Osječki matematički list 14 (2014), 143-156

O realnim nultočkama polinoma oblika $x^n - x - 1$

Luka Marohnić * Bojan Kovačić † Bojan Radišić ‡

Sažetak

U članku se najprije za svaki prirodan broj $n \geq 2$ pokazuje da polinom $\pi_n(x) = x^n - x - 1$ ima jedinstvenu pozitivnu nultočku φ_n. Zatim se dokazuju neka svojstva niza brojeva $(\varphi_n)_{n\geq 2}$ i daje se jedna moguća formula za približno izračunavanje brojeva φ_n.

Ključne riječi: *polinom, nultočka, niz, zlatni rez, plastična konstanta, aproksimacija, Newtonova metoda*

On real roots of polynomials $x^n - x - 1$

Abstract

In this paper, it is first shown that for every natural number $n \geq 2$ the polynomial $\pi_n(x) = x^n - x - 1$ has a unique positive root φ_n. Then some properties of the sequence $(\varphi_n)_{n\geq 2}$ are proved and a possible approximation for the numbers φ_n is given.

Keywords: *polynomial, root, sequence, golden ratio, plastic number, approximation, Newton's method*

*Tehničko veleučilište u Zagrebu, Vrbik 8, Zagreb, e-mail: luka.marohnic@tvz.hr
†Tehničko veleučilište u Zagrebu, Vrbik 8, Zagreb, e-mail: bojan.kovacic@tvz.hr
‡Veleučilište u Požegi, Vukovarska 17, Požega, e-mail: bradisic@vup.hr

1 Uvod

Jedan od najpoznatijih nizova prirodnih brojeva svakako je Fibonaccijev niz $(F_n)_n$ definiran rekurzivno izrazom

$$\begin{cases} F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{za } n \geq 3, \\ F_1 = F_2 = 1. \end{cases}$$

Leonardo Bonacci (Fibonacci) (1170.–1250.) *talijanski matematičar srednjeg vijeka, zaslužan za upoznavanje Europe s arapskim brojevnim sustavom.*

Prvih nekoliko članova toga niza su

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots.$$

Binetova formula za opći član Fibonaccijevog niza glasi

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right],$$

odakle jednostavno slijedi

$$\lim_n \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618033988\cdots = \varphi,$$

gdje je φ poznat kao konstanta zlatnog reza. Lako se pokazuje da je φ rješenje jednadžbe

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Više o Fibonaccijevom nizu može se pronaći u [7].

Osim Fibonaccijevog niza, promatra se i Padovanov niz. To je niz prirodnih brojeva $(P_n)_n$ definiran rekurzivno izrazom

$$\begin{cases} P_n = P_{n-2} + P_{n-3} \quad \text{za } n \geq 4, \\ P_1 = P_2 = P_3 = 1. \end{cases}$$

Prvih nekoliko članova toga niza su

$$1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, \ldots,$$

a opći član dan je formulom

$$P_n = C_1 x_1^n + C_2 x_2^n + C_3 x_3^n,$$

pri čemu su C_1, C_2 i C_3 konstante, a x_1, x_2 i x_3 rješenja jednadžbe:

$$x^3 - x - 1 = 0.$$

Jedino realno rješenje gornje jednadžbe

$$x_1 = 1.324717957 \cdots = \psi$$

naziva se plastična konstanta ili plastični broj koji se često interpretira kao:

$$\psi = \lim_n \frac{P_{n+1}}{P_n}$$

Više o Padovanovom nizu može se pronaći u [6].

U ovom članku promatrat ćemo realne nultočke polinoma $x^n - x - 1$, gdje je $n \in \mathbb{N}$. Primijetimo da se za $n = 2$ dobije polinom $p_2(x) = x^2 - x - 1$ kojemu je jedna od realnih nultočaka upravo konstanta zlatnog reza, dok se za $n = 3$ dobije polinom $p_3(x) = x^3 - x - 1$ kojemu je jedina realna nultočka upravo plastična konstanta. Te dvije konstante bit će prva dva člana niza realnih brojeva čiji će opći član biti jedinstvena pozitivna nultočka polinoma $p_n(x) = x^n - x - 1$. Navest ćemo i postupak kojim se efektivno može približno izračunati svaki član navedenoga niza.
Napomenimo da je nužno postaviti uvjet $n \geq 2$ jer za $n = 1$ dobivamo konstantnu funkciju $p_1(x) = -1$ koja nema niti jednu nultočku.

