

Testing Precision of Measurements with Hand-Held GPS-Device GPSMAP 76CS

Robert ŽUPAN, Miljenko LAPAINE

University of Zagreb, Faculty of Geodesy, Kačićeva 26, 10000 Zagreb, Croatia
rzupan@geof.hr, mlapaine@geof.hr

272

Abstract: Small hand-held GPS-devices are more and more in use these days. A need for their accuracy and precision testing arises. Precision of measurements with the small hand-held GPS-device GPS-MAP 76CS is described in this paper. Also, the correlation between reading "accuracy" during survey and deviations of individual measurements from their average value has been explored. The importance of the research is in the fact that according to our knowledge, there are not any explanations or definitions of "accuracy" shown on the screen of GPSMAP 76CS or similar devices in available references.

Keywords: hand-held GPS, GPSMAP 76CS, precision, accuracy

1 Introduction

We have used the small portable GPS device GPS-MAP 76CS (Fig. 1) for several years. It has two basic functions: positioning and navigation. We described this device in detail, its possibilities and characteristics in a recent paper (Župan, Lapaine, 2006). In this paper, the testing of precision of positioning by using this device was described in detail.

2 Survey Description

A survey was designed and conducted with the aim of testing the precision by a multiple survey of coordinates of the same point, and with the same device GPS-

MAP 76CS. Because of wider part of open horizon and the assumption of better satellite signal receiving, we selected a point, let it be the point T , at the corner of a stone located on the school playground between the buildings of the Faculty of Architecture, Geodesy and Civil Engineering and the museum "Mimara" in Zagreb (Fig. 2). Coordinates were registered three times a day during 11 days at approximately the same time, in the morning, midday and in the afternoon (Fig 3, Table 1).



Fig. 1. GPSMAP 76CS
Slika 1. GPSMAP 76CS

Ispitivanje preciznosti mjerenja ručnim GPS-uređajem GPSMAP 76CS

Robert ŽUPAN, Miljenko LAPAINE

Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Kačićeva 26, 10000 Zagreb

rzupan@geof.hr, mlapaine@geof.hr

273

Sažetak: *Budući da je u današnje doba sve prisutnija upotreba malih ručnih GPS-uređaja, pojavila se potreba ispitivanja njihove preciznosti i točnosti. U ovome radu opisano je ispitivanje preciznosti mjerenja malim ručnim GPS-uređajem GPSMAP 76CS. Osim toga, istražena je korelacija između očitanih vrijednosti "točnosti" za vrijeme mjerenja i odstupanja pojedinih mjerenja od njihove srednje vrijednosti. Važnost provedenih istraživanja je u tome što se u dostupnim izvorima nigdje ne objašnjava ni definira pojam točnosti koju takvi uređaji prikazuju na svojim ekranima za vrijeme mjerenja.*

Ključne riječi: *ručni GPS, GPSMAP 76CS, preciznost, točnost*

1. Uvod

Već se nekoliko godina služimo malim mobilnim GPS-uređajem GPSMAP 76CS (slika 1), kojemu su dvije osnovne funkcije određivanje koordinata točaka u prostoru i navigacija. U jednom prethodnom radu detaljno je opisan taj uređaj, njegove mogućnosti i karakteristike (Župan, Lapaine, 2006). U ovome je radu detaljno opisano ispitivanje preciznosti koja se tim uređajem može postići pri određivanju koordinata pojedinih točaka.

2. Opis mjerenja

Mjerenje je zamišljeno i provedeno sa ciljem ispitivanja preciznosti višestrukim mjerenjem koordinata jedne te

iste točke, istim uređajem GPSMAP 76CS. Zbog većeg dijela otvorenog horizonta i pretpostavke boljeg prijema signala sa satelita izabrana je točka, nazovimo je T , pri završetku rubnog kamena koji se nalazi na školskom igralištu smještenom između zgrade AGG fakulteta i muzeja „Mimare“ u Zagrebu (slika 2). Registriranje koordinata točaka obavljeno je tri puta dnevno tijekom 11 dana u približno isto vrijeme, odnosno ujutro, u podne i navečer (slika 3, tablica 1).

Prije registriranja položaja točke uređaj je ostavljen na točki nekoliko minuta u stanju mirovanja, zbog početne inicijalizacije i vremena potrebnog za primanje signala što većeg broja satelita i veće preciznosti mjerenja. Mjerenje je provedeno u različitim vremenskim uvjetima (tablica 1).

GPS-uređajem određene su koordinate φ i λ u sustavu WGS 84, pa potom transformirane u koordinate x i y u Gauss-Krügerovoj projekciji (5. zona) na Besselovu 1841 elipsoidu. Transformacijski parametri navedeni su u radu Župana i Lapainea (2006).

U ovome radu, u nastavku, obradit će se pitanje postignute horizontalne preciznosti, a pitanje točnosti, kao i određivanja visina moglo bi biti predmetom nekog drugog rada.

3. Obrada rezultata mjerenja

Označimo s $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n$ rezultate mjerenja (koordinate), a s $p_1, p_1, p_2, p_2, \dots, p_n, p_n$ njihove težine. Vrijednost "točnosti" m_i koju uređaj pokazuje za i -tu točku (3. stupac u tablici 1) odnosi se ravnopravno na obje



Fig. 2. The corner of the stone on the school playground was selected as a measuring point.
Slika 2. Za točku čije se koordinate određuju izabran je rubni kamen na školskom igralištu

274

Every time before registration of coordinates, the device was left on the point for a couple of minutes in a standstill position, because of initialization in the beginning and the time needed for signal capturing from as many satellites as possible and better precision of measuring. Surveying was conducted in different weather conditions (Table 1).

Latitudes and longitudes determined by using the GPS device were registered in WGS 84. Then, they were transformed into the Gauss-Krüger projection (5th zone) based on the old Bessel 1841 ellipsoid. Transformation parameters are given in our recent paper (Župan, Lapaine 2006).

In this paper, hereafter, the question of horizontal precision will be elaborated, while the question of accuracy and the determination of altitude could be subjects of some future research.

