serija članaka u nastajanju
Sveučilište u Zagrebu
Ekonomski fakultet

Trg J. F. Kennedya 6
10000 Zagreb, Croatia
Tel +385(0)1 238 3333
www.efzg.hr/wps
wps@efzg.hr

EFZG WORKING PAPER SERIES
EFZG SERIJA ČLANAKA U NASTAJANJU
UDK 33:65

Br. 15-01

Vedran Kojić

Analiza svojstava konveksnosti obveznica bez primjene diferencijalnog računa

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

Analiza svojstava konveksnosti obveznica bez primjene diferencijalnog računa

Vedran Kojić
vkojic@efzg.hr
Ekonomski fakultet Zagreb
Sveučilište u Zagrebu
Trg J. F. Kennedy 6
10 000 Zagreb, Croatia

ANALIZA SVOJSTAVA KONVEKSNOSTI OBVEZNICA BEZ PRIMJENE DIFERENCIJALNOG RAČUNA

Sažetak

U radu Gardijan, M., Kojić, V., Šego, B. (2012) Trajanje obveznica: pravila i primjene. Zbirna znanstvena knjiga (urednici: Aljinović, Z., Marasović, B.), Sveučilište u Splitu, Ekonomski fakultet, Split, ISBN 978-953-281-049-3, str. 5-26 (1. poglavlje) analizirana su svojstva trajanja kuponskih obveznica kao jedne od temeljnih mjera rizičnosti. Druga vrlo bitna mjera rizičnosti je svakako konveksnost obveznice, pa je u skladu s tim bitno poznavati svojstva konveksnosti. Iako se u literaturi ta svojstva deskriptivno objašnjavaju, analitički izvodi i dokazi relevantnih zaključaka gotovo da i nema. Stoga je cilj ovog rada dati pregledan opis svojstava konveksnosti obveznica, te ih matematički dokazati. Jedan od načina dokazivanja je svakako primjenom diferencijalnog računa. Međutim, primjena diferencijalnog računa neizbježno vodi na komplicirane međurezultate koji su nužni kako bi se došlo do krajnjeg zaključka, pa se stoga dokazi provode na elementaran, algebarski način, razumljiv i široj publici koja nema nužno predznanje iz područja matematičke analize.

Ključne riječi

trajanje obveznice, konveksnost obveznice, svojstva konveksnosti, algebarski način, bez primjene derivacija

JEL classification

C65, G00

ANALYSIS OF BOND CONVEXITY PROPERTIES WITHOUT THE USE OF CALCULUS

Abstract

In the paper Gardijan, M., Kojić, V., Šego, B. (2012) Bond Duration: Propositions and Applications. In: Aljinović, Z., Marasović, B., ed., in *Mathematical models in analysis of the Croatian financial market.* Split: University of Split: Faculty of Economics, p. 5–26, an analysis of cupon bond duration has been given, which is one of the primary risk measures. Another very important risk measure is bond convexity. To the best of our knowledge, the literature gives only descriptive explanations of bond convexity, without mathematical proofs. Thus, the aim of this paper is to give bond convexity analysis, and also give corresponding mathematical proofs. Since the use of calculus is very complicated, the bond convexity properties are proved by using elementary algebra, which is easier to understand to those who are not familiar with mathematical analysis.

Key words:

bond duration, convexity duration, bond convexity properties, elementary algebra, without calculus

JEL Classification

C65, G00

1. Uvod

U radu *Trajanje obveznica: pravila i primjene* (Gardijan et al., 2012) analizirana su svojstva trajanja kuponskih obveznica kao jedne od temeljnih mjera rizičnosti. Analiza je provedena bez primjene derivacija, to jest rabeći elementarnu algebru, čime su se izbjegli vrlo komplicirani međurezultati na koje bi vodila tehnika deriviranja, a koje bi trebalo nužno riješiti da bi se došlo do krajnjih zaključaka. Time je taj rad postao dostupan i razumljiv i široj publici, koja možda nema nužno predznanje iz matematičke analize. Osim trajanja, u analizi rizičnosti obveznica još jedna od značajnih mjera je i konveksnost obveznice. Podsjetimo da se promjena cijene obveznice može aproksimirati izrazom koji ovisi o trajanju i konveksnosti obveznice (Šego, Škrinjarić, 2014), pa je zato od značaja znati svojstva konveksnosti. Stoga je cilj ovog rada dati analizu svojstava konveksnosti kao funkcije kuponskih kamata, prinosa do dospijeća, te dospijeća dane kuponske obveznice. Ističemo da je analiza konveksnosti u ovom radu provedena bez primjene diferencijalnog računa, koristeći jednostavne algebarske manipulacije, što pridonosi višem stupnju prihvatljivosti i razumljivosti rada od strane čitatelja. Ovakav pristup u analizi konveksnosti nije do sada poznat u stranoj literaturi, no u domaćoj literaturi su Šego i Škrinjarić (Šego, Škrinjarić, 2014) u svom radu *Svojstva konveksnosti obveznica* analizirali svojstva konveksnosti ne koristeći pri tom diferencijalni račun. Međutim, pritom su zanemarili da se sa svakom promjenom bilo koje varijable funkcije konveksnosti mijenja i cijena obveznice, koju je po definiciji nužno izračunati kako bismo izračunali samu konveksnost. S druge strane, valja spomenuti kako su (Lawrence et al. 2007) istu ideju o nekorištenju diferencijalnog računa imali u svom radu *A simple and student-friendly approach to the mathematics of bond prices* u kojem su na lakši način objasnili rezultate iz rada *Expectations, Bond Prices and the Term Structure of Interest Rates* (Malkiel, 1962). Naime, Malkiel je još 1962. godine vrlo rigorozno analizirao svojstva cijene kuponske obveznice, te prinosa do dospijeća primjenom diferencijalnog računa, pa su Lawrence i Shankar ista svojstva pokazali služeći se jednostavnom algebrom, ističući da na taj način, primjerice, pomažu studentima financija lakše shvatiti ovu tematiku.

