Osječki matematički list 14 (2014), 105-116

Položaj nultočaka polinoma

Mandalena Pranjić [*] Rajna Rajić [†]

Sažetak

Prema Rolleovom teoremu, bilo koji segment čiji su krajevi međusobno različite realne nultočke polinoma $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sadrži barem jednu stacionarnu točku polinoma p. U radu su prikazani kompleksni analogoni ovog teorema: Gauss–Lucasov teorem o položaju stacionarnih točaka polinoma $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ u odnosu na njegove nultočke, te Jensenov teorem o položaju ne-realnih stacionarnih točaka polinoma $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ s realnim koeficijentima u odnosu na njegove nultočke. Primjena ovih teorema ilustrirana je primjerima.

Ključne riječi: *nultočke polinoma, stacionarne točke, derivacija*

Location of roots of polynomials

Abstract

By Rolle's Theorem, any segment whose endpoints are mutually distinct real roots of a polynomial $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contains at least one stationary point of the polynomial p. Complex analogues of this theorem are presented in this paper: Gauss–Lucas Theorem on the location of stationary points of a polynomial $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ with respect to the roots of the polynomial itself, and Jensen's Theorem on the location of non-real stationary points of a polynomial $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ with real coefficients with respect to its roots. The application of these theorems is illustrated by examples.

Keywords: *roots of polynomials, stationary points, derivative*

[*]email: mandy.dena@gmail.com

[†]Rudarsko-geološko-naftni fakultet, Sveučilište u Zagrebu, Pierottijeva 6, Zagreb, email: rajna.rajic@rgn.hr

1 Uvod

Pod pojmom *polinoma* podrazumijevamo funkciju $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oblika

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \tag{1}$$

gdje je $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, a $a_0, \ldots, a_n$ realni brojevi koje nazivamo *koeficijentima polinoma.* Ako je $a_n \neq 0$, kažemo da je p polinom n-tog stupnja. Polinom nultog stupnja nazivamo *konstantnim polinomom* ili *konstantom.* Za polinom prvog stupnja uobičajen je naziv *afina funkcija.* Polinom drugog stupnja zovemo *kvadratnom*, a polinom trećeg stupnja *kubičnom funkcijom.* S afinim funkcijama susreli smo se još u osnovnoj školi, dok se s kvadratnim funkcijama upoznajemo u srednjoj školi.

Polinomi su najjednostavnije elementarne funkcije. Njihova je uloga značajna kako u matematici, tako i u primjenama. Pomoću polinoma mogu se dobro aproksimirati mnoge druge složenije funkcije. Pri proučavanju funkcija važnu ulogu ima crtanje njihova grafa. Graf polinoma je krivulja u ravnini čiji oblik ovisi o stupnju promatranog polinoma. Znamo da je graf afine funkcije pravac, a kvadratne parabola. Grafovi polinoma višeg stupnja složenije su krivulje u ravnini. Da bismo ih skicirali (čime podrazumijevamo nalaženje nultočaka, tj. točaka u kojima graf funkcije siječe os apscisa, zatim intervala rasta, odnosno pada danog polinoma, točaka lokalnih minimuma i maksimuma itd.) potrebno je ovladati nekim znanjima iz matematičke analize, prvenstveno osnovnim teoremima diferencijalnog računa.

Nultočke polinoma (1) rješenja su algebarske jednadžbe

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0. \tag{2}$$

Polinom prvog stupnja ima jednu realnu nultočku, koja iznosi $-a_0/a_1$. Polinom drugog stupnja može imati dvije različite realne nultočke ili jednu dvostruku realnu nultočku ili nema realnih nultočaka, ovisno o predznaku diskriminante kvadratne jednadžbe (2). Ako je diskriminanta $D = a_1^2 - 4a_2a_0 \geq 0$, tada su nultočke kvadratnog polinoma (1) realni brojevi

$$x_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{D}}{2a_2}.$$

Općenito, svaki polinom neparnog stupnja ima barem jednu realnu nultočku, dok polinom parnog stupnja ne mora imati realnih nultočaka. Postoje formule za izračunavanje nultočaka polinoma trećeg stupnja (Cardanova formula), te polinoma četvrtog stupnja (Ferrarijeva metoda). Opise