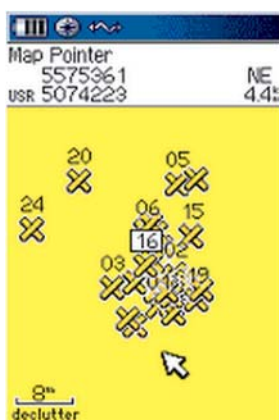


Fig. 3. The distribution of recorded point coordinates on the GPS screen

Slika 3. Raspored registriranih koordinata točaka na ekranu GPS-uređaja

3 Processing of Survey Results

Let us denote the results of the survey (coordinates) with $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n$, and their weights with $p_1, p_1, p_2, p_2, \dots, p_n, p_n$. The value of "accuracy" m_i that the device points out for the i th measurement (3rd column in Table 1) refers to both coordinates equally, whether they are geodetic or Cartesian in the plane of projection. Let us assume that weight p_i can be determined from these values m_i in the following way:

$$p_i = \frac{1}{m_i^2}, i = 1, \dots, n.$$

In the sense of the theory of direct measurement adjustment, we wish to determine the average or adjusted values of coordinates \bar{x}, \bar{y} of the point T and to give an appropriate precision estimation. We will apply the least square method for this purpose. First of all, we denote residuals $v_{x_1}, v_{y_1}, v_{x_2}, v_{y_2}, \dots, v_{x_n}, v_{y_n}$. Now we can write observation equations

$$\begin{aligned} x_1 + v_{x_1} &= \bar{x} \\ y_1 + v_{y_1} &= \bar{y} \\ x_2 + v_{x_2} &= \bar{x} \\ y_2 + v_{y_2} &= \bar{y} \\ \dots & \\ x_n + v_{x_n} &= \bar{x} \\ y_n + v_{y_n} &= \bar{y} \end{aligned}$$

We can see that there are $2n$ equations and two unknown values \bar{x}, \bar{y} . For a better overview, we introduce the matrix form of notation:

$$v = [v_{x_1} \ v_{y_1} \ v_{x_2} \ v_{y_2} \ \dots \ v_{x_n} \ v_{y_n}]^T, \text{ vector of residuals}$$

$$x = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}, \text{ vector of unknowns}$$

Table 1. Results of measurements with GPSMAP 76CS

Tablica 1. Rezultati mjerenja GPSMAP-om 76CS

Num. of survey Br. mjerjenja	Date and time Datum i vrijeme	Accuracy <i>m</i> read from GPS device Točnost <i>m</i> očitana sa GPS uređaja	Geographic coordinates Geografske koordinate WGS 84		Gauss-Krüger coord. Gauss-Krügerove koordinate (m)	
			φ	λ	<i>y</i>	<i>x</i>
1	20.4.2006., 11:09:15 (sunny) (sunčano)	±4 m	45° 48',497	15° 57',888	5575360	5074229
2	20.4.2006., 15:15:23 (sunny) (sunčano)	±6 m	45° 48',500	15° 57',890	5575363	5074234
3	20.4.2006., 20:38:32 (sunny) (sunčano)	±5 m	45° 48',499	15° 57',884	5575354	5074232
4	21.4.2006., 9:11:47 (sunny) (sunčano)	±4 m	45° 48',498	15° 57',888	5575360	5074232
5	21.4.2006., 12:42:20 (cloudy) (oblačno)	±9 m	45° 48',506	15° 57',890	5575362	5074247
6	21.4.2006., 20:40:28 (sunny) (sunčano)	±8 m	45° 48',503	15° 57',887	5575358	5074240
7	22.4.2006., 9:58:27 (sunny) (sunčano)	±9 m	45° 48',497	15° 57',890	5575362	5074230
8	22.4.2006., 12:50:07 (sunny) (sunčano)	±9 m	45° 48',499	15° 57',892	5575364	5074233
9	22.4.2006., 17:53:56 (sunny) (sunčano)	±6 m	45° 48',496	15° 57',886	5575357	5074227
10	25.4.2006., 9:13:23 (sunny) (sunčano)	±6 m	45° 48',499	15° 57',890	5575363	5074232
11	25.4.2006., 12:42:51 (sunny) (sunčano)	±10 m	45° 48',502	15° 57',889	5575360	5074238
12	25.4.2006., 20:59:24 (sunny) (sunčano)	±7 m	45° 48',503	15° 57',888	5575360	5074240
13	26.4.2006., 9:30:49 (sunny) (sunčano)	±8 m	45° 48',497	15° 57',890	5575362	5074229
14	26.4.2006., 13:06:54 (cloudy) (oblačno)	±8 m	45° 48',499	15° 57',891	5575364	5074232
15	26.4.2006., 20:21:53 (cloudy) (oblačno)	±8 m	45° 48',503	15° 57',892	5575365	5074239
16	27.4.2006., 9:08:19 (rainy) (kišovito)	±7 m	45° 48',500	15° 57',887	5575358	5074235
17	27.4.2006., 12:26:58 (cloudy) (oblačno)	±10 m	45° 48',507	15° 57',892	5575365	5074247
18	27.4.2006., 20:43:59 (cloudy) (oblačno)	±10 m	45° 48',498	15° 57',890	5575362	5074231
19	28.4.2006., 8:47:45 (rainy) (kišovito)	±11 m	45° 48',498	15° 57',893	5575365	5074230
20	28.4.2006., 13:00:14 (cloudy) (oblačno)	±8 m	45° 48',507	15° 57',880	5575349	5074247
21	28.4.2006., 16:54:48 (cloudy) (oblačno)	±4 m	45° 48',503	15° 57',887	5575358	5074240
22	2.5.2006., 10:02:01 (sunny) (sunčano)	±5 m	45° 48',499	15° 57',889	5575361	5074232
23	2.5.2006., 12:57:19 (rainy) (kišovito)	±4 m	45° 48',498	15° 57',889	5575361	5074231
24	2.5.2006., 20:37:18 (rainy) (kišovito)	±9 m	45° 48',503	15° 57',875	5575342	5074240
25	3.5.2006., 9:40:58 (sunny) (sunčano)	±8 m	45° 48',499	15° 57',886	5575357	5074233
26	3.5.2006., 12:30:58 (sunny) (sunčano)	±5 m	45° 48',502	15° 57',888	5575359	5074237
27	3.5.2006., 20:45:04 (sunny) (sunčano)	±6 m	45° 48',498	15° 57',893	5575366	5074232
28	4.5.2006., 9:34:38 (sunny) (sunčano)	±8 m	45° 48',496	15° 57',885	5575356	5074228
29	4.5.2006., 14:29:07 (sunny) (sunčano)	±5 m	45° 48',503	15° 57',888	5575359	5074241
30	4.5.2006., 20:36:40 (sunny) (sunčano)	±6 m	45° 48',499	15° 57',886	5575356	5074232
31	5.5.2006., 9:38:47 (sunny) (sunčano)	±6 m	45° 48',499	15° 57',889	5575361	5074234
32	5.5.2006., 12:45:18 (sunny) (sunčano)	±4 m	45° 48',500	15° 57',888	5575359	5074235
33	5.5.2006., 18:14:50 (sunny) (sunčano)	±5 m	45° 48',501	15° 57',888	5575359	5074236
	Average value: Prosječna vrijednost:		$\bar{\varphi} =$ 45°48',500	$\bar{\lambda} =$ 15°57',888	$\bar{y} =$ 5575360	$\bar{x} =$ 5074235