Ovaj je rad koncipiran na sljedeći način. Nakon uvoda, u drugom poglavlju opisana su osnovna svojstva cijene kuponske obveznice, a u trećem svojstva trajanja. Analiza svojstava konveksnosti kuponske obveznice dana je u četvrtom poglavlju. Peto poglavlje je zaključak.

2. Svojstva cijene kuponske obveznice

Oznake i formule koje koristimo u ovom radu preuzete su iz (Gardijan et al., 2012). Dakle, glavna pretpostavka u radu je da ***promatramo kuponsku obveznicu*** nominalno jednake vrijednosti N koja ima jedinične nominalne kamate i (i je nominalna kamatna stopa podijeljena sa 100 (Orsag, 2011), to jest kuponska kamatna stopa izražena u postocima (Aljinović et al., 2011)), pa je vrijednost kuponskih kamata, I, dana izrazom

$$I = iN\,. \tag{1}$$

Radi jednostavnosti, pretpostavljamo da je isplata kuponskih kamata godišnja, te da je dospijeće (broj razdoblja isplate) jednak n (n je prirodan broj). Stoga je cijena kuponske obveznice P dana formulom

$$P = \sum_{t=1}^{n} \frac{iN}{(1+k)^t} + \frac{N}{(1+k)^n} = \sum_{t=1}^{n} \frac{iN}{r^t} + \frac{N}{r^n}\,, \tag{2}$$

pri čemu k označava godišnji zahtijevani prinos do dospijeća obveznice, to jest kamatnu stopu izraženu u postotcima (Aljinović et al. 2011). Radi jednostavnosti, koristi se i oznaka $r=1+k$ za pripadni dekurzivni kamatni faktor. Formula (2) se još naziva otvorena forma cijene P.

Propozicija 1. Ako je $i=k$, onda je $P=N$ (ako su jedinične nominalne kamate jednake zahtijevanom prinosu do dospijeća, onda je cijena kuponske obveznice jednaka njezinoj nominalnoj vrijednosti). Ako je $i>k$, onda je $P>N$ (obveznica se prodaje u premiju). Ako je $i<k$, onda je $P<N$ (obveznica se prodaje uz diskont).

Dokaz. Zatvorena forma relacije (2) dana je sljedećom formulom (dokaz vidjeti u Dodatku 1.):

$$P=\frac{N}{(1+k)^n}\left[\left((1+k)^n-1\right)\cdot\frac{i}{k}+1\right]. \tag{3}$$

Koristeći relaciju (3), lako je vidjeti da iz $i=k$ slijedi $P=N$. Ako je $i>k>0$, tada je $i/k>1$, iz čega slijedi $P>N$. Slično, iz $0<i<k$, slijedi $i/k<1$ što povlači $P<N$. Q.E.D.

Kako je vidljivo iz relacije (2), cijena kuponske obveznice dana je kao funkcija jediničnih nominalnih kamata i ($P=P(i)$), prinosa do dospijeća k ($P=P(k)$), te dospijeća (to jest razdoblja isplata) n ($P=P(n)$). Stoga valja ispitati ponašanje funkcije P s obzirom na promjene pojedine njezine varijable, uz pretpostavku ceteris paribus.

Teorem 2. Svojstva cijene P kao funkcije s obzirom na njezine pojedine varijable:

(a) Funkcija $P=P(k)$ je monotono padajuća ceteris paribus, odnosno za dvije kamatne stope izražene u postocima $k_1\leq k_2$ vrijedi $P(k_1)\geq P(k_2)$.

(b) Funkcija $P=P(i)$ je monotono rastuća ceteris paribus, odnosno za dvije kuponske kamatne stope izražene u postocima $i_1\leq i_2$ vrijedi $P(i_1)\leq P(i_2)$.

(c) Granična vrijednost funkcije $P=P(n)$ kada n teži u beskonačno je $L_P=\lim_{n\to+\infty}P(n)=\frac{iN}{k}$.

