM. Da bi T_2 prostor X bio QHC, nužno je i dovoljno da $Exp_K(X)$ bude QHC prostor.

Dokaz. *Neka je X H – zatvoren.* Dokažimo da je $Exp_K(X)$ QHC prostor.

Prije svega $Exp_K(X)$ je T_1 prostor jer je potprostor T_1 prostora Exp(X) [K:170]. Nadalje je Exp(a(X)) kompaktan jer je i apsolut a(X) kompaktan ([F:40] i [K:11, 52-53]). Iz definicije prostora $Exp_K(X)$ slijedi da postoji preslikavanje $p: Exp\ (aX) \to Exp_K(X)$ koje svakom elementu $C \in Exp(a(X))$ pridružuje element $\pi(C)$ prostora $Exp_K(X)$. K tome je preslikavanje p surjekcija. Dokažemo li još da je p Θ-neprekidno preslikavanje, tada će iz leme 2.6. slijediti da je $Exp_K(X)$ QHC. Neka je $F \in Exp_K(X)$ i $<U_1,\ldots,U_n>$ neka njegova okolina. Postoji kompakt $K \subset a(X)$ sa svojstvom $\pi(K) = F$. Za svaku točku $x \in K$ je $\pi(x)$ u nekom U_j, $i=1,\ldots,n$. Zbog Θ-neprekidnosti preslikavanja π postoji okolina V_x točke x sa svojstvom da je $\pi(Cl\ V_x) \subset Cl\ U_j$ za sve U_j u kojima se $\pi(x)$ nalazi. Kako je K kompakt, postoji konačno mnogo okolina V_x koje pokrivaju K. Uvećajmo tu kolekciju okolina s još konačno mnogo okolina V_x (ako je potrebno), tako da za svaku okolinu U_j postoji jedna od tih okolina za koju je $\pi(Cl\ V_x) \subset Ci\ U_j$. Sada je $<V_{x_1},\ldots,V_{x_n}>$ okolina komapkta K. Iz relacije $Cl\ V_{x_1},\ldots,V_{x_n}> = <Cl\ V_{x_1},\ldots,Cl\ V_{x_n})$ sada slijedi $p(Cl <V_{x_1},\ldots,V_{x_n}>) \subset Cl <U_1,\ldots,U_n>$. Dokaz Θ-neprekidnosti preslikavanja p je gotov, a time i dokaz nužnog dijela teorema.

Neka je $Exp_K(X)$ QHC prostor. Dokažimo da je X QHC prostor. Kako je $Exp_K(X) \subset J_1(X)$, to iz napomene 2.14.1. slijedi da je X QHC prostor. Dokaz teorema je gotov.

3. Hiperprostor skoro kompaktnih prostora

Otvoren skup U prostora X je *regularno otvoren* ako je Int Cl U = U. Skup F za koji je F = Cl Int F zove se *regularno zatvoren* skup. Komplement regularno zatvorenog skupa je regularno otvoren skup i obratno. Veoma važno svojstvo iskazuje slijedeća lema.

3.1. LEMA. [E:37]. Presjek regularno otvorenih skupova je regularno otvoren.

Kažemo da je topološki prostor X *skoro kompaktan* ako svaki pokrivač prostora X sastavljen od regularno otvorenih skupova ima konačan potpokrivač [H:432].

Prostor X je *potpuno Hausdorffov* prostor. Ako svake dvije različite točke prostora imaju okoline s disjunktnim zatvorenjima.

3.2. LEMA. [H:433]. Hausdorffov prostor X je skoro kompaktan onda i samo onda kada je H-zatvoren i potpuno Hausdorffov.

Iz leme 3.1. slijedi da je familija RO svih regularno otvorenih prostora X baza slabije topologije na X. Označimo li tako dobiveni prostor sa s(X) i nazovemo *poluregularizacija* prostora X [E:84], imamo

3.3. TEOREM. Hausdorffov prostor X je skoro kompaktan ako i samo ako je s(X) kompaktan prostor.

Dokaz. Vidi [H].

Dokažimo sada glavni teorem ovog odjeljka.