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \text{ matrix of coefficients of}$$

observation equations

$l = [x_1 \ y_1 \ x_2 \ y_2 \ \dots \ x_n \ y_n]^T$, vector of measurement values

$$P = \text{diag}[p_1 \ p_1 \ p_2 \ p_2 \ \dots \ p_n \ p_n], \text{ weight matrix}$$

Now, the observation equations can be written in the following form:

$$l + v = Ax,$$

and the condition

$$v^T P v = \min$$

leads to normal equations

$$A^T P A x = A^T P l.$$

This is the system of two linear equations with two unknowns

$$\begin{bmatrix} \sum p_i & 0 \\ 0 & \sum p_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum p_i x_i \\ \sum p_i y_i \end{bmatrix},$$

which is easy to solve. The solution is:

$$\bar{x} = \frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i}, \quad \bar{y} = \frac{\sum p_i y_i}{\sum p_i} \text{ (general arithmetic mean).}$$

In order to estimate accuracy, we need to determine the standard error of an observation of weight 1

$$m_0 = \sqrt{\frac{v^T P v}{2n-2}} = \sqrt{\frac{\sum p_i (v_{x_i}^2 + v_{y_i}^2)}{2n-2}}.$$

The cofactor matrix of unknowns is

$$Q_{xx} = (A^T P A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sum p_i} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sum p_i} \end{bmatrix}$$

If we write

$$\bar{x} = [1 \ 0] \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}$$

then

$$Q_{xx} = [1 \ 0] \begin{bmatrix} \frac{1}{\sum p_i} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sum p_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sum p_i}$$

and in a completely analogous way

$$Q_{yy} = \frac{1}{\sum p_i}.$$

According to that, we can write the following for the standard deviation of unknowns (coordinates)

$$m_{\bar{x}} = m_0 \sqrt{Q_{xx}} = \frac{m_0}{\sqrt{\sum p_i}}$$

$$m_{\bar{y}} = m_0 \sqrt{Q_{yy}} = \frac{m_0}{\sqrt{\sum p_i}}.$$

And at the end, the standard deviations of measured values (horizontal deviation of each measured coordinates) are

$$m_{x_i} = m_{y_i} = \frac{m_0}{\sqrt{p_i}}, \quad i = 1, \dots, n.$$

The average value of average horizontal deviations by coordinate can be expressed like this

$$\bar{\sigma} = \frac{\sum m_{x_i}}{n} = \frac{\sum m_{y_i}}{n}.$$

In a special case, with the assumption of $p_i=1$, $i=1, \dots, n$, one can get:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}, \quad \bar{y} = \frac{\sum y_i}{n}$$

$$m_0 = \sqrt{\frac{\sum (v_{x_i}^2 + v_{y_i}^2)}{2n-2}}$$

$$m_{\bar{x}} = m_{\bar{y}} = \frac{m_0}{\sqrt{n}}$$

$$m_{x_i} = m_{y_i} = m_0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Calculations based on the derived formulae were performed by *Excel* with a maximum number of decimal places and are shown in Table 2.

With an assumption that all measurements have the same accuracy, namely $p_i=1$, $i=1, \dots, n$, we can get:

$$\bar{\varphi} = \frac{\sum \varphi_i}{n} = \frac{\sum \varphi_i}{33} = 45^\circ 48' .500,$$

$$\bar{\lambda} = \frac{\sum \lambda_i}{n} = \frac{\sum \lambda_i}{33} = 15^\circ 57' .888,$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{\sum y_i}{33} = 5575360 \text{ m},$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{\sum x_i}{33} = 5074235 \text{ m}.$$

Let us note that coordinates calculated by using the simple arithmetic mean formula and the general arithmetic mean (Table 2) are completely equal (rounded to meter). It means that the "accuracies" read during measurements did not impact the result significantly. Nevertheless, one should not make a general conclusion of ignoring the weight impact based on only one example.

koordinate, bile one geodetske ili pravokutne u ravni projekcije. Pretpostavit ćemo da se težine p_i mogu odrediti iz tih vrijednosti m_i na sljedeći način:

$$p_i = \frac{1}{m_i^2}, i = 1, \dots, n$$

U smislu teorije izjednačenja izravnih (direktnih) mjerenja, želimo odrediti srednje ili izjednačene vrijednosti koordinata \bar{x}, \bar{y} točke T i dati njihovu procjenu nesigurnosti. U tu svrhu primijenit ćemo metodu najmanjih kvadrata. Označimo s $v_{x_1}, v_{y_1}, v_{x_2}, v_{y_2}, \dots, v_{x_n}, v_{y_n}$ popravke mjerenih koordinata. Sada možemo napisati jednadžbe popravaka

$$\begin{aligned} x_1 + v_{x_1} &= \bar{x} \\ y_1 + v_{y_1} &= \bar{y} \\ x_2 + v_{x_2} &= \bar{x} \\ y_2 + v_{y_2} &= \bar{y} \\ \dots & \\ x_n + v_{x_n} &= \bar{x} \\ y_n + v_{y_n} &= \bar{y} \end{aligned}$$

Uočimo da imamo $2n$ jednadžbi popravaka i dvije nepoznate veličine \bar{x}, \bar{y} . Radi preglednosti uvedimo matični zapis:

$$v = [v_{x_1} \ v_{y_1} \ v_{x_2} \ v_{y_2} \ \dots \ v_{x_n} \ v_{y_n}]^T, \text{ vektor popravaka}$$

$$x = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}, \text{ vektor nepoznanica}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \text{ matrica koeficijenta}$$

jednadžbi popravaka

$$l = [x_1 \ y_1 \ x_2 \ y_2 \ \dots \ x_n \ y_n]^T, \text{ vektor mjerenih veličina}$$

$$P = \text{diag}[p_1 \ p_1 \ p_2 \ p_2 \ \dots \ p_n \ p_n], \text{ matrica težina mjerenih veličina}$$

Jednadžbe popravaka mogu se sada napisati ovako:

$$l + v = Ax,$$

a uvjet

$$v^T P v = \min$$

vodi na rješavanje normalnih jednadžbi

$$A^T P A x = A^T P l.$$

To je sustav od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice

$$\begin{bmatrix} \Sigma p_i & 0 \\ 0 & \Sigma p_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma p_i x_i \\ \Sigma p_i y_i \end{bmatrix}$$

koji se lako riješi i dobije

$$\bar{x} = \frac{\Sigma p_i x_i}{\Sigma p_i}, \bar{y} = \frac{\Sigma p_i y_i}{\Sigma p_i} \text{ (opća aritmetička sredina).}$$

Za ocjenu točnosti rješenja najprije odredimo standardno odstupanje jedinične težine

$$m_0 = \sqrt{\frac{v^T P v}{2n - 2}} = \sqrt{\frac{\Sigma p_i (v_{x_i}^2 + v_{y_i}^2)}{2n - 2}}.$$