2 Polinomi π_n

Za svaki prirodan broj $n \geq 2$ definiramo polinom π_n formulom

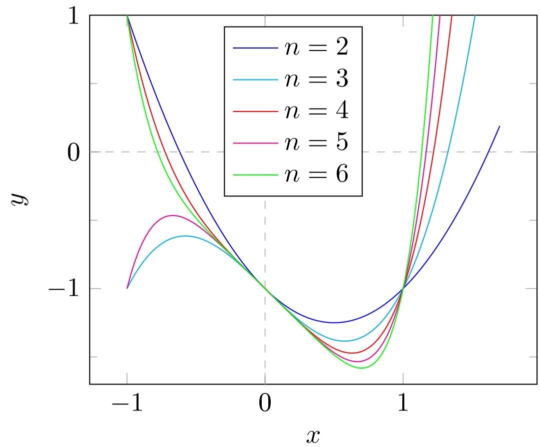
$$\pi_n(x) = x^n - x - 1. \tag{1}$$

Na slici 1 prikazani su grafovi prvih pet takvih polinoma.

Teorem 2.1. *Za svaki prirodan broj $n \geq 2$ polinom π_n ima jedinstvenu pozitivnu nultočku α_n, ona je jednostruka i vrijedi $1 < \alpha_n < 2$.*

Dokaz. Primijetimo da za svaki $n \geq 2$ vrijedi $2^n - 3 \geq 2^2 - 3 = 1 > 0$. Polinom π_n je neprekidna funkcija na cijeloj svojoj domeni (skupu $\mathbb{R}$), pa posebno i na segmentu $[1, 2]$. Očito je $\pi_n(1) = -1$ i $\pi_n(2) = 2^n - 3$, pa prema gornjoj primjedbi slijedi $\pi_n(1) \cdot \pi_n(2) < 0$. Stoga na restrikciju polinoma π_n na segment $[1, 2]$ možemo primijeniti Teorem 5.2 (vidi Dodatak), odakle dobivamo da postoji barem jedan realan broj $\alpha_n \in \langle 1, 2 \rangle$ za koji vrijedi $\pi_n(\alpha_n) = 0$. Ovime smo dokazali egzistenciju nultočke α_n.

Pokažimo sada jedinstvenost. U tu ćemo svrhu ispitati tijek funkcije π_n na



Slika 1: Grafovi polinoma π_n za $n = 2, 3, \ldots 6$

intervalu $\langle 0, +\infty\rangle$. Prva derivacija je $\pi_n'(x) = nx^{n-1} - 1$, a njezina jedinstvena pozitivna nultočka je $x_n = \frac{1}{\sqrt[n-1]{n}} > 0$. Koristeći Teorem 5.1, za $n \geq 2$ imamo

$$x_n = \frac{1}{\sqrt[n-1]{n}} = n^{-\frac{1}{n-1}} < 1^{-\frac{1}{n-1}} = 1.$$

Dakle, $x_n \in \langle 0, 1\rangle$.

Druga derivacija funkcije π_n je $\pi_n''(x) = n(n-1)x^{n-2}$. Lako se vidi da vrijedi nejednakost $\pi_n''(x_n) > 0$ jer su sva tri faktora strogo pozitivni realni brojevi. Iz Teorema 5.3 tada slijedi da π_n poprima lokalni minimum za $x = x_n$. Odatle slijedi da je funkcija π_n strogo rastuća na intervalu $\langle x_n, +\infty\rangle$, a strogo padajuća na intervalu $\langle 0, x_n\rangle$. Prema teoremu 5.1 vrijedi $n^{\frac{n}{n-1}} > n^{\frac{n-1}{n-1}} = n > 1$, odakle dobivamo