Nadalje, u slučaju $i=k$, funkcija $P(n)$ je konstanta ceteris paribus, to jest tada je $P(n)=N$. Ako je $i>k$ onda je $P(n)$ rastuća ceteris paribus, a ako je $i<k$ onda je $P(n)$ padajuća funkcija ceteris paribus.

Dokaz. Vidjeti Dodatak 2.

3. Svojstva trajanja kuponske obveznice

Trajanje kuponske obveznice (kaže se još Macaulayevo trajanje), u oznaci D, definira se formulom

$$D=\frac{1}{P}\left(\sum_{t=1}^{n}t\cdot\frac{iN}{(1+k)^t}+n\cdot\frac{N}{(1+k)^n}\right)=\frac{1}{P}\left(\sum_{t=1}^{n}t\cdot\frac{iN}{r^t}+n\cdot\frac{N}{r^n}\right), \tag{4}$$

pri čemu cijenu kuponske obveznice računamo formulom (2). Sve pretpostavke i oznake iz poglavlja 2. vrijede i u ovom poglavlju. Zatvorena forma formule (4) dana je sljedećim izrazom (vidjeti Aljinović et. al., 2011):

$$D=\frac{iN}{P}\frac{r\left(r^n-1\right)-n\left(r-1\right)}{r^n\left(r-1\right)^2}+\frac{nN}{Pr^n}. \tag{5}$$

Isto kao i funkcija P u prethodnom poglavlju, i trajanje možemo promatrati kao funkciju tri varijable, s obzirom na kamatnu stopu k, $D=D(k)$, s obzirom na kuponsku kamatnu stopu i, $D=D(i)$, te s obzirom na dospijeće n, $D=D(n)$.

Teorem 3. Svojstva trajanja D kao funkcije s obzirom na njezine pojedine varijable:

(a) Trajanje uvijek ima pozitivnu vrijednost.
(b) Trajanje je uvijek manje ili jednako dospijeću obveznice, to jest $D(n)\leq n$.
(c) Funkcija $D=D(i)$ je monotono padajuća ceteris paribus, odnosno za dvije kuponske kamatne stope izražene u postocima $i_1\leq i_2$ vrijedi $D(i_1)\geq D(i_2)$.
(d) Funkcija $D=D(k)$ je monotono padajuća ceteris paribus, odnosno za dvije kamatne stope izražene u postocima $k_1\leq k_2$ vrijedi $P(k_1)\geq P(k_2)$.
(e) Granična vrijednost funkcije $D=D(n)$ kada n teži u beskonačno je $L_D = \lim_{n\to+\infty} D(n) = 1+\frac{1}{k}$. U slučaju $i\geq k$, funkcija $D(n)$ je rastuća s maksimalnom asimptotskom vrijednosti L_D. Međutim, u slučaju $0<i<k$, tijek funkcije trajanja $D(n)$ je sljedeći: trajanje prvo raste, doseže svoj maksimum, a potom počinje padati i asimptotski se približavati graničnoj vrijednosti L_D.

Dokaz. Dokaz navedenih svojstava može se vidjeti, primjerice, u (Hawawini, 1982), (La Grandville, 2000), (Fabozzi, 2006), te (Gardijan et al., 2012). Treba svakako spomenuti da Hawawini, La Grandville te Fabozzi svojstva trajanja izvode primjenom diferencijalnog računa, dok Gardijan et al. ta ista svojstva izvode bez primjene derivacija. Dokaz svojstva (e) može se vidjeti u Dodatku 3.

4. Svojstva konveksnosti kuponske obveznice

Konveksnost kuponske obveznice, u oznaci C, definira se formulom

$$C=\frac{1}{P\cdot(1+k)^2}\left(\sum_{t=1}^{n} t(t+1)\cdot\frac{iN}{(1+k)^t}+n(n+1)\cdot\frac{N}{(1+k)^n}\right)=\frac{1}{P\cdot r^2}\left(\sum_{t=1}^{n} t(t+1)\cdot\frac{iN}{r^t}+n(n+1)\cdot\frac{N}{r^n}\right), \quad (6)$$

pri čemu cijenu kuponske obveznice računamo formulom (2). Sve pretpostavke i oznake iz poglavlja 2. vrijede i u ovom poglavlju.

Propozicija 4. Zatvorena forma formule (6) dana je sljedećim izrazom:

$$C=\frac{2i(1+k)^{n+2}-2i(1+k)(1+k+kn)+n(n+1)k^2(k-i)}{k^2(1+k)^2\left[i\left((1+k)^n-1\right)+k\right]}. \quad (7)$$

Dokaz. Vidjeti u (Smith, 1998).

Analogno kao i kod trajanja, i konveksnost je funkcija tri varijable, s obzirom na kamatnu stopu izraženu u postocima k, $C=C(k)$, s obzirom na kuponsku kamatnu stopu izraženu u postocima i, $C=C(i)$, te s obzirom na dospijeće n, $C=C(n)$.

U analizi svojstava konveksnosti trebat će nam sljedeća pomoćna tvrdnja:

Lema 5. Za svaka dva realna broja a i b takva da je $a>0$ i $b>0$, postoji prirodan broj n sa svojstvom da je $na>b$.