Matrica kofaktora nepoznanica je

$$Q_{xx} = (A^T P A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\Sigma p_i} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\Sigma p_i} \end{bmatrix}$$

Ako uočimo da se može napisati

$$\bar{x} = [1 \ 0] \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}$$

onda je

$$Q_{\bar{x}\bar{x}} = [1 \ 0] \begin{bmatrix} \frac{1}{\Sigma p_i} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\Sigma p_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\Sigma p_i}$$

i potpuno analogno

$$Q_{\bar{y}\bar{y}} = \frac{1}{\Sigma p_i}.$$

Prema tome možemo napisati za standardna odstupanja nepoznanica (koordinata)

$$m_{\bar{x}} = m_0 \sqrt{Q_{\bar{x}\bar{x}}} = \frac{m_0}{\sqrt{\Sigma p_i}}$$

$$m_{\bar{y}} = m_0 \sqrt{Q_{\bar{y}\bar{y}}} = \frac{m_0}{\sqrt{\Sigma p_i}}.$$

I na kraju, standardno odstupanje mjerenih veličina (horizontalnih odstupanja pojedine mjerene koordinate) su

$$m_{x_i} = m_{y_i} = \frac{m_0}{\sqrt{p_i}}, i = 1, \dots, n.$$

Srednja vrijednost srednjih horizontalnih odstupanja po koordinati može se izraziti ovako

$$\bar{\sigma} = \frac{\Sigma m_{x_i}}{n} = \frac{\Sigma m_{y_i}}{n}.$$

U posebnom slučaju, uz pretpostavku $p_i=1, i=1, \dots, n$, dobiva se:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n}, \bar{y} = \frac{\Sigma y_i}{n}$$

$$m_0 = \sqrt{\frac{\Sigma (v_{x_i}^2 + v_{y_i}^2)}{2n - 2}}$$

$$m_{\bar{x}} = m_{\bar{y}} = \frac{m_0}{\sqrt{n}}$$

Table 2. The adjustment of direct measurements from Table 1 considering $p_i = \frac{1}{m_i^2}$, where m_i are the read "accuracies"

Tablica 2. Izjednačenje izravnih mjerenja iz tablice 1 uzimajući u obzir očitane "točnosti" m_i tako da bude $p_i = \frac{1}{m_i^2}$

Ordinal Red. br.	p_i	$p_i y_i$	$p_i x_i$	v_{y_i}	v_{x_i}	$p_i v_{y_i}^2$	$p_i v_{x_i}^2$	$m_{x_i} = m_{y_i}$
1	0,06	348460,0	317139,3	-0,5	5,4	0,0	1,8	2,8
2	0,03	154871,2	140950,9	-3,5	0,4	0,3	0,0	4,2
3	0,04	223014,2	202969,3	5,5	2,4	1,2	0,2	3,5
4	0,06	348460,0	317139,5	-0,5	2,4	0,0	0,4	2,8
5	0,01	68831,6	62645,0	-2,5	-12,6	0,1	2,0	6,3
6	0,02	87115,0	79285,0	1,5	-5,6	0,0	0,5	5,6
7	0,01	68831,6	62644,8	-2,5	4,4	0,1	0,2	6,3
8	0,01	68831,7	62644,9	-4,5	1,4	0,3	0,0	6,3
9	0,03	154871,0	140950,8	2,5	7,4	0,2	1,5	4,2
10	0,03	154871,2	140950,9	-3,5	2,4	0,3	0,2	4,2
11	0,01	55753,6	50742,4	-0,5	-3,6	0,0	0,1	7,0
12	0,02	113782,9	103555,9	-0,5	-5,6	0,0	0,6	4,9
13	0,02	87115,0	79284,8	-2,5	5,4	0,1	0,5	5,6
14	0,02	87115,1	79284,9	-4,5	2,4	0,3	0,1	5,6
15	0,02	87115,1	79285,0	-5,5	-4,6	0,5	0,3	5,6
16	0,02	113782,8	103555,8	1,5	-0,6	0,0	0,0	4,9
17	0,01	55753,7	50742,5	-5,5	-12,6	0,3	1,6	7,0
18	0,01	55753,6	50742,3	-2,5	3,4	0,1	0,1	7,0
19	0,01	46077,4	41935,8	-5,5	4,4	0,3	0,2	7,7
20	0,02	87114,8	79285,1	10,5	-12,6	1,7	2,5	5,6
21	0,06	348459,9	317140,0	1,5	-5,6	0,1	2,0	2,8
22	0,04	223014,4	202969,3	-1,5	2,4	0,1	0,2	3,5
23	0,06	348460,1	317139,4	-1,5	3,4	0,1	0,7	2,8
24	0,01	68831,4	62644,9	17,5	-5,6	3,8	0,4	6,3
25	0,02	87115,0	79284,9	2,5	1,4	0,1	0,0	5,6
26	0,04	223014,4	202969,5	0,5	-2,6	0,0	0,3	3,5
27	0,03	154871,3	140950,9	-6,5	2,4	1,2	0,2	4,2
28	0,02	87114,9	79284,8	3,5	6,4	0,2	0,6	5,6
29	0,04	223014,4	202969,6	0,5	-6,6	0,0	1,8	3,5
30	0,03	154871,0	140950,9	3,5	2,4	0,3	0,2	4,2
31	0,03	154871,1	140950,9	-1,5	0,4	0,1	0,0	4,2
32	0,06	348459,9	317139,7	0,5	-0,6	0,0	0,0	2,8
33	0,04	223014,4	202969,4	0,5	-1,6	0,0	0,1	3,5
Σ	0,92	5112633,48	4653099,17	-3,98	-20,39	11,88	19,24	159,91
		$\bar{y} = 5575360$	$\bar{x} = 5074234$			$m_0 = 0,70$		$\bar{\sigma} = 4,85$
		$m_{\bar{x}} = m_{\bar{y}} = 0,73$						