$$\pi_n(x_n) = \frac{1}{n^{\frac{n}{n-1}}} - \frac{1}{\sqrt[n-1]{n}} - 1 < 1 - \frac{1}{\sqrt[n-1]{n}} - 1 = -\frac{1}{\sqrt[n-1]{n}} < 0,$$

a očito je i $\pi_n(0) = -1 < 0$. Prema tome, π_n nema niti jednu nultočku u intervalu $\langle 0, x_n\rangle$. Ranije smo pokazali da π_n ima pozitivnu nultočku α_n, pa mora biti $\alpha_n \in \langle x_n, +\infty\rangle$. Kako je funkcija π_n na tom intervalu strogo rastuća, nultočka α_n je jedinstvena.

Preostalo je dokazati jednostrukost. Pokazali smo da jedina moguća pozitivna nultočka funkcije π_n' pripada intervalu $\langle 0, 1\rangle$, te da je $\alpha_n \in \langle 1, 2\rangle$.

To znači da mora vrijediti $\pi_n'(\alpha_n) \neq 0$, a odatle slijedi jednostrukost nultočke α_n. □

Teorem 2.2. *Za prirodan broj $n \geq 2$ vrijedi sljedeće:*

1. *ako je n paran, polinom π_n ima jedinstvenu negativnu nultočku $\beta_n \in \langle -1, 0\rangle$,*
2. *ako je n neparan, polinom π_n nema negativnih nultočaka.*

Dokaz ovoga teorema teče analogno dokazu Teorema 2.1, pa ga prepuštamo čitatelju.

3 Pozitivne nultočke polinoma π_n i njihova svojstva

Označimo s φ_n pozitivnu nultočku polinoma π_n, čija je egzistencija i jedinstvenost osigurana Teoremom 2.1. Time smo zadali niz realnih brojeva $(\varphi_n)_{n\geq 2}$ u intervalu $\langle 1, 2\rangle$.

Propozicija 3.1. *Broj φ_n je iracionalan za sve $n \geq 2$.*

Dokaz. Prema Teoremu 2.1 vrijedi $\varphi_n \in \langle 1, 2\rangle$. Stoga $\varphi_n \notin \mathbb{Z}$, pa iz Teorema 5.5 slijedi $\varphi_n \notin \mathbb{Q}$. □

Za $n \geq 2$ iz jednakosti $\pi_n(\varphi_n) = 0$ slijedi važno svojstvo brojeva φ_n

$$1 + \varphi_n = \varphi_n^n, \tag{2}$$

koje ćemo često koristiti u nastavku teksta.

Propozicija 3.2. *Niz $(\varphi_n)_{n\geq 2}$ je strogo padajući.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoji prirodan broj $n \geq 2$ takav da vrijedi $\varphi_{n+1} \geq \varphi_n$. Odavde potenciranjem slijedi

$$\varphi_{n+1}^n \geq \varphi_n^n. \tag{3}$$

Iz (2) dijeljenjem s φ_n slijedi

$$\varphi_n^{n-1} = \frac{1}{\varphi_n} + 1. \tag{4}$$

Primjenom (2) i (4) na nejednakost (3) zaključujemo da vrijedi

$$\frac{1}{\varphi_{n+1}} + 1 \geq \varphi_n + 1 \quad \Rightarrow \quad 1 \geq \varphi_n \cdot \varphi_{n+1}. \tag{5}$$

Prema Teoremu 2.1 je $\varphi_k \in \langle 1, 2\rangle$ za svaki prirodan broj $k \geq 2$, odakle slijedi $\varphi_n \cdot \varphi_{n+1} > 1$ što je u proturječju s (5). Dakle, polazna je pretpostavka pogrešna, pa mora biti $\varphi_{n+1} < \varphi_n$ za sve $n \geq 2$ kako se i tvrdilo. □