Dokaz. Vidjeti u (Zorich, 2004).

Teorem 6. Svojstva konveksnosti *C* kao funkcije s obzirom na njezine pojedine varijable:

(a) Konveksnost uvijek ima pozitivnu vrijednost.
(b) Za konveksnost vrijedi nejednakost $1 \le (1+k)^2 C(n) \le n(n+1)$, pri čemu je $C(n)$ konveksnost kao funkcija od n.
(c) Funkcija $C=C(i)$ je monotono padajuća ceteris paribus, odnosno za dvije kuponske kamatne stope $i_1 \le i_2$ vrijedi $C(i_1) \ge C(i_2)$.
(d) Funkcija $C=C(k)$ je monotono padajuća ceteris paribus, odnosno za dvije kamatne stope $k_1 \le k_2$ vrijedi $C(k_1) \ge C(k_2)$.
(e) Granična vrijednost funkcije $C=C(n)$ kada n teži u beskonačno je $L_C = \lim_{n\to+\infty} C(n) = \frac{2}{k^2}$.

Nadalje, u slučaju $i \ge k$, funkcija $C(n)$ je rastuća s maksimalnom asimptotskom vrijednosti L_C. Međutim, u slučaju $0<i<k$, tijek funkcije konveksnosti $C(n)$ je sličan kao u slučaju trajanja $D(n)$: konveksnost prvo raste, doseže svoj maksimum, a potom počinje padati i asimptotski se približavati graničnoj vrijednosti L_C.

Dokaz.

(a) Iz definicije konveksnosti (6), očito slijedi pozitivnost konveksnosti za bilo koju (pozitivnu) vrijednost k, i i n.
(b) Koristeći relaciju (6) i (2), dobivamo sljedeću nejednakost:

$$C(n) = \frac{1}{P(n)r^2}\left(\sum_{t=1}^{n} \underbrace{t(t+1)}_{\le n(n+1)} \cdot \frac{iN}{r^t} + n(n+1)\cdot\frac{N}{r^n}\right) \le \frac{1}{P(n)r^2}\left(\sum_{t=1}^{n} n(n+1)\cdot\frac{iN}{r^t} + n(n+1)\cdot\frac{N}{r^n}\right) = \tag{8}$$
$$= \frac{n(n+1)}{P(n)r^2}\underbrace{\left(\sum_{t=1}^{n}\frac{iN}{r^t}+\frac{N}{r^n}\right)}_{=P(n)} = \frac{n(n+1)}{r^2},$$

odnosno $r^2 C(n) \le n(n+1)$. S druge je strane

$$C(n) = \frac{1}{P(n)r^2}\left(\sum_{t=1}^{n} \underbrace{t(t+1)}_{\ge 1} \cdot \frac{iN}{r^t} + \underbrace{n(n+1)}_{\ge 1}\cdot\frac{N}{r^n}\right) \ge \frac{1}{P(n)r^2}P(n) \tag{8a}$$

pa slijedi $r^2 C(n) \ge 1$.

(c) Neka je i zadana kuponska kamatna stopa izražena u postocima i $\delta > 0$ pozitivan realan broj. Neka su s $C(i)$ označene konveksnost, te s $P(i)$ cijena obveznice kao funkcije od i. Tada je

$$P(i+\delta) = \sum_{t=1}^{n}\frac{(i+\delta)N}{r^t} + \frac{N}{r^n}, \tag{9}$$

odnosno

$$C(i+\delta) = \frac{1}{r^2 P(i+\delta)}\left[\sum_{t=1}^{n} t(t+1)\frac{(i+\delta)N}{r^t} + \frac{n(n+1)N}{r^n}\right]. \tag{10}$$

Nadalje,

$$C(i+\delta)-C(i)=\frac{1}{r^2P(i+\delta)}\left[\sum_{t=1}^{n}t(t+1)\frac{(i+\delta)N}{r^t}+\frac{n(n+1)N}{r^n}\right]-\frac{1}{r^2P(i)}\left[\sum_{t=1}^{n}t(t+1)\frac{iN}{r^t}+\frac{n(n+1)N}{r^n}\right]=$$

$$=\frac{1}{r^2P(i+\delta)P(i)}\left\{\left[\sum_{t=1}^{n}t(t+1)\frac{(i+\delta)N}{r^t}+\frac{n(n+1)N}{r^n}\right]P(i)-\left[\sum_{t=1}^{n}t(t+1)\frac{iN}{r^t}+\frac{n(n+1)N}{r^n}\right]P(i+\delta)\right\}.$$

Uvrštavanjem izraza za cijenu obveznice $P(i)$ i $P(i+\delta)$ u vitičaste zagrade gornjeg izraza i sređivanjem, slijedi

$$C(i+\delta)-C(i)=\frac{1}{r^2P(i+\delta)P(i)}\cdot\frac{\delta N}{r^n}\left(\sum_{t=1}^{n}\left[t(t+1)-n(n+1)\right]\frac{N}{r^t}\right).$$

Budući da su δ, N, r^n i $P(i+\delta)P(i)$ pozitivne veličine, a $t(t+1)$□$n(n+1)\leq 0$ za sve $t=1, 2, \ldots, n$, slijedi $C(i+\delta)\leq C(i)$, čime je dokazana tvrdnja (c).