3.4. TEOREM. Neka je B otvorena $\bigcap$-podbaza prostora X. X je skoro kompaktan ako isamo ako svaki pokrivač $U = \{\text{Int Cl B:B} \in B\}$ ima konačan potpokrivàč.

Dokaz. *Nužnost.* Ako je X skoro kompaktan, tada očito U ima konačan potpokrivač.

Dovoljnost. Pretpostavimo da X nije skoro kompaktan. To znači da postoji pokrivač sastavljen od elementa familije RO (regularno otvorenih skupova prostora X), koji je *bitno beskonačan,* tj. nema konačan potpokrivač. Neka je M familija svih takvih bitno beskonačnih pokrivača. Jednostavno se pokazuje da je ova familija *induktivna,* tj. svaki transfinitan monotoni niz pokrivača iz M ima gornju ogradu. To je u ovom slučaju unija pokrivača niza. Iz induktivnosti slijedi da M ima maksimalan element P. Odatle slijedi da za svaki regularno otvoreni skup a pokrivač $P\bigcup(A)$ nije bitno beskonačan. Postoji dakle konačno mnogo skupova $P_1,\ldots,P_n$, za koje vrijedi

$$A \bigcup P_1 \bigcup \ldots \bigcup P_n = X,\ P_j \in P,\ i=1,\ldots,n \qquad (1).$$

Neka je R familija svih regularno otvorenih skupova koji ne pripadaju pokrivaču P. Obratno, ako za neki $A \in RO$ vrijedi (1), tada je $A \notin P$. Odatle odmah slijedi

$$B \notin P \text{ i } B \subset C \rightarrow C \notin P. \qquad (2)$$

Analogno se dokazuje [K:II, 10]

$$A \notin P \text{ i } B \in P \rightarrow (A \bigcap B) \notin P. \qquad (3)$$

Napomenimo još da je $A \bigcap B$ također regularno otvoren podskup prostora X. Pokažimo da iz (2) i (3) slijedi da je $P \bigcap \{\text{Int Cl B:B} \in B)$ pokrivač prostora X. Neka je $x \in X$. Kako je P pokrivač prostora X, postoji $P \in P$ sa svojstvom $x \in P$. Postoji nadalje bazna okolina U točke x sa svojstvom $x \in U \subset P$. Odatle slijedi da je $x \in \text{Int Cl U} \subset P$ jer je P regularno otvoren. Postoje nadalje B_j, $i=1,\ldots,k$, sa svojstvom $U = B_1 \bigcap \ldots \bigcap B_k$. Naravno da je $\text{Int Cl U} = \text{Int Cl } B_1 \bigcap \ldots \bigcap \text{Int Cl } B_k$ [K:I, 61] jer je B $\bigcap$-podbaza. Dakle je

$$x \in \text{Int Cl } B_1 \bigcap \ldots \bigcap \text{Int Cl } B_k \subset P.$$

Iz (2) i (3) slijedi da postoji barem jedan Int Cl B_j, $I=1,\ldots,k$, za koji je $x \in \text{Int Cl } B_j \in P \bigcap \{\text{Int Cl B:B} \in B\}$. Dakle je $P \bigcap \{\text{Int Cl B:B} \in B)$ pokrivač prostora X. Kako je P bitno beskonačan, takav je i $P \bigcap \{\text{Int Cl B:B} \in B)$. To je, međutim, u suprotnosti s pretpostavkom teorema. Dokaz je gotov.

3.5. LEMA. Ako su $U_1,\ldots,U_n$ otvoreni skupovi T_1 prostora, tada vrijedi jednakost

$$\mathrm{Int\,Cl} <U_1,\ldots,U_n> = <\mathrm{Int\,Cl}\, U_1,\ldots,\mathrm{Int\,Cl}\, U_n>.$$