Niels Henrik Abel* *(1802.–1829.)
veški matematičar po kojem je tematička inačica Nobelove nagrade (tzv. Abelova *rada) dobila ime.*

ovih metoda zainteresirani čitatelj može pronaći u [3, 10]. N. H. Abel je 1824. godine dokazao da ne postoje opće formule kojima bi se, primjenom konačno mnogo operacija zbrajanja, oduzimanja, množenja, dijeljenja, potenciranja i korjenovanja nad koeficijentima polinoma, mogle izračunati nultočke polinoma čiji je stupanj veći od četiri. Stoga, općenito gledano, jedini način nalaženja nultočaka polinoma su iterativne metode. Iterativnim postupcima mogu se s unaprijed zadanom točnošću približno odrediti nultočke polinoma. No da bi se takvi postupci mogli primijeniti, potrebno je najprije izolirati nultočku polinoma, tj. odrediti što manji interval u skupu realnih brojeva koji sadrži točno jednu nultočku polinoma. Unutar tog intervala bira se početna aproksimacija nultočke polinoma i zatim rekurzivnom formulom zadaje niz brojeva koji će, ukoliko zadani polinom na promatranom intervalu zadovolji neke uvjete, konvergirati prema nultočki polinoma.
Nadalje, pri nalaženju točaka lokalnih ekstrema funkcije, prvi je korak nalaženje *stacionarnih točaka* te funkcije, tj. nultočaka njezine prve derivacije. Dakle, i problem određivanja ekstrema svodi se na problem nalaženja nultočaka.

Možemo se zapitati postoji li neka veza između položaja nultočaka polinoma i položaja njegovih stacionarnih točaka. Promotrimo najprije kvadratni polinom

$$p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Njegova je derivacija polinom

$$p'(x) = 2a_2x + a_1.$$

Ako polinom p ima dvije različite realne nultočke

$$x_1 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2}, \quad x_2 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2},$$

onda nultočka $c = -a_1/(2a_2)$ polinoma p' pripada segmentu čiji su krajevi nultočke x_1 i x_2 polinoma p. (Posebno, c je polovište segmenta $[x_1, x_2]$.) Vrijedi li ova tvrdnja općenito, tj. za polinom proizvoljnog stupnja? Odgovor je potvrdan. Prema Rolleovom teoremu, jednom od osnovnih teorema diferencijalnog računa, svaka funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $a \neq b$, neprekidna na segmentu $[a, b]$ i diferencijabilna na intervalu $\langle a, b\rangle$, za koju je $f(a) = f(b)$, ima barem jednu stacionarnu točku $c \in \langle a, b\rangle$. Polinomi zadovoljavaju pretpostavke Rolleovog teorema, pa stoga svaki polinom barem drugog stupnja s najmanje dvije različite realne nultočke ima barem jednu stacionarnu točku koja pripada segmentu čiji su krajevi te nultočke. Ovo nam govori da poznavajući nultočke polinoma p možemo približno odrediti položaj njegovih stacionarnih točaka.

Idemo sada korak dalje. Polinome smo definirali kao realne funkcije realne varijable, odnosno kao funkcije čija domena i kodomena su skup realnih brojeva. Odsada pod polinomom podrazumijevamo preslikavanje $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zadano formulom

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \tag{3}$$

pri čemu su koeficijenti polinoma $a_0, \ldots, a_n$ kompleksni brojevi.
Nultočkom polinoma p zvat ćemo svaki kompleksni broj c takav da je $p(c) = 0$. Posebno, ako je $c \in \mathbb{R}$, kažemo da je c *realna nultočka* polinoma p.
Prema osnovnom teoremu algebre svaki polinom p stupnja $n \geq 1$ ima barem jednu kompleksnu nultočku. Kao posljedicu tog teorema, svaki polinom (3) n-tog stupnja možemo na jedinstven način prikazati kao umnožak n linearnih faktora

$$p(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n),$$

gdje su $z_1, z_2, \ldots, z_n$ nultočke polinoma p (među kojima može biti i jednakih).

Ako su svi koeficijenti polinoma (3) realni brojevi, tada se ne-realne nultočke tog polinoma pojavljuju kao parovi konjugirano-kompleksnih brojeva. Dakle, ako je $c = a + ib$, $b \neq 0$, nultočka polinoma p, onda je $\overline{c} = a - ib$ također nultočka od p.

