Osječki matematički list 14 (2014), 93-103

Jedan problem globalne optimizacije

Petra Corn* Rudolf Scitovski†

Sažetak

U radu se promatra sljedeći problem globalne optimizacije

$$\underset{a\in\mathbb{R}^n}{\operatorname{argmin}} F(a), \quad F(a) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\left(1 + a_1 x + \cdots + a_n x^n\right)^2 dx.$$

Pokazano je da ovaj problem ima jedinstveno rješenje, koje se može odrediti rješavanjem odgovarajućeg problema najmanjih kvadrata ili kao specijalni slučaj jednog općenitijeg problema najbolje aproksimacije u unitarnom vektorskom prostoru. U drugom slučaju primijenjeni su Laguerrovi ortogonalni polinomi. Rješavanje problema ilustrirano je s nekoliko numeričkih primjera.

Ključne riječi: *globalna optimizacija, problem najmanjih kvadrata, najbolja aproksimacija, Laguerrovi polinomi*

On a global optimization problem

Abstract

We consider the following global optimization problem

$$\underset{a\in\mathbb{R}^n}{\operatorname{argmin}} F(a), \quad F(a) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\left(1 + a_1 x + \cdots + a_n x^n\right)^2 dx.$$

It is shown that this problem has a unique solution, which can be determined by solving the corresponding least squares problem or as a special case of a general best approximation problem in a unitary vector space. In the latter case, Laguerre polynomials are applied. The problem solving is illustrated by several numerical examples.

Keywords: *global optimization, least squares problem, best approximation, Laguerre polynomials*

*Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, email: petra.corn@gmail.com

†Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, email: scitowsk@mathos.hr

1 Uvod

Promatramo sljedeći problem globalne optimizacije

$$\operatorname*{argmin}_{a\in\mathbb{R}^n} F(a), \quad F(a) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\left(1 + a_1 x + \cdots + a_n x^n\right)^2 dx, \tag{1}$$

gdje je $a = (a_1, \ldots, a_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Problem su prvi puta 1967. godine postavili Bowman i Gerard [3, str. 327]. Morell [8] je sljedeće godine na vrlo jednostavan način dokazao da je $\min\limits_{a\in\mathbb{R}^n} F(a) = \frac{1}{n+1}$, ali nije odredio vektor $a^\star \in \operatorname*{argmin}\limits_{a\in\mathbb{R}^n} F(a)$. F. Smithies [11] je 1970. godine za rješavanje ovog problema primijenio Laguerrove ortogonalne polinome i vrlo elegantno dobio vrijednost $F(a^\star)$, ali i vektor $a^\star$ s komponentama

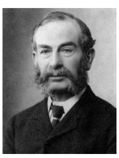
$$a_k^\star = \frac{(-1)^k}{(k+1)!}\binom{n}{k}, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Najprije primijetimo da je gradijent funkcije F vektor

$$\tfrac{1}{2}\operatorname{grad} F(a) = H_F a + b, \tag{3}$$

gdje je

$$H_F = \begin{bmatrix} 2! & 3! & \ldots & (n+1)! \\ 3! & 4! & \ldots & (n+2)! \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ (n+1)! & (n+2)! & \ldots & 2n! \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1! \\ 2! \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ n! \end{bmatrix}, \tag{4}$$



James Joseph Sylvester* *(1814.–1897.)
engleski matematičar, temeljne doprinose dao u matričnoj teoriji, teoriji brojeva i kombinatorici

a da je Hessian funkcije F matrica $2H_F$. Prema Sylvesterovom kriteriju (vidi primjerice [7]) matrica H_F je pozitivno definitna jer su svi njezini glavni minori pozitivni:

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} 2! & \ldots & (k+1)! \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (k+1)! & \ldots & 2k! \end{vmatrix} = (k+1)\left(\prod_{i=1}^{k} i!\right)^2 > 0, \ k = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