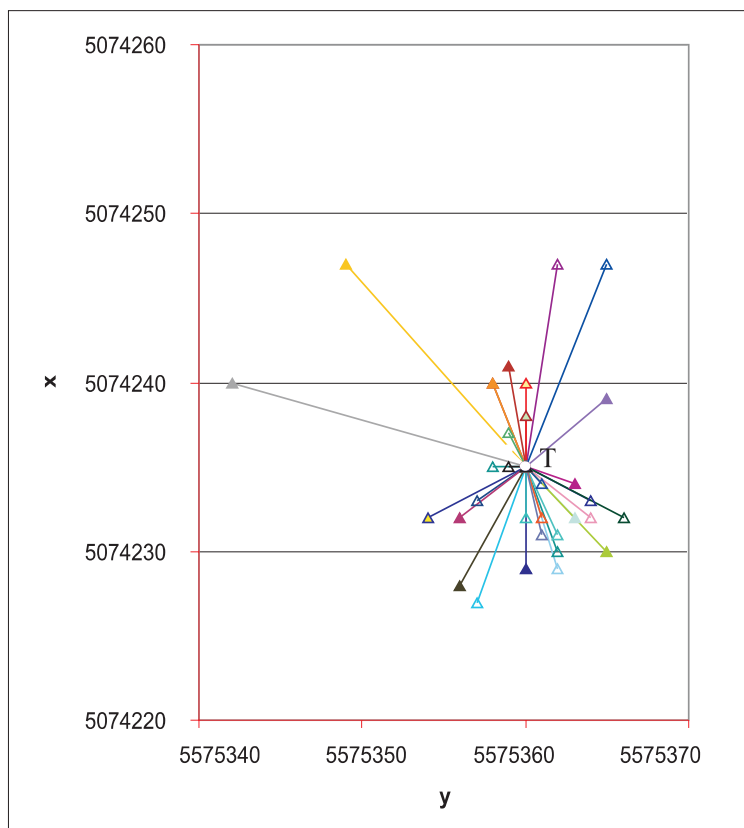


Fig. 4. The distribution of measurements in relation to the estimated position of point T

Slika 4. Raspored mjerenja u odnosu na procijenjeni položaj točke T

$$m_{x_i} = m_{y_i} = m_0, i=1, \dots, n.$$

Računanja na temelju izvedenih formula provedena su programom *Excel* s maksimalnim brojem decimala i prikazana u tablici 2.

Uz pretpostavku da su sva mjerenja jednake točnosti, tj. uz pretpostavku $p_i=1, i=1, \dots, n$, dobiva se:

$$\bar{\varphi} = \frac{\sum \varphi_i}{n} = \frac{\sum \varphi_i}{33} = 45^\circ 48',500,$$

$$\bar{\lambda} = \frac{\sum \lambda_i}{n} = \frac{\sum \lambda_i}{33} = 15^\circ 57',888,$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{\sum y_i}{33} = 5575360 \text{ m},$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{\sum x_i}{33} = 5074235 \text{ m}$$

Uočimo da su koordinate dobivene s pomoću obične aritmetičke sredine i opće aritmetičke sredine (vidi tablica 2) sasvim jednake (zaokružene na metar). To znači da uzimanje u obzir težina, odnosno očitanih točnosti za vrijeme mjerenja nije znatnije utjecalo na rezultat. Ipak, na

temelju samo jednog primjera ne bi trebalo zaključivati da se utjecaj težina općenito može zanemariti.

4. Analiza rezultata

Pri mjerenju malim ručnim GPS-uređajima obično možemo pratiti točnost određivanja položaja na dva načina. Jedan je vizualni, a drugi numerički. Na vrhu stranice na ekranu uređaja nalazi se statusna traka na kojoj se nalaze pojedini indikatori stanja. Između ostalog, pojavljuje se „točnost“ (eng. *accuracy*) u obliku npr. ± 14 m. Ta se „točnost“, odnosno vjerojatnije nesigurnost položaja, korigira ili mijenja svake sekunde (Župan, Lapaine 2006). U skladu s tim na ekranu se može vidjeti kružnica sa središtem u točki koja prikazuje položaj uređaja, a koja zorno prikazuje spomenutu numerički izraženu „točnost“, tj. područje nesigurnosti.

Jedino što se iz priručnika može saznati o kružnici točnosti je da će ona biti to manja što je položaj točnije određen. Međutim, o značenju, odnosno definiciji pojma točnosti, na temelju priručnika ili druge literature, nismo uspješni saznati ništa.

Zbog toga smo na temelju vlastitih mjerenja i malo matematike pokušali odgonetnuti što bi očitana „točnost“ za vrijeme mjerenja ručnim GPS-om mogla biti. U tu svrhu

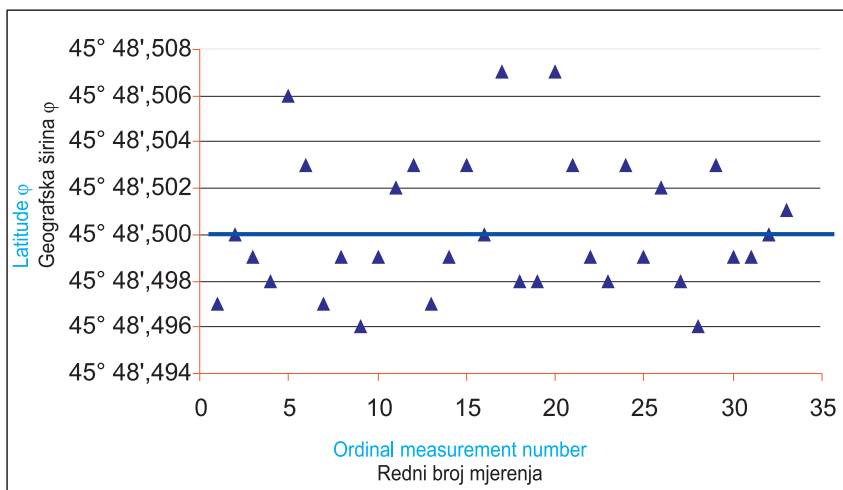


Fig. 5. The distribution of the measured latitude φ ; the blue line depicts the average value
 Slika 5. Raspored mjerenja po geografskoj širini φ ; plava linija označava srednju vrijednost

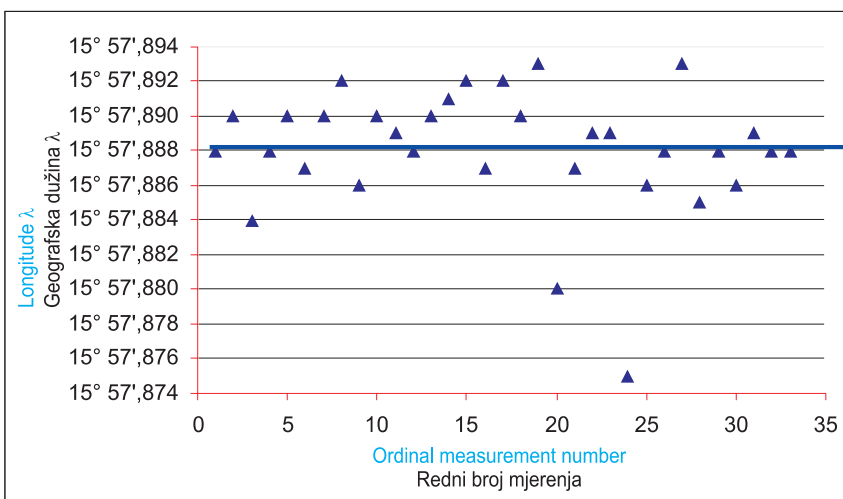


Fig. 6. The distribution of the measured longitude λ ; the blue line depicts the average value
 Slika 6. Raspored mjerenja po geografskoj dužini λ ; plava linija označava srednju vrijednost