Derivacijom p' polinoma (3) n-tog stupnja ($n \in \mathbb{N}$) nazivamo polinom

$$p'(z) = n a_n z^{n-1} + (n-1) a_{n-1} z^{n-2} + \cdots + a_2 z + a_1$$

$(n-1)$-og stupnja.
Ako je p konstantni polinom, onda je p' nul-polinom, tj. $p'(z) = 0$ za svaki $z \in \mathbb{C}$.

Vidjeli smo da se stacionarne točke polinoma realne varijable mogu locirati ako su poznate njegove realne nultočke. Prirodno se postavlja pitanje postoji li analogni rezultat za polinome p kompleksne varijable, tj. možemo li, poznavajući nultočke polinoma (3), odrediti položaj njegovih stacionarnih točaka. Odgovor je potvrdan; i zapravo je mnogo zanimljivih radova napisano na temu lociranja stacionarnih točaka polinoma kompleksne varijable (v. npr. [1],[2],[4],[5],[7],[8],[9],[13]). U ovom radu prezentiramo neke od najvažnijih rezultata iz ovog područja.

2 Gauss–Lucasov i Jensenov teorem

Prvi kompleksni analogon Rolleovog teorema iskazao je Gauss 1836. godine, a dokazao francuski inženjer Lucas 1874. godine. U literaturi se rezultat spominje pod nazivom Gauss–Lucasov teorem. Pri određivanju položaja stacionarnih točaka polinoma, ovaj teorem je od temeljnog značaja. Prije nego što ga dokažemo, uvest ćemo pojam konveksne ljuske skupa.

Skup $S \subseteq \mathbb{C}$ je konveksan ako sadrži svaki segment čiji rubovi su elementi tog skupa. *Konveksna ljuska* skupa S, u oznaci $\operatorname{co} S$, je najmanji konveksni skup koji sadrži S. Uočimo da je konveksna ljuska konačnog skupa S najmanji konveksni poligon koji sadrži S.
Za dokaz Gauss–Lucasovog teorema treba nam sljedeći pomoćni rezultat.

Lema 2.1. *Neka su dani kompleksni brojevi $w_j = r_j e^{i\theta_j}$, $j = 1, \ldots, n$, pri čemu je*

$$r_j > 0, \quad \gamma \leq \theta_j < \gamma + \delta, \quad j = 1, \ldots, n,$$

gdje su γ, δ realne konstante, $\delta < \pi$. Tada je njihova suma

$$w = \sum_{j=1}^{n} w_j$$

različita od nule.

Dokaz. Dovoljno je promatrati slučaj kada je $\gamma = 0$. Opći slučaj se jednostavno dobiva rotacijom za kut γ. Za $\gamma = 0$ imamo $0 \leq \theta_j < \delta$ za $j = 1, \ldots, n$. Tada je $w_j = x_j + y_j e^{i\delta}$, gdje su $x_j = \frac{r_j \sin(\delta - \theta_j)}{\sin \delta}$ pozitivni i $y_j = \frac{r_j \sin \theta_j}{\sin \delta}$ nenegativni realni brojevi za $j = 1, \ldots, n$. Označimo

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j, \quad y = \sum_{j=1}^{n} y_j.$$

Tada je

$$w = \sum_{j=1}^{n} w_j = \sum_{j=1}^{n} x_j + \Big(\sum_{j=1}^{n} y_j\Big) e^{i\delta} = x + y e^{i\delta}.$$

Pretpostavimo da je $w = 0$. Tada je

$$0 = w e^{-i\delta} = x e^{-i\delta} + y = x \cos \delta + y - i x \sin \delta,$$

odakle slijedi $x \sin \delta = 0$. Međutim, to je nemoguće budući da je $x > 0$ i $\sin \delta > 0$. Prema tome, $w \neq 0$. $\square$

Teorem 2.1 (Gauss–Lucas). *Nultočke polinoma p' pripadaju konveksnoj ljusci skupa nultočka polinoma p.*