Zato je F strogo konveksna funkcija koja ima jedinstvenu točku globalnog minimuma [12], a koju možemo dobiti rješavanjem jednadžbe $\operatorname{grad} F(a) = 0$,

$$H_F a + b = 0. \tag{6}$$

n	$a^\star$	$F(a^\star)$	$\det H_F$	$\operatorname{cond} H_F$
1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	1
2	$(-1, \frac{1}{6})^T$	$\frac{1}{3}$	12	54.31
3	$(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{24})^T$	$\frac{1}{4}$	576	4679.59
5	$(-\frac{5}{2}, \frac{5}{3}, -\frac{5}{12}, \frac{1}{24}, -\frac{1}{720})^T$	$\frac{1}{6}$	$\approx 7.2\times 10^9$	1.4×10^8
7	$(-\frac{7}{2}, \frac{7}{2}, -\frac{35}{24}, \frac{7}{24}, -\frac{7}{240}, \frac{1}{720}, -\frac{1}{40320})^T$	$\frac{1}{8}$	$\approx 1.26\times 10^{23}$	1.53×10^{13}

Tablica 1: Neka rješenja problema (1)

U Tablici 1 navedena su rješenja problema (1) za nekoliko vrijednosti od $n \in \mathbb{N}$, koja su dobivena korištenjem programskog sustava *Mathematica*. Može se primijetiti da porastom n, determinanta Hessiana vrlo brzo raste. Posebno je važno analizirati broj uvjetovanosti Hessiana, koji se za l_2-normu može definirati na sljedeći način [5, 9, 13]:

$$\operatorname{cond} H_F = \frac{\sigma_1}{\sigma_n},$$

gdje su σ_1, σ_n najveća i najmanja singularna vrijednost matrice H_F. Kao što se može vidjeti u Tablici 1, već za $n \geq 8$, broj uvjetovanosti postaje toliko velik da direktno rješavanje jednadžbe (6) više nema smisla. Zato se prirodno postavljaju sljedeća pitanja:

- može li se problem (1) riješiti na neki drugi prihvatljiviji način?
- može li se pronaći opće rješenje problema (1)?

U ovom radu pokazat će se (vidi t. 2) da se problem (1) može riješiti kao linearni problem najmanjih kvadrata ili kao specijalni slučaj jednog općenitijeg problema najbolje aproksimacije u unitarnom vektorskom prostoru. Ako se pri tome koriste Laguerrovi ortogonalni polinomi (vidi t. 3), lako se dobiva opće rješenje problema (1) (vidi t. 3.1).

2 Problem najbolje aproksimacije

Neka je $C(\mathbb{R}_+)$ vektorski prostor realnih neprekidnih funkcija definiranih na $[0, +\infty\rangle$. Na tom prostoru definiramo skalarni produkt s težinskom funkcijom $w(x) = e^{-x}$ na sljedeći način

$$(f,g) := \int_0^{+\infty} w(x)f(x)g(x)dx, \quad f,g \in C(\mathbb{R}_+), \tag{7}$$

te odgovarajuću induciranu normu

$$\|f\|^2 := (f,f) = \int_0^{+\infty} w(x)f^2(x)dx, \quad f \in C(\mathbb{R}_+). \tag{8}$$

Nadalje, ako je $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n) \subset C(\mathbb{R}_+)$ potprostor razapet linearno nezavisnim funkcijama $\varphi_i(x) = x^i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, onda kažemo [4, 9] da je $f^\star \in \mathcal{L}$ najbolja aproksimacija funkcije $f \in C(\mathbb{R}_+)$ na potprostoru $\mathcal{L} \subset C(\mathbb{R}_+)$ ako vrijedi

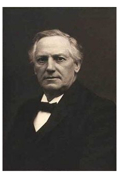
$$\|f - f^\star\| \leq \|f - u\|, \quad \forall u \in \mathcal{L}. \tag{9}$$

Odrediti najbolju aproksimaciju funkcije $f \in C(\mathbb{R}_+)$ na potprostoru $\mathcal{L} \subset C(\mathbb{R}_+)$ znači pronaći $a^\star \in \mathbb{R}^{n+1}$, takav da je $G(a^\star) = \min\limits_{a \in \mathbb{R}^{n+1}} G(a)$, gdje je

$$G(a) = \left\| f - \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i \right\|^2 = \int_0^{+\infty} w(x) \left(f(x) - \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i(x) \right)^2 dx. \tag{10}$$