(d) Neka je $\delta > 0$. Pokažemo li da u slučaju kada prinos do dospijeća s razine k poraste na razinu $k+\delta$ i tada vrijedi $C(k+\delta)<C(k)$, to će upravo značiti da smo dokazali tvrdnju.

Pokažimo sada da vrijedi nejednakost

$$C(k+\delta)<C(k). \tag{11}$$

Koristeći formulu (6), iz (11) dobivamo ekvivalentnu nejednakost

$$\frac{r^2}{(r+\delta)^2}P(k)\left(\sum_{t=1}^{n}t(t+1)\frac{iN}{(r+\delta)^t}+n(n+1)\frac{N}{(r+\delta)^n}\right)\leq P(k+\delta)\left(\sum_{t=1}^{n}t(t+1)\frac{iN}{r^t}+n(n+1)\frac{N}{r^n}\right).$$

Budući da je $\frac{r^2}{(r+\delta)^2}<1$, to je

$$\begin{aligned}\frac{r^2}{(r+\delta)^2}P(k)&\left(\sum_{t=1}^{n}t(t+1)\frac{iN}{(r+\delta)^t}+n(n+1)\frac{N}{(r+\delta)^n}\right)<\\ <P(k)&\left(\sum_{t=1}^{n}t(t+1)\frac{iN}{(r+\delta)^t}+n(n+1)\frac{N}{(r+\delta)^n}\right),\end{aligned} \tag{12}$$

pa je za dokazati nejednakost (11) dovoljno pokazati nejednakost

$$P(k)\left(\sum_{t=1}^{n}t(t+1)\frac{iN}{(r+\delta)^t}+n(n+1)\frac{N}{(r+\delta)^n}\right)\leq P(k+\delta)\left(\sum_{t=1}^{n}t(t+1)\frac{iN}{r^t}+n(n+1)\frac{N}{r^n}\right). \tag{13}$$

Uvedimo oznake $\alpha=\frac{r}{r+\delta}$, $K_t=\frac{iN}{r^t}$, $M=\frac{N}{r^n}$, i uočimo da je $0<\alpha<1$. Nejednakost (13) je ekvivalentna s nizom sljedećih nejednakosti

$$\left(\sum_{t=1}^{n} K_t + M\right)\left(\sum_{t=1}^{n} t(t+1)K_t\alpha^t + n(n+1)M\alpha^n\right) \le \left(\sum_{t=1}^{n} K_t\alpha^t + M\alpha^n\right)\left(\sum_{t=1}^{n} t(t+1)K_t + n(n+1)M\right),$$

$$\left(\sum_{t=1}^{n} K_t\right)\left(\sum_{t=1}^{n} t(t+1)K_t\alpha^t\right) + M\left(\sum_{t=1}^{n} t(t+1)K_t\alpha^t\right) + n(n+1)M\alpha^n\left(\sum_{t=1}^{n} K_t\right) \le$$
$$\le \left(\sum_{t=1}^{n} K_t\alpha^t\right)\left(\sum_{t=1}^{n} t(t+1)K_t\right) + M\alpha^n\left(\sum_{t=1}^{n} t(t+1)K_t\right) + n(n+1)M\left(\sum_{t=1}^{n} K_t\alpha^t\right),$$

$$\sum_{t=1}^{n} t(t+1)K_t^2\alpha^t + \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n}\left(j(j+1)\alpha^j + k(k+1)\alpha^k\right)K_jK_k +$$
$$+M\sum_{t=1}^{n} t(t+1)K_t\alpha^t + n(n+1)M\alpha^n\sum_{t=1}^{n} K_t \le$$
$$\le \sum_{t=1}^{n} t(t+1)K_t^2\alpha^t + \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n}\left(k(k+1)\alpha^j + j(j+1)\alpha^k\right)K_jK_k +$$
$$+M\alpha^n\sum_{t=1}^{n} t(t+1)K_t + n(n+1)M\sum_{t=1}^{n} K_t\alpha^t.$$

Prebacimo li u posljednjoj nejednakosti u prethodnom nizu sve izraze na lijevu stranu, dobivamo ekvivalentnu nejednakost

$$\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n}\left(j^2 + j - k^2 - k\right)\left(\alpha^j - \alpha^k\right)K_jK_k + M\sum_{t=1}^{n}\left[t(t+1) - n(n+1)\right]\left(\alpha^t - \alpha^n\right)K_t \le 0. \quad (14)$$

Budući da je $0<\alpha<1$, to zbog $j<k$ vrijedi $\alpha^j - \alpha^k>0$, a zbog $t\le n$ vrijedi $\alpha^t - \alpha^n\ge 0$, pa je u konačnici $\left(j^2 + j - k^2 - k\right)\left(\alpha^j - \alpha^k\right)\le 0$ i $\left[t(t+1) - n(n+1)\right]\left(\alpha^t - \alpha^n\right)\le 0$. Dakle, kako je nejednakost (14) točna, to je točna i nejednakost (11). Ovim je dokazana tvrdnja (d) ovog teorema.