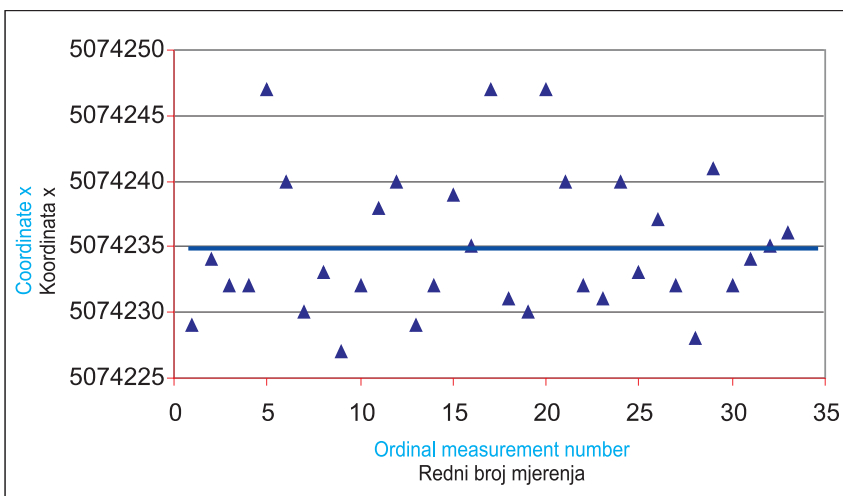


Fig. 7. The distribution of values by coordinate x ; the blue line depicts the average value
 Slika 7. Raspored mjerenja po koordinati x ; plava linija označava srednju vrijednost

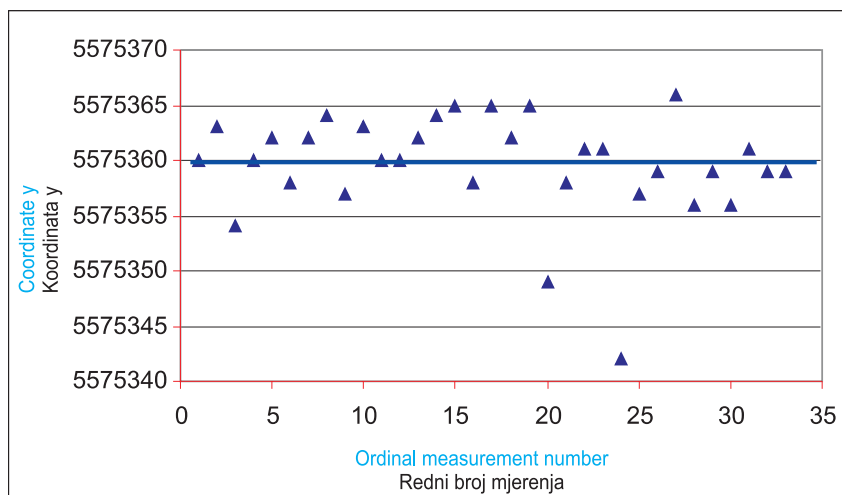


Fig. 8. The distribution of values by coordinate y; the blue line depicts the average value

Slika 8. Raspored mjerenja po koordinati y; plava linija označava srednju vrijednost

izradili smo tablicu 3, u kojoj su za sva 33 mjerenja (prikazana u tablici 1) dane vrijednosti očitanih „točnosti“ m_p , izračunanih $\sigma_i = m_{x_i} = m_{y_i}$ (srednja horizontalna odstupanja pojedine mjerene koordinate, preuzeta iz tablice 2) i d_p , odstupanja, odnosno udaljenosti od pojedine točke dobivene mjerenjem do „srednje“ točke, tj. točke dobivene izjednačenjem iz svih mjerenja. Usporedbom veličina m_p , σ_p , d_i željelo se dobiti odgovor na postavljeno pitanje: što je „točnost“ koju čitamo na ekranu uređaja za vrijeme mjerenja.

U tu svrhu izrađen je grafički prikaz (slika 9) i izračunani koeficijenti korelacije:

$$r_{m,d} = \frac{\sum (m_i - \bar{m})(d_i - \bar{d})}{\sqrt{\sum (m_i - \bar{m})^2} \sqrt{\sum (d_i - \bar{d})^2}} = 0,45$$

$$r_{d,\sigma} = \frac{\sum (d_i - \bar{d})(\sigma_i - \bar{\sigma})}{\sqrt{\sum (d_i - \bar{d})^2} \sqrt{\sum (\sigma_i - \bar{\sigma})^2}} = 0,45$$

$$r_{m,\sigma} = \frac{\sum (m_i - \bar{m})(\sigma_i - \bar{\sigma})}{\sqrt{\sum (m_i - \bar{m})^2} \sqrt{\sum (\sigma_i - \bar{\sigma})^2}} = 1,00$$

Iz dobivenih rezultata proizlazi da između očitane „točnosti“ m_i i izračunanih $\sigma_i = m_{x_i} = m_{y_i}$ postoji egzaktna linearna veza. Zaista, ako u izraz

$$m_{x_i} = m_{y_i} = \frac{m_0}{\sqrt{\rho_i}}, \quad i = 1, \dots, n$$

uvrstimo pretpostavku

$$\rho_i = \frac{1}{m_i^2}, \quad i = 1, \dots, n$$

dobit ćemo

$$m_{x_i} = m_{y_i} = m_0 m_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

To drugim riječima znači da su σ_i i m_i proporcionalne veličine. Stoga i koeficijenti korelacije i moraju biti jednaki (Petrović, 2007). Odatle zaključujemo da, na žalost, iz izračunanih $\sigma_i = m_{x_i} = m_{y_i}$ ne možemo ništa zaključiti o značenju očitanih „točnosti“ m_i .

Nadalje, budući da je koeficijent korelacije $r_{m,d} = 0,45$, to zaključujemo da između očitanih „točnosti“ m_i i izračunanih odstupanja d_i (udaljenosti od pojedine točke dobivene mjerenjem do „srednje“ točke) ne postoji izraženija linearna veza. To nam potvrđuje i slika 10 na kojoj su prikazani pravci regresije.

Prije donošenja zaključka podsjetimo se definicija preciznosti i točnosti mjerenja (usporedi DZNM 1997).

Preciznost (mjerenja) (eng. *precision of measurement*; fr. *précision de mesure*; nj. *Präzision der Messung*) je bliskost slaganja između neovisnih ispitnih rezultata dobivenih pod ugovornim uvjetima. Napomene: (1) Kao mjera preciznosti primjenjuje se standardno odstupanje uz mjerenja u uvjetima ponovljivosti, odnosno obnovljivosti. Što su slučajna odstupanja manja, to je precizniji postupak. (2) Izraz preciznost često se neispravno primjenjuje za ocjenu točnosti.