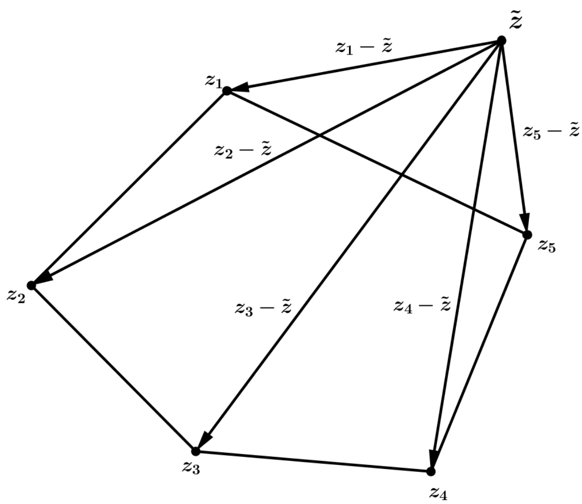
Dokaz. Neka je $p(z) = a_n(z - z_1)\cdots(z - z_n)$. Logaritmiranjem ovog izraza dobije se

$$\ln p(z) = \ln a_n + \ln(z - z_1) + \cdots + \ln(z - z_n),$$

a zatim deriviranjem

$$\frac{p'(z)}{p(z)} = \frac{1}{z - z_1} + \cdots + \frac{1}{z - z_n} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z - z_j}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}. \quad (4)$$

Pretpostavimo da polinom p' ima nultočku $\tilde{z} \notin \mathrm{co}\{z_1, \ldots, z_n\}$. Budući da je $\mathrm{co}\{z_1, \ldots, z_n\}$ konveksan poligon, to postoje realne konstante γ i δ, gdje je $\delta < \pi$, takve da za argumente kompleksnih brojeva $z_j - \tilde{z} = \rho_j e^{i\theta_j}$ vrijedi $\gamma \leq \theta_j < \gamma + \delta$ za svaki $j = 1, \ldots, n$. (Primijetimo da pritom kompleksne brojeve $z_j - \tilde{z}$ možemo shvaćati kao vektore $\overrightarrow{\tilde{z}z_j}$; Slika 1.)



Slika 1: Ilustracija Gauss–Lucasovog teorema

Definiramo brojeve $w_j = r_j e^{i\theta_j}$, gdje je $r_j = \frac{1}{\rho_j}$ za $j = 1, \ldots, n$. Tada je

$$w_j = \frac{1}{\rho_j e^{-i\theta_j}} = \frac{1}{\overline{z_j} - \overline{\tilde{z}}}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Odavde i prema (4) slijedi

$$0 = -\overline{\frac{p'(\tilde{z})}{p(\tilde{z})}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\overline{z_j} - \overline{\tilde{z}}} = \sum_{j=1}^{n} w_j,$$

što je nemoguće prema lemi 2.1. Prema tome, sve nultočke polinoma p' leže u $\mathrm{co}\{z_1, \ldots, z_n\}$, čime je teorem dokazan. $\square$

Gauss–Lucasov teorem odnosi se na polinome s kompleksnim koeficijentima. Sada ćemo promatrati polinome kompleksne varijable s realnim koeficijentima. Hoće li nam ovo dodatno ograničenje omogućiti bolji zaključak o raspodjeli stacionarnih točaka? Potvrdan odgovor na ovo pitanje daje nam Jensenov teorem kojeg dokazujemo u nastavku.

Neka je p polinom kompleksne varijable s realnim koeficijentima. Kao što smo rekli, ne-realne nultočke takvih polinoma javljaju se kao parovi konjugirano-kompleksnih brojeva. Za svaki konjugirano-kompleksni par $z = x + iy$ i $\overline{z} = x - iy$ nultočaka od p, konstruiramo krug sa središtem u točki x i polumjerom $|y|$, tj. krug čiji dijametar spaja točke z i $\overline{z}$. Tako konstruirani krugovi nazivaju se *Jensenovi krugovi* polinoma p.

Teorem 2.2 (Jensen). *Ako je p polinom s realnim koeficijentima, tada svaka ne–realna nultočka od p' leži u nekom od Jensenovih krugova polinoma p.*

Dokaz. Neka je p polinom n-tog stupnja s nultočkama $z_1, \ldots, z_n$. Neka je $w = x + iy$ proizvoljan ne-realan kompleksan broj koji leži izvan svih Jensenovih krugova polinoma p. Jasno je da je $p(w) \neq 0$. Pokazat ćemo da je i $p'(w) \neq 0$. Kako je

$$p(z) = a_n(z - z_1) \cdots (z - z_n),$$

to se logaritmiranjem, pa zatim deriviranjem tog izraza dobije

$$P(z) = \frac{p'(z)}{p(z)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z - z_j}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}. \tag{5}$$