Lema 3.1. *Za svaku nultočku $z \in \mathbb{C}$ polinoma π_n različitu od φ_n vrijedi $|z| < \varphi_n$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je n paran i da je z jednaka negativnoj nultočki $\beta_n \in \langle -1, 0\rangle$ koja postoji prema Teoremu 2.2. Kako prema Teoremu 2.1 vrijedi $\varphi_n \in \langle 1, 2\rangle$, imamo $|z| < 1 < \varphi_n$.
Pretpostavimo sada da je $z = x + iy$, $y \neq 0$, kompleksna nultočka polinoma π_n i označimo

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Lako se vidi da je $x < r$, što uz $\pi_n(z) = 0$ i (1) povlači

$$\begin{aligned} r^n &= |z|^n = |z+1| = \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 2x + 1 + y^2} \\ &< \sqrt{x^2 + 2r + 1 + y^2} = \sqrt{r^2 + 2r + 1} = r + 1, \end{aligned}$$

odakle slijedi $r^n - r - 1 < 0$ odnosno $\pi_n(r) < 0$. Zbog $\pi_n(x) \geq 0$ za sve $x \geq \varphi_n$ je tada $r < \varphi_n$ što je i trebalo pokazati. □

Teorem 3.1. *Neka je prirodan broj $n \geq 2$ proizvoljan, ali fiksiran. Tada za niz cijelih brojeva $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ definiran pravilom*

$$f_k = \begin{cases} 1, & k \leq n, \\ f_{k-n} + f_{k-n+1}, & k > n, \end{cases} \tag{6}$$

vrijedi $\lim\limits_k \dfrac{f_{k+1}}{f_k} = \varphi_n$.

Dokaz. Pravilo (6) ispunjava uvjete Teorema 5.6, pa, uz oznake iz tog teorema, vrijedi

$$f_k = \sum_{j=1}^{m} p_j(k) \cdot r_j^k, \quad k \in \mathbb{N} \tag{7}$$

gdje su $r_1, r_2, \ldots, r_m$ međusobno različite nultočke karakterističnog polinoma $\kappa(x) = x^n - x - 1$ i $\deg p_j$ je manji od kratnosti nultočke r_j za sve $j = 1, 2, \ldots, m$. Budući da je $\kappa = \pi_n$, jedan od brojeva r_j mora biti jednak φ_n. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je to r_1. Prema

Teoremu 2.1 kratnost nultočke r_1 jednaka je 1. Dakle, vrijedi $\deg p_1 = 0$ odnosno $p_1(k) = C_1$ za neki $C_1 \in \mathbb{R}$ i sve $k \in \mathbb{N}$. Nadalje, iz Leme 3.1 slijedi $\left|\frac{r_j}{r_1}\right| = \frac{|r_j|}{\varphi_n} < 1$ za sve $j = 2, 3, \ldots, m$. Sada koristeći Teorem 5.4 imamo

$$\lim_k \frac{f_{k+1}}{f_k} = \lim_k \frac{\sum_{j=1}^m p_j\,(k+1)\, r_j^{k+1}}{\sum_{j=1}^m p_j\,(k)\, r_j^k} \cdot \frac{\frac{1}{r_1^{k+1}}}{\frac{1}{r_1^{k+1}}} = \lim_k \frac{\sum_{j=1}^m p_j\,(k+1) \left(\frac{r_j}{r_1}\right)^{k+1}}{\frac{1}{r_1} \sum_{j=1}^m p_j\,(k) \left(\frac{r_j}{r_1}\right)^k}$$

$$= r_1 \cdot \frac{C_1 + \sum_{j=2}^m \lim_k p_j(k+1) \left(\frac{r_j}{r_1}\right)^{k+1}}{C_1 + \sum_{j=2}^m \lim_k p_j(k) \left(\frac{r_j}{r_1}\right)^k} = r_1 \cdot \frac{C_1}{C_1} = r_1 = \varphi_n,$$

kako se i tvrdilo. □

Niz brojeva (6) podudara se s Fibonaccijevim nizom $(F_k)_k$ za $n = 2$ odnosno s Padovanovim nizom $(P_k)_k$ za $n = 3$. Napomenimo da se nekoliko općenitih svojstava nizova $(f_k)_k$ može pronaći u [4].