Nužan uvjet za egzistencije vektora $a^\star \in \mathbb{R}^{n+1}$ ($\operatorname{grad} G(a^\star) = 0$) vodi na rješavanje sustava jednadžbi

$$\begin{array}{l} (\varphi_0,\varphi_0)a_0 + (\varphi_0,\varphi_1)a_1 + \cdots + (\varphi_0,\varphi_n)a_n = (\varphi_0, f) \\ (\varphi_1,\varphi_0)a_0 + (\varphi_1,\varphi_1)a_1 + \cdots + (\varphi_1,\varphi_n)a_n = (\varphi_1, f) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (\varphi_n,\varphi_0)a_0 + (\varphi_n,\varphi_1)a_1 + \cdots + (\varphi_n,\varphi_n)a_n = (\varphi_n, f). \end{array} \tag{11}$$



Jørgen Pedersen Gram (1850.—1916.) *danski matematičar, nositelj imena metode Gram-Schmidtovog postupka iz matrične teorije*

Matrica sustava jednadžbi (11) u literaturi se naziva Gramova matrica i označava s $G(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, a budući da su funkcije $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ linearno nezavisne [4], ona je pozitivno definitna (vidi primjerice [7]). Istovremeno, ta je matrica do na pozitivnu konstantu jednaka Hessianu funkcije G. Dakle, funkcija G strogo je konveksna na skupu $\mathbb{R}^{n+1}$, pa postiže jedinstveni globalni minimum [10, 12] na vektoru $a^\star = (a_1^\star, \ldots, a_n^\star)^T$, koji možemo dobiti rješavanjem sustava (11). Najbolja aproksimacija $f^\star$ funkcije f na potprostoru $\mathcal{L}$ je prema tome $f^\star = a_0^\star \varphi_0 + a_1^\star \varphi_1 + \cdots + a_n^\star \varphi_n$.

Napomena 2.1. Determinanta Gramove matrice u oznaci $\Gamma(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$, je pozitivna [7, str. 347] ako su funkcije $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ linearno nezavisne. Geometrijski, broj $\sqrt{\Gamma(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n)}$ predstavlja volumen paralelotopa određenog vektorima $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$. Osim toga, u tom slučaju vrijedi [7, str. 381]

$$\inf_{a\in\mathbb{R}^{n+1}} G(a) = \min_{a\in\mathbb{R}^{n+1}} G(a) = \tfrac{\Gamma(f,\varphi_0,\varphi_1,\dots,\varphi_n)}{\Gamma(\varphi_0,\varphi_1,\dots,\varphi_n)}. \tag{12}$$

Napomena 2.2. Funkcija F iz problema (1) u ovim oznakama može se zapisati kao

$$F(a) = \left\| 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i \right\|^2,$$

gdje je norma $\|\cdot\|$ zadana s (8), a optimizacijski problem (1) može se promatrati kao linearni problem najmanjih kvadrata [4, str. 101] ili kao problem najbolje aproksimacije konstantne funkcije $x \mapsto 1$ na potprostoru $\mathcal{L} \subset C(\mathbb{R}_+)$ razapetom linearno nezavisnim funkcijama $\varphi_i(x) = x^i$, $i = 1, \dots, n$. Pri tome $C(\mathbb{R}_+)$ je unitarni vektorski prostor sa skalarnim produktom definiranim sa (7). Zato je u ovom slučaju Gramova matrica pozitivno definitna i zadana s (4). Za različite $n \geq 1$ rješenja ovog problema najmanjih kvadrata, odnosno problema najbolje aproksimacije u unitarnom prostoru, podudaraju se s onima prikazanim u Tablici 1.