Neka je $w_j = \frac{1}{w - z_j}$ za $j = 1, \ldots, n$. Ako je $z_k = x_k + iy_k$ i $z_l = x_k - iy_k$

konjugirano-kompleksni par nultočaka polinoma p, onda je

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(w_k+w_l) &= \operatorname{Im}(w_k)+\operatorname{Im}(w_l)\\ &= \operatorname{Im}\Big(\frac{1}{w-z_k}\Big)+\operatorname{Im}\Big(\frac{1}{w-z_l}\Big)\\ &= \operatorname{Im}\Big(\frac{\overline{w}-\overline{z_k}}{|w-z_k|^2}\Big)+\operatorname{Im}\Big(\frac{\overline{w}-\overline{z_l}}{|w-z_l|^2}\Big)\\ &= \frac{y_k-y}{(x-x_k)^2+(y-y_k)^2}-\frac{y_k+y}{(x-x_k)^2+(y+y_k)^2}\\ &= \frac{-2y\left[(x-x_k)^2+y^2-{y_k}^2\right]}{\left[(x-x_k)^2+(y-y_k)^2\right]\left[(x-x_k)^2+(y+y_k)^2\right]}.\end{aligned}$$

Kako $w=x+iy$ leži izvan Jensenovog kruga sa središtem u x_k i polumjerom $|y_k|$, tj. kako je $|w-x_k|>|y_k|$, odnosno

$$(x-x_k)^2+y^2>y_k^2,$$

zaključujemo da je

$$\operatorname{sgn}(\operatorname{Im}(w_k+w_l))=-\operatorname{sgn}(y). \tag{6}$$

S druge strane, ako je z_i realna nultočka polinoma p, onda je

$$\operatorname{Im} w_i=\frac{-y}{(x-z_i)^2+y^2},$$

pa je stoga

$$\operatorname{sgn}(\operatorname{Im} w_i)=-\operatorname{sgn}(y). \tag{7}$$

Kako je prema (5)

$$P(w)=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{w-z_j}=\sum_{\operatorname{Im} z_j=0}\frac{1}{w-z_j}+\sum_{\operatorname{Im} z_j\neq 0}\frac{1}{w-z_j}=\sum_{\operatorname{Im} z_j=0}w_j+\sum_{\operatorname{Im} z_j\neq 0}w_j,$$

slijedi da je

$$\operatorname{Im} P(w)=\operatorname{Im}\Big(\sum_{\operatorname{Im} z_j=0}w_j\Big)+\operatorname{Im}\Big(\sum_{\operatorname{Im} z_j\neq 0}w_j\Big),$$

pa su prema (6) i (7) brojevi $\operatorname{Im} P(w)$ i y suprotnog predznaka. Zaključujemo da je $P(w)\neq 0$, pa je stoga i $p'(w)\neq 0$. Ovime smo pokazali da ne-realni kompleksni brojevi koji leže izvan svih Jensenovih krugova ne mogu biti nultočke polinoma p'. Drugim riječima, svaka je nultočka polinoma p' unutar nekog Jensenovog kruga polinoma p. $\square$

3 Primjeri

U ovoj točki na primjerima ilustriramo primjenu Gauss–Lucasovog i Jensenovog teorema.

Primjer 1. Neka je dan polinom $p(z) = cz^n - z + 1$, gdje je $c \neq 0$, a $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Pokažite da polinom p ima barem jednu nultočku $\tilde{z}$ za koju je $|\tilde{z} - 1| \leq 1$ i barem jednu nultočku $\hat{z}$ za koju vrijedi $|\hat{z} - 1| \geq 1$. Pritom može biti $\tilde{z} = \hat{z}$.

Rješenje. Promatrajmo najprije slučaj $n = 2$. Neka je $w = z - 1$. Tada dobivamo polinom drugog stupnja

$$q(w) := p(z) = p(w+1) = cw^2 + (2c-1)w + c,$$

čije nultočke označimo s $\tilde{w}$ i $\hat{w}$. Kako je umnožak nultočaka jednak 1, slijedi da ili obje nultočke polinoma q leže na kružnici sa središtem u ishodištu polumjera 1, tj. $|\tilde{w}| = |\hat{w}| = 1$, ili pak jedna nultočka leži unutar kruga sa središtem u ishodištu polumjera 1, tj. $|\tilde{w}| < 1$, a druga izvan tog kruga, tj. $|\hat{w}| > 1$. Prema tome, $|\tilde{z} - 1| = |\hat{z} - 1| = 1$, ili $|\tilde{z} - 1| < 1$, $|\hat{z} - 1| > 1$, gdje su $\tilde{z} = \tilde{w} + 1$ i $\hat{z} = \hat{w} + 1$ nultočke od p.