4 Približno izračunavanje brojeva φ_n

Za svaki prirodan broj $n \geq 2$ označimo

$$\delta_n(x) = \frac{1}{n} \cdot x + 1 + \frac{\ln 2}{n},. \tag{8}$$

Tada vrijedi sljedeća lema.

Lema 4.1. *Za proizvoljan $\varepsilon > 0$ postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da za sve prirodne brojeve $n > N$ vrijedi*

$$\delta_n(-\varepsilon) < \varphi_n < \delta_n(\varepsilon). \tag{9}$$

Dokaz. Definiramo niz funkcija $\rho_k : \langle 0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$, $k \geq 2$, formulom

$$\rho_k(x) = \pi_k\left(1 + \frac{x}{k}\right). \tag{10}$$

Lako se provjeri da je

$$\rho_k(x) = \left(1 + \frac{x}{k}\right)^k - \frac{x}{k} - 2. \tag{11}$$

Označimo

$$\rho(x) = e^x - 2. \tag{12}$$

Može se pokazati da vrijedi (vidi [2], str. 70. i 72.)

$$\lim_k \left(1+\frac{x}{k}\right)^k = e^x, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{13}$$

odakle lako dobivamo $\rho(x) = \lim_k \rho_k(x)$. Odaberimo proizvoljan $\varepsilon > 0$ i označimo

$$a = \ln 2 - \varepsilon, \quad b = \ln 2 + \varepsilon. \tag{14}$$

Budući da je funkcija $x \mapsto e^x$ strogo rastuća, to je i funkcija ρ strogo rastuća. Pritom je $x = \ln 2$ jedina nultočka funkcije ρ, pa vrijedi

$$\rho(a) < 0 \quad \text{i} \quad \rho(b) > 0. \tag{15}$$

Označimo $r = \min\{-\rho(a), \rho(b)\}$. Iz (15) slijedi $r > 0$. Budući da je funkcija ρ limes niza funkcijâ $(\rho_k)_k$, prema definiciji limesa niza, postoji prirodan broj k_a takav da za svaki $k > k_a$ vrijedi nejednakost

$$|\rho_k(a) - \rho(a)| < r.$$

Odatle slijedi da brojevi $\rho_k(a)$ i $\rho(a)$ imaju isti predznak, pa zbog (15) zaključujemo da vrijedi $\rho_k(a) < 0$. Analogno, postoji prirodan broj k_b takav da za svaki $k > k_b$ vrijedi

$$|\rho_k(b) - \rho(b)| < r,$$

pa su brojevi $\rho_k(b)$ i $\rho(b)$ istoga predznaka što zbog (15) znači da je $\rho_k(b) > 0$. Stavimo li $N = \max\{k_a, k_b\}$, zaključujemo da za svaki $k > N$ vrijede nejednakosti

$$\rho_k(a) < 0, \quad \rho_k(b) > 0. \tag{16}$$

Neka je zadan prirodan broj $n > N$. Iz (16) i činjenice da je polinom π_n strogo rastući na intervalu $\langle 1, +\infty \rangle$, koju smo dokazali u okviru dokaza Teorema 2.1, dobivamo

$$1 + \frac{a}{n} < \varphi_n < 1 + \frac{b}{n}.$$

Koristeći (8) lako se provjeri da vrijede jednakosti

$$\delta_n(-\varepsilon) = 1 + \frac{a}{n} \quad \text{i} \quad \delta_n(\varepsilon) = 1 + \frac{b}{n},$$

pa odatle slijedi tvrdnja leme. □

Teorem 4.1. *Vrijede sljedeće jednakosti* *(a)* $\lim_n \varphi_n = 1$,

(b) $\lim_n n\left(\varphi_n - 1\right) = \ln 2$.

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Prema Lemi 4.1 postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da za sve prirodne brojeve $n > N$ vrijede nejednakosti (9).
Primijetimo da je $\lim_n \delta_n(\pm\varepsilon) = 1$. Odavde i iz (9) slijedi $\lim_n \varphi_n = 1$, čime smo dokazali jednakost (a).