(e) Za izračun granične vrijednosti L_C koristimo poznati limes $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^p}{a^n} = 0$ (vidjeti Dodatak 4.), pri čemu su n i p prirodni brojevi, te a realan broj takav da je $a>1$. Dakle, iz relacije (7) slijedi

$$\lim_{n\to+\infty} C(n) = \lim_{n\to+\infty}\frac{2i(1+k)^2\left(1 - \frac{1+k+kn}{(1+k)^{n+1}}\right) + \frac{n(n+1)k^2(k-i)}{(1+k)^n}}{k^2(1+k)^2\left[i\left(1 - \frac{1}{(1+k)^n}\right) + \frac{k}{(1+k)^n}\right]} = \frac{2}{k^2}.$$

Nadalje, želimo odrediti predznak izraza $C(n+1) - C(n)$. S jedne je strane

$$P(n+1)C(n+1) - P(n)C(n) =$$
$$= \frac{1}{(1+k)^2}\left(\frac{(n+1)(n+2)iN}{(1+k)^{n+1}} + \frac{(n+1)(n+2)N}{(1+k)^{n+1}} - \frac{n(n+1)N}{(1+k)^n}\right). \quad (15)$$

S druge je strane

$$P(n+1)C(n+1)-P(n)C(n)=$$
$$=\left[C(n+1)-C(n)\right]P(n)+\left(-\frac{N}{(1+k)^{n}}+\frac{iN}{(1+k)^{n+1}}+\frac{N}{(1+k)^{n+1}}\right)C(n+1). \tag{16}$$

Izjednačavanjem (15) i (16), te nakon sređivanja, dobivamo relaciju

$$P(n)\left[C(n+1)-C(n)\right]=$$
$$=\frac{2N\left[n+1+(1+k)C(n+1)\right]}{(1+k)^{n+2}}+\frac{N}{(1+k)^{n+3}}\Big((n+1)(n+2)-(1+k)^{2}C(n+1)\Big)(i-k). \tag{17}$$

Budući da je $P(n)>0$, to iz (17) slijedi da je predznak izraza $C(n+1)-C(n)$ pozitivan, to jest negativan, ako i samo ako je desna strana jednakosti u (17) pozitivna, to jest negativna.

Razlikujemo dva slučaja. U slučaju ako je $i\geq k$, budući da je $(1+k)^2C(n+1)\leq(n+1)(n+2)$ (vidjeti tvrdnju (b) ovog teorema), to je

$$P(n)\left[C(n+1)-C(n)\right]\geq\frac{2N\left[n+1+(1+k)C(n+1)\right]}{(1+k)^{n+2}}>0\,. \tag{18}$$

Dakle, funkcija $C(n)$ je rastuća s maksimalnom asimptotskom vrijednosti L_C.

Međutim, ukoliko je $i<k$, to jest $k-i>0$, pokažimo da tada postoji prirodan broj n_0 takav da je za sve prirodne brojeve $n>n_0$ desna strana u jednakosti (17) manja od 0. Naime, nejednakost

$$\frac{2N\left[n+1+(1+k)C(n+1)\right]}{(1+k)^{n+2}}+\frac{N}{(1+k)^{n+3}}\Big((n+1)(n+2)-(1+k)^{2}C(n+1)\Big)(i-k)<0 \tag{18a}$$

je ekvivalentna nejednakosti

$$(2+2k+k-i)(1+k)C(n+1)<(n+1)\left[n(k-i)-2i-2\right]. \tag{18b}$$

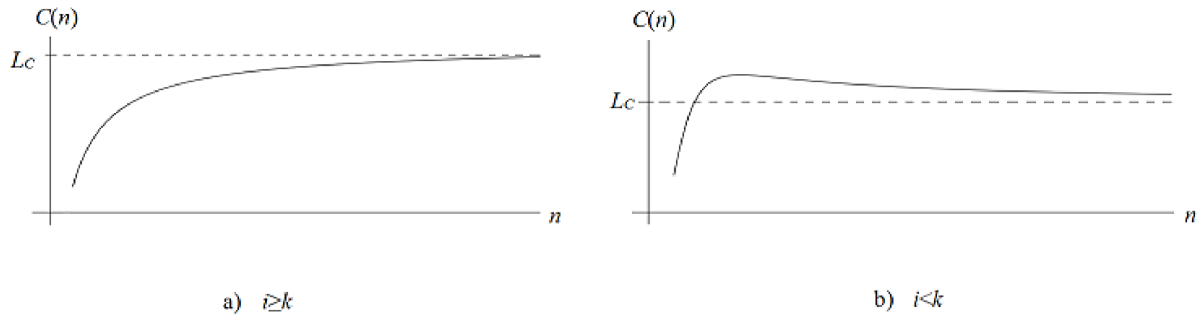
Budući da $C(n+1)$ teži k limesu L_C kada n teži u beskonačnost, to znači da za zadani $\varepsilon>0$ postoji prirodan broj n_0 takav da za sve prirodne brojeve $n>n_0$ vrijedi $-\varepsilon-L_C<C(n+1)<L_C+\varepsilon$. Kako bismo pokazali istinitost nejednakosti (18b), pokažimo ekvivalentnu, ali jaču nejednakost:

$$\Big(\underbrace{2+2k+k-i}_{>0}\Big)(1+k)(\varepsilon+L_C)<(n+1)\Big[\underbrace{n(k-i)-2i-2}_{>0}\Big]. \tag{18c}$$