Neka je $n \geq 3$. Derivacija polinoma $p(z) = cz^n - z + 1$ jednaka je $p'(z) = ncz^{n-1} - 1$, pa su nultočke polinoma p' rješenja jednadžbe

$$z^{n-1} = \frac{1}{nc}.$$

Dakle, sve nultočke od p' leže na kružnici polumjera $\frac{1}{\sqrt[n-1]{n|c|}}$ sa središtem u ishodištu. Kako je $n - 1 \geq 2$, barem jedna nultočka od p' leži u poluravnini $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0\}$. Prema Gauss–Lucasovom teoremu, nultočka od p' mora pripadati konveksnoj ljusci skupa nultočaka od p. Stoga mora postojati nultočka $\hat{z}$ od p koja se nalazi u poluravnini $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0\}$, pa prema tome zadovoljava nejednadžbu $|\hat{z} - 1| \geq 1$. Još nam preostaje pokazati da p ima nultočku $\tilde{z}$ za koju vrijedi $|\tilde{z} - 1| \leq 1$. Drugim riječima, uz zamjenu $w = z - 1$, treba pokazati da jednadžba $c(w+1)^n - w = 0$ ima rješenje $\tilde{w} = \tilde{z} - 1$ za koje vrijedi $|\tilde{w}| \leq 1$. Označimo li $v = \frac{1}{w}$, jednadžba $c(w+1)^n - w = 0$ poprima oblik

$$c(v+1)^n - v^{n-1} = 0. \tag{8}$$

Stoga treba pokazati da postoji rješenje $\tilde{v} = \frac{1}{\tilde{w}}$ jednadžbe (8) za koje vrijedi $|\tilde{v}| \geq 1$. Konačno, za $v = u - 1$, jednadžba (8) je oblika

$$cu^n - (u-1)^{n-1} = 0, \tag{9}$$

pa tražimo rješenje $\tilde{u} = \tilde{v} + 1$ tako da je $|\tilde{u} - 1| \geq 1$. Neka je $\operatorname{co} S$ konveksna ljuska skupa rješenja jednadžbe (9). Prema teoremu 2.1, $\operatorname{co} S$ mora sadržavati obje nultočke derivacije $(n-2)$-og reda

$$u \mapsto \frac{cn!}{2}u^2 - (n-1)!(u-1),$$

odnosno obje nultočke polinoma

$$u \mapsto \frac{cn}{2}u^2 - u + 1.$$

Pokazali smo da ovaj polinom drugog stupnja ima nultočku $\hat{u}$ za koju vrijedi $|\hat{u} - 1| \geq 1$. Kako je osim toga $\hat{u} \in \operatorname{co} S$, slijedi da postoji rješenje $\tilde{u}$ jednadžbe (9) takvo da je $|\tilde{u} - 1| \geq 1$. Zaključujemo da za nultočku $\tilde{z} = \frac{1}{\tilde{u}-1} + 1$ polinoma $p(z) = cz^n - z + 1$ vrijedi $|\tilde{z} - 1| \leq 1$.

Primjer 2. Odredite položaj stacionarnih točaka polinoma $p(z) = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$.