Dokažimo i jednakost (b). Najprije za $n \geq 2$ imamo

$$
\begin{aligned}
n\left(\varphi_n - 1\right) &= n\left(\varphi_n - 1 - \frac{\ln 2}{n} + \frac{\ln 2}{n}\right) \\
&= n\left(\varphi_n - \delta_n(0) + \frac{\ln 2}{n}\right) = n\left(\varphi_n - \delta_n(0)\right) + \ln 2,
\end{aligned}
$$

odakle slijedi

$$
\left|n\left(\varphi_n - 1\right) - \ln 2\right| = n\left|\varphi_n - \delta_n(0)\right|. \tag{17}
$$

Prema Lemi 4.1 postoji $M \in \mathbb{N}$ takav da za sve prirodne brojeve $n > M$ vrijedi

$$
\delta_n\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right) < \varphi_n < \delta_n\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), \tag{18}
$$

a budući da je δ_n strogo rastuća funkcija, iz $-\frac{\varepsilon}{2} < 0 < \frac{\varepsilon}{2}$ imamo i

$$
\delta_n\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right) < \delta_n\left(0\right) < \delta_n\left(\frac{\varepsilon}{2}\right). \tag{19}
$$

Po definiciji funkcije δ_n vrijedi

$$
\delta_n\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) - \delta_n\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right) = 1 + \frac{\ln 2 + \varepsilon/2}{n} - 1 - \frac{\ln 2 - \varepsilon/2}{n} = \frac{\varepsilon}{n},
$$

što zajedno s nejednakostima (18) i (19) povlači da se φ_n i $\delta_n(0)$ nalaze u istom otvorenom intervalu $\langle \delta_n\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right), \delta_n\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\rangle$ širine ε/n, odnosno

$$
\left|\varphi_n - \delta_n(0)\right| < \frac{\varepsilon}{n} \quad \text{za sve } n > M. \tag{20}
$$

Jednakost (17) i nejednakost (20) zajedno daju

$$
\left|n\left(\varphi_n - 1\right) - \ln 2\right| < \varepsilon \quad \text{za sve } n > M,
$$

pa zaključujemo da je broj $\ln 2$ limes niza $\left(n\left(\varphi_n - 1\right)\right)_{n\geq 2}$ što je i trebalo pokazati. $\square$

Za svaki prirodan broj n definiramo

$$\begin{aligned} u_n &= \delta_n(0) = 1 + \frac{\ln 2}{n}, \\ v_n &= \sqrt[n]{1+\delta_n(0)} = \sqrt[n]{2 + \frac{\ln 2}{n}}. \end{aligned} \tag{21}$$

Istaknimo dva značajna svojstva niza $(u_n)_n$. Vrijedi sljedeća propozicija.

Propozicija 4.1. Za gore definiran niz $(u_n)_n$ i niz $(\varphi_n)_{n\geq 2}$ vrijedi:

(a) $\lim_n (\varphi_n - u_n) = 0$.

(b) $\lim_n \dfrac{\varphi_n - u_n}{\varphi_n - 1} = 0$.

Dokaz. Tvrdnja (a) slijedi izravno iz (20).

Dokažimo (b). Prema Teoremu 4.1 (b) imamo

$$\begin{aligned} \lim_n \frac{\varphi_n - u_n}{\varphi_n - 1} &= \lim_n \frac{\varphi_n - 1 - \frac{\ln 2}{n}}{\varphi_n - 1} = 1 - \lim_n \frac{\ln 2}{n(\varphi_n - 1)} \\ &= 1 - \frac{\ln 2}{\lim_n n(\varphi_n - 1)} = 1 - \frac{\ln 2}{\ln 2} = 0, \end{aligned}$$

kako se i tvrdilo. □

Iz tvrdnje (b) Propozicije 4.1 zaključujemo da udaljenost $|\varphi_n - u_n|$ između brojeva φ_n i u_n teži nuli brže nego što decimalni dio $\varphi_n - 1$ broja φ_n teži nuli kada $n \to \infty$. Dakle, za $n \geq 2$ vrijedi

$$\varphi_n \approx u_n,$$

pri čemu je aproksimacija to bolja što je n veći.