Naime, prema Lemi 5., koja se u literaturi naziva još i Arhimedovim aksiomom, postoji prirodan broj n_1 takav da za sve prirodne brojeve $n>n_1$ vrijedi $n(k-i)\geq2(i+1)$. Također, prema Arhimedovom aksiomu, postoji prirodan broj $n_2>n_1$ takav da je nejednakost (18c) istinita za sve prirodne brojeve $n\geq n_2$. Dakle, (18c) je istinita za sve $n\geq n_2$, pa je za sve $n\geq n_2$ istinita i nejednakost (18a). Drugim riječima, za sve $n\geq n_2$ je izraz na desnoj strani relacije (17) negativan, što zapravo znači da nakon n_2-gog člana $C(n)$ postaje padajuća funkcija, a kako n teži u beskonačnost, $C(n)$ se približava limesu L_C. Primijetimo da u ovom slučaju, to jest kad je $i<k$, $C(n)$ dostiže svoj maksimum koji je veći od L_C, a potom se padajući asimptotski približava svom limesu. Kako je prema formuli (7)

$$C(1)=\frac{2}{(1+k)^2}<\frac{2}{(1+k)^2}\left(1+\frac{3i+2}{ik+i+1}\right)=C(2), \tag{18d}$$

te $C(1)<\frac{2}{k^2}=L_C$, to $C(n)$ doista prvo raste, prolazi kroz svoj maksimum koji je nužno veći od L_C, a potom počinje padati i asimptotski se približavati graničnoj vrijednosti L_C. Slika 1 predočava putanju funkcije $C=C(n)$, pri čemu je uzeto da je n kontinuirana varijabla. Q.E.D.



Slika 1: Tijek funkcije konveksnosti $C=C(n)$ kao funkcije dospijeća n

Izvor: Izrada autora.

5. Zaključak

U radu je dan pregled svojstava cijene, trajanja i konveksnosti kuponske obveznice uz određene, navedene pretpostavke. Bez primjene difererencijalnog računa, koristeći elementarne algebarske manipulacije svojstva konveksnosti obveznice su matematički dokazana, koliko je poznato autoru, po prvi put u stranoj i domaćoj literaturi. Na taj način su izbjegnuti komplicirani međurezultati na koje vodi tehnika deriviranja, što je doprinijelo višem stupnju razumljivosti rada, te dostupnost široj publici, kako znanstvenicima, tako i stručnjacima u praksi, te studenatima koji možda nemaju nužno predznanje iz matematičke analize. Za dokaze svojstava cijene i trajanja čitatelji su upućeni na adekvatnu literaturu.

Literatura

Aljinović, Z., Marasović, B., Šego, B. (2011) *Financijsko modeliranje*. 2. izmijenjeno i dopunjeno izdanje, Ekonomski fakultet, Split.

Fabozzi, F. J. (2006) *Bond Markets, Analysis and Strategies*. Perentice Hall Inc., New Jersey.

Gardijan, M., Kojić, V., Šego, B. (2012) *Trajanje obveznica: pravila i primjene*. Zbirna znanstvena knjiga (urednici: Aljinović, Z., Marasović, B.), Sveučilište u Splitu, Ekonomski fakultet, Split, ISBN 978-953-281-049-3, str. 5-26 (1. poglavlje)

La Grandville, O. (2000) *Bond pricing and portfolio analysis*. MIT Press, London.

Hawawini, G. A. (1982) *On the mathematics of Macaulay's duration: a note*. Dostupno na: https://flora.insead.edu/fichiersti_wp/inseadwp1982/82-03.pdf [10.2.2015.]

Lawrence, E. R., Shankar, S. (2007) *A simple and student-friendly approach to the mathematics of bond prices*. Quarterly Journal of Business & Economics, (46) 4, 91-99. Dostupno na: https://datapro.fiu.edu/campusedge/files/articles/lawrencee111512382320.pdf [10.2.2015.]

Malkiel, B. (1962) *Expectations, Bond Prices and the Term Structure of Interest Rates*. Quarterly Journal of Economics, 76, 197-218.

Orsag, S. (2011) *Vrijednosni papiri: investicije i instrumenti financiranja*. Revicon, Sarajevo.

Smith, D. J. (1998) *A Note on the Derivation of Closed-Form Formulas for Duration and Convexity Statistics On and Between Coupon Dates.* Journal of Financial Engineering, Vol.7, No 2.