Točnost (mjerna) (eng. *accuracy of measurement*; fr. *exactitude de mesure*; nj. *Messgenauigkeit*) je bliskost slaganja između ispitnog rezultata i prihvaćene referencijske vrijednosti. Napomene: (1) „Točnost“ je kvalitativan pojam. (2) Izrazi „točnost“ i „preciznost“ moraju se upotrebljavati u ispravnom smislu i ne smiju se zamijeniti.

4 Result Analysis

During a survey with small hand-held GPS-devices, one can usually monitor the position "accuracy" in two ways. One is visual and the other numerical. On top of page on the device screen, there is a status bar with status indicators. Among others, there is also "accuracy" in the form like this: ± 14 m. The "accuracy" value, or more probably position uncertainty value, is corrected or changed every second (Župan, Lapaine 2006). According to that, one can see on the device screen a circle with the centre in the point which represents the device position and shows the mentioned numerical "accuracy", i.e. the area of uncertainty.

From the device manual, one can only find out that the accuracy circle will be the smaller the more accurately the position is determined. Nevertheless, there is nothing else in the manual or other references about the definition of the term "accuracy" for this device.

Because of that, and on the basis of performed measurements and using some mathematics, we tried to find out the answer to the question: what could the "accuracy" value read on the hand-held GPS device be? For that purpose, Table 3 was created that contains values of read accuracies m_i , calculated $\sigma_i = m_{x_i} = m_{y_i}$ values (average horizontal deviation for each measured coordinate, taken from Table 2), and deviations d_i , i.e. distances from each measured point to the "average" or adjust-

Table 3. Values m_i , σ_i , d_i for all measurements

Tablica 3. Vrijednosti m_i , σ_i , d_i za sva mjerenja

Measurement number Broj mjerenja	m_i	σ_i	d_i	$m_i - \bar{m}$	$\sigma_i - \bar{\sigma}$	$d_i - \bar{d}$
1	± 4	2,8	5,4	-2,9	-2,0	-0,5
2	± 6	4,2	3,5	-0,9	-0,6	-2,3
3	± 5	3,5	6,0	-1,9	-1,3	0,1
4	± 4	2,8	2,4	-2,9	-2,0	-3,4
5	± 9	6,3	12,9	2,1	1,5	7,0
6	± 8	5,6	5,8	1,1	0,8	-0,1
7	± 9	6,3	5,1	2,1	1,5	-0,8
8	± 9	6,3	4,7	2,1	1,5	-1,1
9	± 6	4,2	7,8	-0,9	-0,6	1,9
10	± 6	4,2	4,2	-0,9	-0,6	-1,6
11	± 10	7,0	3,7	3,1	2,2	-2,2
12	± 7	4,9	5,6	0,1	0,1	-0,2
13	± 8	5,6	5,9	1,1	0,8	0,1
14	± 8	5,6	5,1	1,1	0,8	-0,8
15	± 8	5,6	7,2	1,1	0,8	1,3
16	± 7	4,9	1,6	0,1	0,1	-4,3
17	± 10	7,0	13,8	3,1	2,2	7,9
18	± 10	7,0	4,2	3,1	2,2	-1,7
19	± 11	7,7	7,0	4,1	2,9	1,2
20	± 8	5,6	16,4	1,1	0,8	10,5
21	± 4	2,8	5,8	-2,9	-2,0	-0,1
22	± 5	3,5	2,8	-1,9	-1,3	-3,0
23	± 4	2,8	3,7	-2,9	-2,0	-2,2
24	± 9	6,3	18,4	2,1	1,5	12,5
25	± 8	5,6	2,8	1,1	0,8	-3,0
26	± 5	3,5	2,7	-1,9	-1,3	-3,2
27	± 6	4,2	6,9	-0,9	-0,6	1,1
28	± 8	5,6	7,3	1,1	0,8	1,4
29	± 5	3,5	6,6	-1,9	-1,3	0,8
30	± 6	4,2	4,2	-0,9	-0,6	-1,6
31	± 6	4,2	1,6	-0,9	-0,6	-4,3
32	± 4	2,8	0,8	-2,9	-2,0	-5,1
33	± 5	3,5	1,7	-1,9	-1,3	-4,2
	$\bar{m} = 7$	$\bar{\sigma} = 4,9$	$\bar{d} = 5,9$	$\Sigma = 0,0$	$\Sigma = 0,0$	$\Sigma = 0,0$