Propozicija 4.2. Za svaki prirodan broj $n \geq 2$ vrijedi $u_n < v_n < \varphi_n$.

Dokaz. Neka je x pozitivan realan broj i n prirodan broj. Označimo

$$y_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Prema (13), vrijedi

$$\lim_n y_n = e^x. \tag{22}$$

Zapišimo $(n+1)$-vi korijen broja y_n u obliku:

$$\sqrt[n+1]{y_n} = \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} = \sqrt[n+1]{1 \cdot \left(1+\frac{x}{n}\right) \cdot \left(1+\frac{x}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1+\frac{x}{n}\right)}.$$

Izraz s desne strane možemo shvatiti kao geometrijsku sredinu $n+1$ pozitivnih brojeva. Primijenimo li A–G nejednakost, prema kojoj aritmetička sredina n pozitivnih brojeva nije manja od njihove geometrijske sredine, dobivamo

$$\begin{aligned}\sqrt[n+1]{y_n} &\leq \frac{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)+\left(1+\frac{x}{n}\right)+\dots+\left(1+\frac{x}{n}\right)}{n+1} \\ &= \frac{1+n\left(1+\frac{x}{n}\right)}{n+1} = 1+\frac{x}{n+1} = \sqrt[n+1]{y_{n+1}}.\end{aligned}$$

Budući da je prema Teoremu 5.1 opća potencija $x \mapsto x^{\frac{1}{n+1}} = \sqrt[n+1]{x}$ strogo rastuća funkcija, odatle slijedi $y_n \leq y_{n+1}$. Stavimo li $x = \ln 2$, zbog prve jednakosti u (21) zaključujemo da vrijedi $y_n = u_n^n = \left(1+\frac{\ln 2}{n}\right)^n$. Zbog jednakosti (22) vrijedi $\lim_n u_n^n = e^{\ln 2} = 2$. U Teoremu 2.1 dokazali smo da je $\varphi_n > 1$, pa slijedi:

$$u_n^n \leq 2 < 1+\varphi_n = \varphi_n^n, \tag{23}$$

odakle je $u_n < \varphi_n$. Dalje računamo

$$u_n < \varphi_n \Rightarrow 1+u_n < 1+\varphi_n \Rightarrow v_n^n < \varphi_n^n \Rightarrow v_n < \varphi_n.$$

Analognom argumentacijom kao u slučaju nejednakosti (23) zaključujemo

$$u_n^n \leq 2 < 2+\frac{\ln 2}{n} = v_n^n,$$

odakle je $u_n < v_n$. Dakle, vrijedi $u_n < v_n < \varphi_n$ kako se tvrdilo. $\square$

Prema Propoziciji 4.2, broj v_n bolje aproksimira φ_n nego u_n. Tablica 1 prikazuje φ_n, aproksimacije u_n i v_n, te odstupanje $|\varphi_n - v_n|$ za $n = 2, 3, \dots, 10$. Pri izračunavanju brojeva v_n korištena je približna vrijednost

$$\ln 2 \approx 0.69315.$$

n	φ_n	u_n	v_n	$\lvert\varphi_n - v_n\rvert$
2	1.6180	1.3466	1.5319	8.62×10^{-2}
3	1.3247	1.2310	1.3067	1.81×10^{-2}
4	1.2207	1.1733	1.2142	6.57×10^{-3}
5	1.1673	1.1386	1.1642	3.11×10^{-3}
6	1.1347	1.1155	1.1330	1.71×10^{-3}
7	1.1128	1.0990	1.1117	1.04×10^{-3}
8	1.0970	1.0866	1.0963	6.77×10^{-4}
9	1.0851	1.0770	1.0846	4.67×10^{-4}
10	1.0758	1.0693	1.0754	3.35×10^{-4}

Tablica 1: Aproksimacija nekih vrijednosti brojeva φ_n brojevima u_n i v_n, te pripadna apsolutna pogreška aproksimacije v_n

5 Dodatak

U ovom su odjeljku navedeni iskazi nekih općih rezultata iz područja matematičke analize koji su korišteni u tekstu.