Šego, B., Škrinjarić, T. (2014) *Svojstva konveksnosti obveznica*. Zbornik Ekonomskog fakulteta u Zagrebu, 12 (2), 65-73.

Zorich, V. A. (2004) *Mathematical Analysis I*. Springer–Verlag, Berlin.

Dodatak 1.

U dokazu koristimo izraz za sumu konačnog geometrijskog niza:

$$P=\sum_{t=1}^{n}\frac{iN}{r^n}+\frac{N}{r^n}=\frac{iN}{r}\frac{r\left(r^n-1\right)}{r^n\left(r-1\right)}+\frac{N}{r^n}=\frac{N}{r^n}\left(\frac{\left(r^n-1\right)i}{r-1}+1\right)=\frac{N}{\left(1+k\right)^n}\left[\left(\left(1+k\right)^n-1\right)\frac{i}{k}+1\right].$$

Q.E.D.

Dodatak 2.

Dokaz Teorema 2:

(a) Tvrdnja je očita budući da se iz (2) vidi da je $P=P(k)$ zbroj monotono padajućih funkcija u varijabli k.

(b) Neka je $i_1 \leq i_2$, odnosno $i_2 - i_1 \geq 0$. Odredimo predznak izrazu $P(i_2) - P(i_1)$:

$$P\left(i_2\right)-P\left(i_1\right)=\sum_{t=1}^{n}\frac{i_2N}{r^t}+\frac{N}{r^n}-\left(\sum_{t=1}^{n}\frac{i_1N}{r^t}+\frac{N}{r^n}\right)=\sum_{t=1}^{n}\frac{\left(i_2-i_1\right)N}{r^t}\geq 0\,.$$

Ovim je tvrdnja (b) dokazana.

(c) Iz (3) slijedi

$$L_P=\lim_{n\to\infty}\frac{N}{\left(1+k\right)^n}\left[\left(\left(1+k\right)^n-1\right)\frac{i}{k}+1\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{Ni}{k}-\frac{Ni}{\left(1+k\right)^n k}+\frac{N}{\left(1+k\right)^n}\right]=\frac{Ni}{k}\,.$$

Nadalje,

$$P(n+1)-P(n)=\sum_{t=1}^{n+1}\frac{iN}{r^t}+\frac{N}{r^{n+1}}-\left(\sum_{t=1}^{n}\frac{iN}{r^t}+\frac{N}{r^n}\right)=\frac{N}{r^{n+1}}(i+1-r)=\frac{N}{r^{n+1}}(i-k).$$

Iz posljednjeg izraza slijedi: u slučaju i=k, funkcija $P(n)$ je konstanta ceteris paribus. Ako je i>k onda je $P(n)$ rastuća ceteris paribus, a ako je i<k onda je $P(n)$ padajuća funkcija ceteris paribus. Q.E.D.

Dodatak 3.

Dokaz tvrdnje (e) iz Teorema 3:
Izračunajmo limes funkcije $D(n)$ koristeći relaciju (5) i veličinu L_P iz tvrdnje (c) Teorema 2:

$$L_D=\lim_{n\to\infty}D(n)=\lim_{n\to\infty}\frac{N}{P(n)}\left(i\frac{r(r^n-1)-n(r-1)}{r^n(r-1)^2}+\frac{n}{r^n}\right)=$$

$$=\frac{N}{\frac{i}{k}N}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{ir}{(r-1)^2}\left(1-\frac{1}{r^n}\right)-\frac{in}{r^n(r-1)}+\frac{n}{r^n}\right)=\frac{kr}{(r-1)^2}=1+\frac{1}{k}.$$

Daljnja analiza je analogna analizi u tvrdnji (e) Teorema 6. Izračun određenih izraza za trajanje može se vidjeti u (Gardijan et. al., 2012). Q.E.D.

Dodatak 4.

Dokažimo da je $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^p}{a^n}=0$, pri čemu su n i p prirodni brojevi, a a je realan broj takav da je a>1. Da bismo pokazali dani limes, dovoljno je izračunati limes funkcije $f(x)=\frac{x^p}{a^x}$, $f:\mathrm{IR}\to\mathrm{IR}$, kada x teži u plus beskonačnost (vidjeti u (Zorich, 2004)):

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^p}{a^x}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)\underbrace{\overset{L'H}{=}\cdots\overset{L'H}{=}}_{p\text{ puta}}\lim_{x\to+\infty}\frac{p(p-1)(p-2)\cdots2\cdot1}{a^x\cdot(\ln a)^p}=0.$$

Napomenimo da smo u računanju prethodnog limesa p puta primijenili L'Hospitalovo pravilo. Kako je limes funkcije f jednak $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^p}{a^x}=0$, to i restrikcija funkcije f na skup prirodnih brojeva IN={1, 2, 3, ...} , u oznaci $f|_{\mathrm{IN}}:\mathrm{IN}\to\mathrm{IR}$, ima isti limes $\lim\limits_{n\to+\infty}f(n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^p}{a^n}=0$.