3 Određivanje najbolje aproksimacije pomoću Laguerrovih polinoma

Ako funkcije $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ iz prethodne točke čine ortogonalan sustav funkcija, tj. ako vrijedi

$$(\varphi_i, \varphi_j) = 0,\ i \neq j \quad i \quad \|\varphi_i\| \neq 0 \text{ za sve } i = 0, 1, \dots, n, \tag{13}$$

onda je matrica sustava (11) dijagonalna, a rješenje se može eksplicitno zapisati [9]

$$a_i^* = \tfrac{(f,\varphi_i)}{(\varphi_i,\varphi_i)}, \quad i = 0, 1, \dots, n. \tag{14}$$

Sustav ortogonalnih funkcija na prostoru $C(\mathbb{R}_+)$ sa skalarnim produktom (7), odnosno normom (8), uz težinsku funkciju $w(x) = e^{-x}$ čine poznati Laguerrovi[1] polinomi koji se mogu definirati na sljedeći način (vidi primjerice [1])

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \tfrac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}), \quad n = 0, 1, \dots. \tag{15}$$

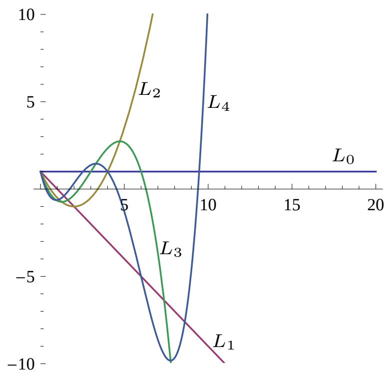
[1]Edmond Laguerre (1834.–1886.), francuski matematičar

Laguerrovi polinomi mogu se dobiti Gram-Schmidtovim[2] postupkom ortogonalizacije baznih funkcija $1, x, \ldots, x^n, \ldots$ na unitarnom vektorskom prostoru $C(\mathbb{R}_+)$ snabdjevenim skalarnim produktom (7) ili kao rješenja linearnih diferencijalnih jednadžbi drugog reda

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0, \quad n = 0, 1, \ldots. \tag{16}$$

Niže je navedeno prvih pet Laguerrovih polinoma, a njihovi grafovi prikazani su na Slici 1. Neka njihova svojstva, koja ćemo koristiti, navedena su u Lemi 3.1.

$$\begin{aligned} &L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = -x + 1, && L_3(x) = \tfrac{1}{3!}(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6), \\ &L_2(x) = \tfrac{1}{2!}(x^2 - 4x + 2) && L_4(x) = \tfrac{1}{4!}(x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24). \end{aligned}$$



Slika 1: Grafovi Laguerrovih polinoma

Lema 3.1. *Neka su $L_0, L_1, \ldots, L_n, \ldots$ Laguerrovi polinomi zadani s* (15).

[2]Erhard Schmidt (1876.–1959.) estonsko-njemački matematičar

Tada vrijedi

$$(i) \quad (L_m, L_n) := \int_0^{+\infty} e^{-x} L_m(x) L_n(x) dx = \begin{cases} 0 & \textit{ako je } m \neq n, \\ 1 & \textit{ako je } m = n, \end{cases} \tag{17}$$

$$(ii) \quad L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k!} x^k, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{18}$$

$$(iii) \quad L_{n+1}(x) = \tfrac{1}{n+1} \left((2n+1-x) L_n(x) - n L_{n-1}(x) \right), \quad n \geq 1, \tag{19}$$

$$(iv) \quad L_n(0) = 1, \quad \forall n = 0, 1, \ldots. \tag{20}$$

Dokaz. Dokažimo najprije tvrdnju (i). Neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Pokažimo najprije da za $m < n$ vrijedi

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^m L_n(x) dx = 0. \tag{21}$$

Primjenom metode parcijalne integracije, dobivamo

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^m L_n(x) dx = \tfrac{1}{n!} \int_0^{\infty} e^{-x} x^m \tfrac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}) dx = \tfrac{m}{n!} \int_0^{\infty} x^{m-1} \tfrac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^n e^{-x}) dx = \cdots$$

$$= (-1)^m \tfrac{m!}{n!} \int_0^{\infty} \tfrac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}(x^m e^{-x}) dx = (-1)^m \tfrac{m!}{n!} \tfrac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}}(x^m e^{-x}) \Big|_0^{+\infty} = 0.$$

Na sličan način može se pokazati da za $m = n$ vrijedi

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^n L_n(x) dx = n!. \tag{22}$$

Kombinirajući (21) i (22) dobivamo (17). Prijeđimo na dokaz tvrdnje (ii). Koristeći Leibnizovu formulu [6, str. 142], dobivamo

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \tfrac{d^k}{dx^k}(e^{-x}) \tfrac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(x^n).$$

Kako je $\frac{d^k}{dx^k}(e^{-x}) = (-1)^k e^{-x}$ i $\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(x^n) = \frac{n!}{k!} x^k$, iz prethodnog izraza lako dobivamo (ii).
Dokaz tvrdnje (iii) može se vidjeti u [2, str. 837].