Teorem 5.1. *Funkcija opće potencije $f(x) = x^c$ je strogo rastuća za $c > 0$, a strogo padajuća za $c < 0$.*

Dokaz. Vidi [1], str. 193. □

Teorem 5.2. *Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija i $f(a) \cdot f(b) < 0$. Tada postoji točka $c \in \langle a, b\rangle$ takva da vrijedi $f(c) = 0$.*

Dokaz. Vidi [2], str. 31. □

Teorem 5.3. *Neka je funkcija $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ dvaput derivabilna u točki $c \in \langle a, b\rangle$ i neka je $f'(c) = 0$.*

(a) Ako je $f''(c) < 0$, tada funkcija f ima lokalni maksimum za $x = c$.

(b) Ako je $f''(c) > 0$, tada funkcija f ima lokalni minimum za $x = c$.

Dokaz. Vidi [1], str. 141. □

Teorem 5.4. *Neka je P bilo koji polinom s realnim koeficijentima. Tada za svaki $a \in \langle 0, 1\rangle$ vrijedi*

$$\lim_{x\to\infty} P(x) \cdot a^x = 0.$$

Dokaz. Vidi [2], str. 220. □

Teorem 5.5. *Polinom s cjelobrojnim koeficijentima kojemu je vodeći koeficijent jednak 1 ima racionalnu nultočku ako i samo ako ima cjelobrojnu nultočku.*

Dokaz. Vidi [3]. □

Teorem 5.6. *Neka su prvih n članova niza $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ proizvoljni ali fiksirani i neka za $k > n$ vrijedi rekurzivna relacija s konstantnim koeficijentima*

$$a_k = c_1 a_{k-1} + c_2 a_{k-2} + \cdots + c_n a_{k-n}.$$

Ako s $r_1, r_2, \ldots, r_m$ označimo sve međusobno različite (kompleksne) nultočke karakterističnog polinoma $\kappa(x) = x^n - c_1 x^{n-1} - \cdots - c_n$*, tada za svaki $j = 1, 2, \ldots, m$ postoji jedinstveni polinom p_j s kompleksnim koeficijentima takav da je* deg p_j *manji od kratnosti nultočke r_j i vrijedi*

$$a_k = p_1(k) \cdot r_1^k + p_2(k) \cdot r_2^k + \cdots + p_m(k) \cdot r_m^k$$

za sve $k \in \mathbb{N}$.

Dokaz. Vidi [8]. □

Literatura

[1] S. Kurepa, *Matematička analiza 1 - diferenciranje i integriranje*, Školska knjiga, Zagreb, 1997.

[2] S. Kurepa, *Matematička analiza 2 - funkcije jedne varijable*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1990.

[3] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika 1*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1990.

[4] V. Krčadinac, *A new generalization of the Golden ratio*, The Fibonacci Quarterly 44 (2006), 335–340, javno dostupno na `http://web.math.pmf.unizg.hr/~krcko/pub/golden.pdf`

[5] L. Marohnić, T. Strmečki, *Plastic Number: Construction and Applications*, zbornik radova konferencije ARSA (Advanced Research in Scientific Areas) 2012, 1523–1528, javno dostupno na: `http://arsa-conf.com/archive/?vid=1&aid=3&kid=60101-209&q=f1`

[6] B. Kovačić, L. Marohnić, R. Opačić, *O Padovanovu nizu*, Osječki matematički list 13/1 (2013), 1–19, javno dostupno na `http://hrcak.srce.hr/file/155996`

[7] A. Dujella, *Fibonaccijevi brojevi*, Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb, 2000.

[8] http://en.wikipedia.org/wiki/Recurrence_relation, javno dostupno 24. 2. 2014.