Dokaz. Iz poznate relacije Cl $<U_1,\ldots,U_n> = <\mathrm{Cl}\, U_1,\ldots,\mathrm{Cl}\, U_n>$ ([K,I:169] ili [Mi:156]) je Int Cl $<U_1,\ldots,U_n> = \mathrm{Int} <\mathrm{Cl}\, U_1,\ldots,\mathrm{Cl}\, U_n>$. S druge strane je očito da vrijedi $<\mathrm{Int\,Cl}\, U_1,\ldots,\mathrm{Int\,Cl}\, U_n> \subset \mathrm{Int} <\mathrm{Cl}\, U_1,\ldots,\mathrm{Cl}\, U_n>$. Dakle je $<\mathrm{Int\,Cl}\, U_1,\ldots,\mathrm{Int\,Cl}\, U_n> \subset \mathrm{Int\,Cl} <U_1,\ldots,U_n>$. Dokažimo da vrijedi $\mathrm{Int\,Cl} <U_1,\ldots,U_n> \subset <\mathrm{Int\,Cl}\, U,\ldots,\mathrm{Int\,Cl}\, U_n>$ i dokaz će biti gotov. Neka je $B \in \mathrm{Int\,Cl} <U_1,\ldots,U_n>$. Dakle je $B \in <\mathrm{Cl}\, U_1,\ldots,\mathrm{Cl}\, U_n>$ i postoji okolina $<V_1,\ldots,V_k>$ točke B koja se cijela nalazi u $\mathrm{Cl} <U_1,\ldots,U_n> = <\mathrm{Cl}\, U_1,\ldots,\mathrm{Cl}\, U_n>$. Za svaki V_j postoji U_j sa svojstvom $V_j \subset \mathrm{Cl}\, U_j$, jer bi u suprotpostojala točka $x \in V_j - (\mathrm{Cl}\, U_1 \bigcup \ldots \bigcup \mathrm{Cl}\, U_n)$. Uzmemo li $F = \{x, x_k \in V_k, k \ddagger j\}$, tada je F u okolini $<V_1,\ldots,V_k>$, a nije u $<\mathrm{Cl}\, U_1,\ldots,\mathrm{Cl}\, U_n>$, što je nemoguće. Analogno se pokazuje da za svaki U_j postoji barem takav V_j sa svojstvom $V_j \subset U_j$. Odatle konačno slijedi da je $B \in <\mathrm{Int\,Cl}\, U_1,\ldots,\mathrm{Int\,Cl}\, U_n>$. Dokaz je gotov.

Drugi glavni teorem ovog odjeljka jest slijedeći teorem.

3.6. TEOREM. T_1 prostor X je skoro kompaktan onda i samo onda kada je prostor Exp(X) skoro kompaktan.

Dokaz. *Neka je X skoro kompaktan. Dokažimo da je Exp(X) skoro kompaktan. Iz leme 3.4. slijedi da je dovoljno pokazati da se podbazni pokrivači prostora Exp(X) reduciraju na konačne potpokrivače. Neka je U* pokrivač prostora Exp(X) sastavljen od podbaznih regularno otvorenih skupova prostora Exp(X). Pokrivač *U* posjeduje skupove prve vrste $<C, \mathrm{Int\,Cl}\, U>$, U otvoren u X, i skupove druge vrste Exp(Int Cl U). U otvoren u prostoru X. Neka F komplement unije –svih Int ClU, gdje je $<X, \mathrm{Int\,Cl}\, U> \in$ *U*. Kako je $F \bigcap$ Int Cl U prazan za sve takve U, to je $F \subset$ Int T Cl V za neki V za koji je Exp (Int Cl V) $\in$ *U*. Skup $G = X - \mathrm{Int\,Cl}\, V$ je regularno zatvoreni podskup prostora X i može se zbog skore kompaktnosti prikazati kao $\mathrm{Int\,Cl}\, U_1 \bigcup \ldots \bigcup \ldots \mathrm{Int\,Cl}\, U_n \subset G$. Odatle $<X, \mathrm{Int\,Cl}\, U_1> \bigcup \ldots \bigcup <X, \mathrm{Int\,Cl}\, U_n> \bigcup \mathrm{Exp}\,(G) = \mathrm{Exp}(X)$. Kako su skupovi $<X, \mathrm{Int\,Cl}\, U>$, U otvoren u X, elementi podbaze prostora X, a $\mathrm{Int\,Cl} <X, U> = <X, \mathrm{Int,\,Cl}\, U>$ (Lema 3.5), to je prema teoremu 3.4. Expl.(X) skoro kompaktan.