Dokaz tvrdnje (iv) može se provesti matematičkom indukcijom. Očigledno vrijedi: $L_0(0) = 1$, $L_1(0) = 1$. Pretpostavimo da vrijedi $L_j(0) = 1$, za sve $0 \le j \le n$ i dokažimo da je $L_{n+1}(0) = 1$. Prema (iii) vrijedi

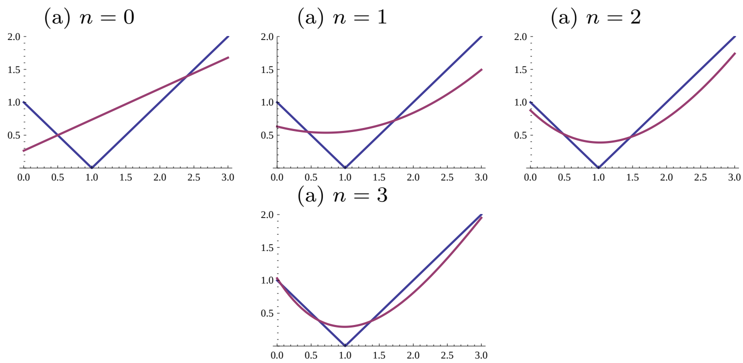
$$L_{n+1}(0) = \tfrac{1}{n+1}\left((2n+1)L_n(0) - nL_{n-1}(0)\right) = \tfrac{1}{n+1}\left((2n+1) - n\right) = 1.$$

□

Primjer 1. Funkciju $f : [0, +\infty\rangle$, $f(x) = |x-1|$ aproksimirat ćemo pomoću Laguerreovih polinoma. Sukladno (14), najbolja l_2-aproksimacija na $[0, +\infty\rangle$ uz težinsku funkciju $w(x) = e^{-x}$ je

$$f^\star(x) = \sum_{i=0}^{n} (f, L_i(x)) L_i(x).$$

Na Slici 2 prikazane su aproksimacije funkcije f za $n = 0, 1, 2, 3$.



Slika 2: Najbolje l_2-aproksimacije funkcije $x \mapsto |x-1|$ na $[0, +\infty\rangle$ uz težinsku funkciju $w(x) = e^{-x}$

3.1 Rješavanje optimizacijskog problema (1) pomoću Laguerrovih polinoma

Budući da je stupanj Laguerrovog polinoma L_j jednak j, postoje brojevi $k_0, k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{R}$, takvi da vrijedi

$$1 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = k_0 L_0(x) + k_1 L_1(x) + \ldots k_n L_n(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{23}$$

Specijalno zbog (20) za $x = 0$ dobivamo

$$1 = k_0 + k_1 + \ldots + k_n. \tag{24}$$

Zato funkcija F zadana s (1) postaje

$$\begin{aligned} F(a) &= \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\left(1+a_1x+\cdots+a_nx^n\right)^2 dx \\ &= \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\left(k_0L_0(x)+k_1L_1(x)+\cdots+k_nL_n(x)\right)^2 dx \\ &= k_0^2+k_1^2+\ldots+k_n^2 =: G(k_0,k_1,\ldots,k_n), \end{aligned} \tag{25}$$

gdje je korišteno svojstvo ortogonalnosti (17) Laguerrovih polinoma. Zato se problem (1) svodi na sljedeći problem uvjetnog ekstrema [10]:

$$\begin{aligned} &\operatorname*{argmin}_{k_0,k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{R}} \; G(k_0,k_1,\ldots,k_n), \\ &\text{uz uvjet } k_0+k_1+\ldots+k_n=1. \end{aligned} \tag{26}$$