Rješenje. Želimo locirati nultočke polinoma

$$q(z) = p'(z) = 4z^3 + 3z^2 + 2z + 1.$$

Pomnožimo li polinom p sa $z - 1$ dobivamo

$$(z-1)p(z) = z^5 - 1.$$

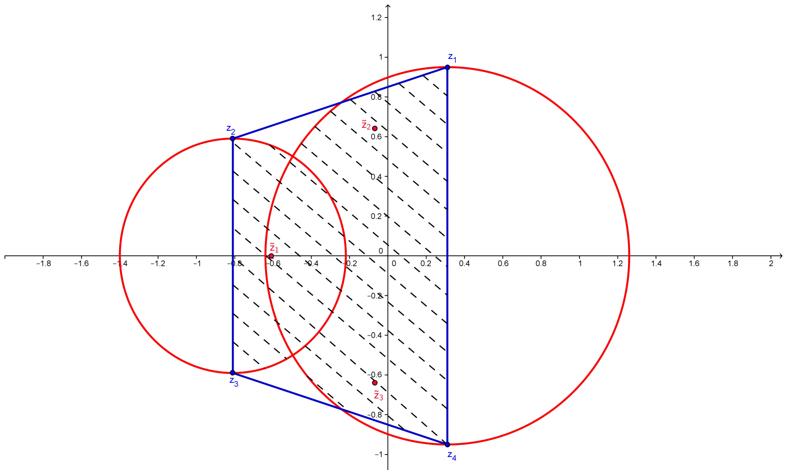
Stoga su nultočke polinoma p

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{5}, \qquad k = 1, 2, 3, 4.$$

Pri tome je $z_3 = \overline{z_2}$, $z_4 = \overline{z_1}$. Prema Gauss–Lucasovom teoremu nultočke od q leže u $\operatorname{co}\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$, tj. unutar poligona čiji su vrhovi z_1, z_2, z_3 i z_4.
Uočimo da je q strogo rastuća funkcija na $\mathbb{R}$, budući da je njena derivacija $q'(z) = 12z^2 + 6z + 2 > 0$ za svaki $z \in \mathbb{R}$. To znači da polinom q ima točno jednu realnu nultočku $\tilde{z}_1$. Prema Jensenovom teoremu konjugirano-kompleksne nultočke $\tilde{z}_2$ i $\tilde{z}_3$ polinoma q leže u nekom od Jensenovih krugova polinoma p; dakle u krugu čiji dijametar spaja točke z_1 i z_4, ili u krugu čiji dijametar spaja točke z_2 i z_3. (Unutar iscrtkanog područja na Slici 2 nalazi se par konjugirano-kompleksnih nultočaka $\tilde{z}_2$ i $\tilde{z}_3$, dok realna nultočka $\tilde{z}_1$ leži u konveksnom poligonu s vrhovima z_1, z_2, z_3 i z_4.)

Nekom od numeričkih metoda za približno određivanje nultočaka polinoma (v. npr. [3, 6, 14]) može se pokazati da su nultočke polinoma q :

$$\widetilde{z_1} \approx -0,61, \quad \widetilde{z_2} \approx -0,07 + 0,64i, \quad \widetilde{z_3} \approx -0,07 - 0,64i.$$



Slika 2: Ilustracija primjera 2

Literatura

[1] A. Aziz, *A new proof of Laguerre's theorem about the zeros of polynomials*, Bull. Austral. Math. Soc. **33** (1986), 131–138.

[2] J. S. C. Cheng, *On the distribution of the critical points of a polynomial*, `http://www.math.washington.edu/~morrow/336_12/papers/jerry.pdf`

[3] B. Dakić, B. Pavković, *Polinomi*, Školska knjiga, Zagreb, 1987.

[4] A. W. Goodman, Q. I. Rahman, J. S. Ratti, *On the zeros of a polynomial and its derivative*, Proc. Amer. Math. Soc. **21** (1969), 273–274.

[5] E. Grosswald, *Recent application of some old work of Laguerre*, Amer. Math. Monthly **86** (1979), 648–658.

[6] I. Ivanšić, *Numerička matematika*, Element, Zagreb, 1998.

[7] A. Joyal, *On the zeros of a polynomial and its derivative*, J. Math. Anal. Appl. **25** (1969), 315–317.

[8] D. Kalman, *An elementary proof of Marden's theorem*, Amer. Math. Monthly **115** (4) (2008), 330–338.

[9] M. Marden, *Geometry of Polynomials*, 2nd edition, Mathematical Surveys, no. 3, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1966.

[10] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika I*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.

[11] M. Pranjić, *Nultočke polinoma*, diplomski rad, PMF-Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu, 2013.

[12] V. V. Prasolov, *Polynomials*, 2nd edition, Moscow Center for Continuous Math. Education, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2004.

[13] E. B. Saff, J. B. Twomey, *A note on the location of critical points of polynomials*, Proc. Amer. Math. Soc. **27** (1971), 303–308.

[14] R. Scitovski, *Numerička matematika*, Odjel za matematiku Sveučilišta u Osijeku, Osijek, 2004.