Obratno, neka je Exp(X) skoro kompaktan. Dokažimo da je X skoro kompaktan. Neka je *U* regularno otvoreni pokrivač prostora X. Familija $V = \{X, \mathrm{Int\,Cl}\, U> : U \in U)$ je regularno otvoreni pokrivač prostora Exp(X) jer je $\mathrm{Int\,Cl} <X, U> = <X, \mathrm{Int\,Cl}\, U>$ (Lema 3.5). Kako je Exp(X) skoro kompaktan, to *V* ima konačan potpokrivač $\{<X, \mathrm{Int\,Cl}\, U_1>,\ldots,<X, \mathrm{Int\,Cl}\, U_q>\}$. Očito je da je $\{\mathrm{Int\,Cl}\, U_1,\ldots,\mathrm{Int\,Cl}\, U_q\}$ konačan potpokrivač pokrivača *U*. To znači da je X skoro kompaktan. Dokaz je konačno gotov.

4. Završne napomene

Neka je X QHC prostor. Iz leme 2.1. slijedi da Θ-zatvoreni podskupovi prostora X igraju sličnu ulogu kao zatvoreni u kompaktima. Razumno je zbog toga promatrati prostor $\mathrm{Exp}_\Theta(X)$ svih Θ-zatvorenih podskupova prostora X u eksponencijalnoj topologiji. Iz definicije Θ-topologije (početak 2. odjeljka) slijedi da postoji neprekidan identitet id: $X \to \Theta X$. Zbog toga postoji i neprekidan identitet $\mathrm{id}_\Theta : \mathrm{Exp}_\Theta(X) \to \mathrm{Exp}\,(\Theta X)$. Označimo li simbolom $\mathrm{Exp}^\Theta(X)$ skup svih Θ-zatvorenih skupova prostora X u topologiji s bazom $<U_1,\ldots,U_n>$, gdje su $U_1,\ldots,U_n$ Θ-otvoreni podskupovi prostora X, tada preslikavanje id_Θ postaje homeomorfizam. Vrijedi dakle

4.1. TEOREM. Ako je prostor X QHC prostor, tada je $\mathrm{Exp}^\Theta(X)$ kvazikompakt.

Za Θ-kompaktne prostore iz definicije 2.3. obrat očito vrijedi, tj.

4.2. TEOREM. Prostor X je Θ-kompaktan onda i samo onda kada je $Exp^{\Theta}(X)$ kvazikompaktan prostor.

U H-zatvorenim prostorima svakako važnu ulogu imaju H-zatvoreni potprostori. Neka je $Exp_H(X)$ skup svih zatvorenika potprostora prostora X u eksponencijalnoj topologiji.

4.3. PROBLEM. Da li je $Exp_H(X)$ QHC kada je X H-zatvoren (ili QHC)?

Kako je svaki konačan podskup QHC, to iz napomene 2.14.1. slijedi

4.4. TEOREM. Ako je $Exp_H(X)$ QHC, tada je X QHC.

Potprostor hiperprostora $Exp_H(X)$ je Z(X), hiperprostor kompaktnih potprostora.

4.5. PROBLEM. Da li je Z(X) QHC kada je X QHC?

4.6. LEMA. Ako je Z(X) QHC, tada je X QHC.

Dokaz. Vidi napomenu 2.14.1.

Prostor X je *C-kompaktan* [HL] ako za svaki zatvoren podskup $A \subset X$ i svaki otvoreni pokrivač $\{U_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ podskupa A postoji konačna potfamilija $\{U_{\alpha_1},\ldots,U_{\alpha_n}$ sa svojstvom $A \subset \mathrm{Cl}\ U_{\alpha_n}\}$. Svaki C-kompaktan prostor je QHC prostor.