Problem (26) riješit ćemo Lagrangeovom metodom neodređenih multiplikatora. U tu svrhu definiramo pomoćnu funkciju

$$\Phi(k_0,k_1,\ldots,k_n,\lambda) := k_0^2+k_1^2+\ldots+k_n^2+\lambda(k_0+k_2+k_3+\ldots+k_n-1). \tag{27}$$

Iz nužnog uvjeta lokalnog minimuma funkcije Φ dobivamo jednostavni sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial\Phi}{\partial k_i} = 2k_i+\lambda = 0, \quad i=0,1,\ldots,n, \\ &k_0+k_2+k_3+\ldots+k_n=1, \end{aligned}$$

čije je rješenje

$$\lambda^\star = -\tfrac{2}{n+1}, \quad k_0^\star = k_1^\star = \cdots = k_n^\star = \tfrac{1}{n+1}. \tag{28}$$

Optimalna vrijednost funkcije G, odnosno F, je

$$G(k_0^\star,k_1^\star,\cdots,k_n^\star) = (n+1)\tfrac{1}{(n+1)^2} = \tfrac{1}{n+1}. \tag{29}$$

Pokažimo još da su optimalne vrijednosti $a_1^\star,\ldots,a_n^\star$ koeficijenata, koji se pojavljuju u zapisu funkcije F, zadane s (2). Naime, koristeći (18) u (23), dobivamo

$$\begin{aligned} &1+a_1^\star x+\ldots+a_n^\star x^n \\ &\quad= \tfrac{1}{n+1}\left(1+\sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}\tfrac{(-1)^k}{k!}x^k+\sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k}\tfrac{(-1)^k}{k!}x^k+\cdots+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\tfrac{(-1)^k}{k!}x^k\right). \end{aligned}$$

Izjednačavajući koeficijente uz jednake potencije, dobivamo

$$a_k^\star = \tfrac{1}{n+1}\left(\binom{k}{k}\tfrac{(-1)^k}{k!} + \binom{k+1}{k}\tfrac{(-1)^k}{k!} + \cdots + \binom{n}{k}\tfrac{(-1)^k}{k!}\right) = \tfrac{1}{n+1}\tfrac{(-1)^k}{k!}\sum_{i=k}^{n}\binom{i}{k},$$

$k = 1, \ldots, n.$

Ako u prethodnom izrazu iskoristimo identitet

$$\sum_{i=k}^{n}\binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}, \quad 0 \le k \le n, \tag{30}$$

konačno dobivamo

$$a_k^\star = \frac{(-1)^k}{(k+1)!}\binom{n}{k}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Literatura

[1] A.S. Ackleh, E.J. Allen, R.B. Kearfott, P. Seshaiyer, *Classical and Modern Numerical Analysis. Theory, Methods and Practice.* Chapman and Hall/CRC, 2010.

[2] G.B. Arfken, H.J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide*, Sixth Edition, Elsevier, 2005.

[3] F. Bowman, F.A. Gerard, *Higher Calculus*, Cambridge University Press, 1967.

[4] E.W. Cheney, *Introduction to Approximation Theory*, American Mathematical Society, Providence, 1998.

[5] G.H. Golub, C.F. van Loan, *Matrix Computations*, The J.Hopkins University Press, Baltimore and London, 1996.

[6] D. Jukić, R. Scitovski, *Matematika I*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, 2004.

[7] S. Kurepa, *Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primjene*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1967.

[8] L.J. Mordell, *The minimum value of a definite integral*, The Mathematical Gazette **52**(1968), 135–136.

[9] R. Scitovski, *Numerička matematika*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, 2004.

[10] R. Scitovski, N. Truhar, Z. Tomljanović, *Metode optimizacije*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, 2014.

[11] F. Smithies, *Two remarks on note by Mordell*, The Mathematical Gazette **54**(1970), 260–261.

[12] E. Süli, D. Mayers, *An Introduction to Numerical Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[13] N. Truhar, *Numerička linearna algebra*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, 2010.