Iz teorema 2.10. sada slijedi

4.7. TEOREM. Ako je X C-kompaktan, tada je Exp(X) QHC prostor.

4.8. PROBLEM. Da li je Exp(X) C-kompaktan kada je X C-kompaktan?

4.9. PROBLEM. Ako je Exp(X) C-kompaktan, da li je X C-kompaktan?

Neka je $Exp_\chi(X)$ odnosno $Exp_\lambda(X)$ skup svih zatvorenih podskupova prostora X u $\varkappa$-topologiji odnosno λ-topologiji. Očito su ove dvije topologije slabije topologije od eksponencijalne, pa iz teorema 2.10. i 3.6. slijedi

4.10. TEOREM. Ako je X QHC prostor, tada su $Exp_\varkappa(X)$ i $Exp_\lambda(X)$ QHC prostori.

4.11. PROBLEM. Da li vrijedi obrat teorema 4.10?

LITERATURA

[B] Bella A., *Some cardinality properties of a hyperspace with the locally finite topology,* Proc. Amer. Math. Soc. 4(1988), 1274-1278.

[Č] Čoban M., *Note sur la topologie exponentielle,* Fund. Math. 71(1971), 27-41.

[IF] Iliadis S. and Fomin S., *The method of centred systems in the theory of topological spaces,* Uspehi mat. nauk (21(1966), 37-63.

[E] Engelking R., *General Topology,* PWN, Warszawa 1977.

[H] Herrington L.L., *Properties of nearly-compact spaces,* Proc. Amer. Math. Soc. 45(1974), 431-436.

[HL] Herrington L.L. and Long P.E., *Characterizations of C-compact spaces,* Proc. Amer. Math. Soc. 52(1975), 417-426.

[K] Kuratovski K., *Topologija I i II,* Mir, Moskva 1966-1969.

[L1] Lončar I., *Inverse limits for spaces which generalize compact spaces,* Glasnik matematički 17(37 (1982), 155-173.

[L3] ———, *A note on inverse systems of H-closed spaces,* Glasnik matematički 19(39) (1984), 169-175.

[L6] ———, Applications of Θ-closed and u-closed sets, Zbornik radova Fakulteta organizacije i informatike Varaždin, 8 (1984), 237-254.

[Ma] Marjanović M.M., *Exponentially complete spaces I,* Glasnik matematički 6(26) (1971), 143-147.

[Mi] Michael E., *Topologies on spaces of subsets,* Trans. Amer. Math. Soc. 71(1951), 152-182.

[Mio] Mioduszewski J. and Rudolf L., *H-closed and extremally disconnected spaces,* Diss. Math. 51, 1969.

[P] Popov V.V., *O prostranstve zamknutyh podmnožestv,* Dokl. Akad. Nauk SSSR 229(1976), 1051-1054.
[Š] Ščepin E.V., *Funktory i nesčetnye stepeni kompaktov,* UMN 36(1981), 3-62.
[Vi] Vinson T.O. and Dickman R.F., *Inverse limits and absolutes of H-closed spaces,* Proc. Amer. Math. Soc. 66(1977), 351-358.
[Z] Zenor P., *On the completness of the space of compact subsets,* Proc. Amer. Math. Soc. 26(1970), 10-192.

Ivan Lončar

HYPERSPACES OF H-CLOSED SPACES

Let X be a topological space. By Exp(X) we denote the set of all closed subset of X with the Vietoris topology. The properties of Exp(X) in the case of compact X are well-known. For proving the analogous properties of Exp(X) for H-closed X we firstly generalize Alexander's lema for H-closed and for nearly compact spaces. For this purpose the notion of $\bigcap$ – subbase is introduced.

In Section Two we prove that the subbase of exponential topology is $\bigcap$ – subbase (Lemma 2.8.). The Alexander's lema is generalized in Theorem 2.9. Finally, the main Theorem of this Section (Theorem 2.10.) i.e. theorem "X is QHC iff Exp(X) is QHC" is proved. Let us recal that X is QHC if each open cover U of X has a finite subfamily $\{U_1,\dots,U_n\}$ such that $X = \mathrm{Cl}\, U_1 \bigcap \dots \bigcap \mathrm{Cl}\, U_n$.

Section Three contains the analogous theorems on Exp(X) for nearly compact spaces (Theorems 3.4. and 3.6.).