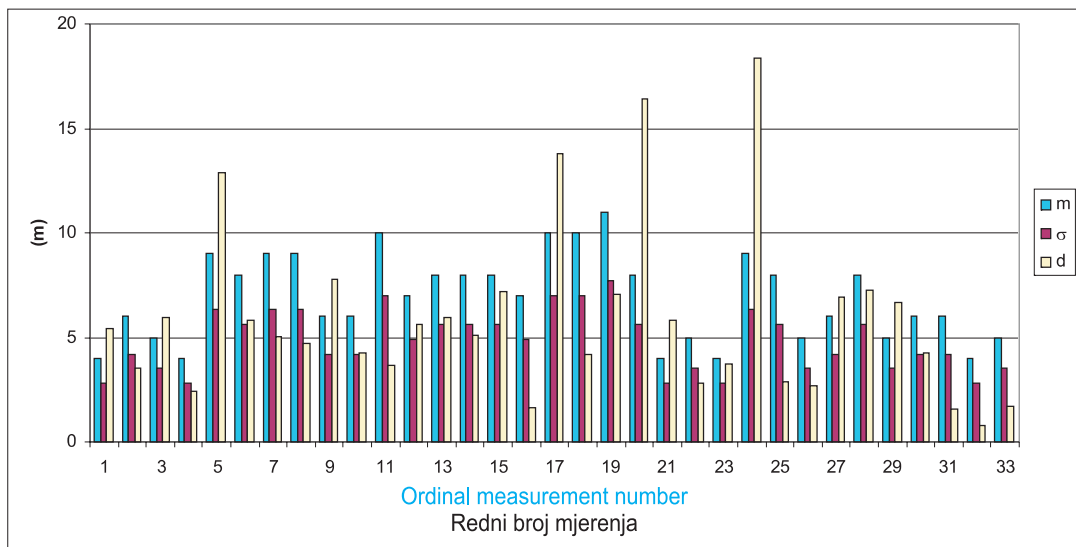


Fig. 9. Diagram representing values from Table 3

Slika 9. Grafički prikaz vrijednosti iz tablice 3

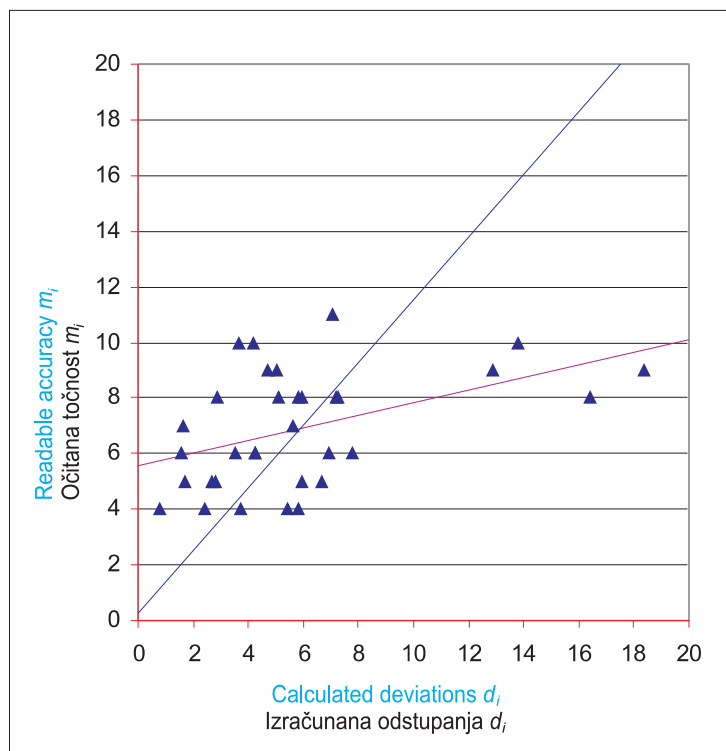


Fig. 10. Calculated deviations d_i versus read "accuracy" m_i values and regression lines

Slika 10. Prikaz izračunanih odstupanja d_i u odnosu prema očitanim „točnostima“ m_i i pravci regresije

ed point, for all measurements (shown in Table 1). We wish to get the answer to the stated question by comparing values m_p , σ_p , d_i .

For that purpose, we made a diagram (Fig. 9), and calculated correlation coefficients:

$$r_{m,d} = \frac{\sum (m_i - \bar{m})(d_i - \bar{d})}{\sqrt{\sum (m_i - \bar{m})^2} \sqrt{\sum (d_i - \bar{d})^2}} = 0.45$$

$$r_{d,\sigma} = \frac{\sum (d_i - \bar{d})(\sigma_i - \bar{\sigma})}{\sqrt{\sum (d_i - \bar{d})^2} \sqrt{\sum (\sigma_i - \bar{\sigma})^2}} = 0.45$$

$$r_{m,\sigma} = \frac{\sum (m_i - \bar{m})(\sigma_i - \bar{\sigma})}{\sqrt{\sum (m_i - \bar{m})^2} \sqrt{\sum (\sigma_i - \bar{\sigma})^2}} = 1.00$$

From these results, we can see that there is an exact linear connection between the "accuracy" m_i read and the $\sigma_i = m_{x_i} = m_{y_i}$ value calculated. Really, if we substitute

$$m_{x_i} = m_{y_i} = \frac{m_0}{\sqrt{\rho_i}}, \quad i = 1, \dots, n$$

into the expression

$$\rho_i = \frac{1}{m_i^2}, \quad i = 1, \dots, n$$

we immediately get

$$m_{x_i} = m_{y_i} = m_0 m_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

In other words, it means that σ_i and m_i are proportional values. Hence, the correlation coefficients $r_{m,d}$ and $r_{d,\sigma}$ must be equal (Petrović 2007). From there, we conclude that from calculated values $\sigma_i = m_{x_i} = m_{y_i}$, unfortunately, we are not able to conclude about the meaning of the "accuracy" m_i read.

Furthermore, since correlation coefficient is $r_{m,d} = 0.45$, one can conclude that there is not a stronger linear relation between the read "accuracy" m_i and calculated deviations d_i . That can be seen from Fig. 10 where both regression lines are shown.

Before the final conclusion, let us remind of definitions of precision and measurement accuracy (see DZNM 1997).

Precision (of measurement) (Fr. *précision de mesure*; Ger. *Präzision der Messung*) is closeness of agreement

between independent test results obtained under stipulated conditions. Notes: (1) Standard deviation is used as a measure of precision in conditions of repeatability, or reproducibility. The smaller the random deviations are, the more precise the procedure is. (2) The term precision is often inadequately used for evaluation of accuracy.

Accuracy (of measurement) (Fr. *exactitude de mesure*; Ger. *Messgenauigkeit*) is closeness of agreement between a test result result and the accepted reference value. Notes: (1) "Accuracy" is a qualitative concept. (2) Expressions "accuracy" and "precision" must be used in the correct sense and must never be interchanged.

4 Conclusion

Measurement precision of the small hand-held GPS-device GPSMAP 76CS was tested. The obtained average value of "accuracy" values read from the device screen was 7 meters. The calculated average of horizontal deviations of each point from the "average" point was 5.9 m. That means the precision or repeatability was a little better (15.7%) than the accuracies shown by the device.

It is not possible to give a conclusion about the read "accuracy" on the basis of average horizontal deviations of each measured coordinate and obtained from the adjustment because these two variables are proportional.

Furthermore, it was shown that there is no correlation ($r = 0.45$) between values of accuracies read from the device during the survey and calculated average horizontal deviations of individual measured coordinates. According to that, from accuracy values read, one can not easily calculate the average horizontal deviation of each measured coordinate or vice-versa.

Therefore, we conclude that upon performed tests it was not possible to completely answer the question about the meaning of "accuracy" which was read from the device during measurements. The research in that direction should be continued, but also expand to test the precision of altitude determination as well as accuracy estimation.

Acknowledgements

Authors are thankful to Prof. Dr. Gorana Novaković and Dr. Svetozar Petrović for useful suggestions and corrections of the manuscript of this paper.

4. Zaključak

Ispitana je preciznost mjerenja malim ručnim GPS-uređajem GPSMAP 76CS. Dobivena je srednja vrijednost očitanih vrijednosti „točnosti“ s uređaja u iznosu od 7 metara. Izračunana srednja vrijednost horizontalnih odstupanja pojedine točke od „srednje“ točke je 5,9 m. To znači da je preciznost ili ponovljivost nešto bolja (15,7%) od „točnosti“ koju prikazuje uređaj.

Na temelju srednjih horizontalnih odstupanja pojedine mjerene koordinate dobivenih nakon provedenog izjednačenja nije moguće donijeti zaključak o tome što je očitana „točnost“, jer su te dvije veličine proporcionalne.

Nadalje, pokazano je da ne postoji korelacija ($r=0,45$) između očitanih vrijednosti točnosti s uređaja za vrijeme mjerenja i izračunanih srednjih horizontalnih odstupanja

pojedine mjerene koordinate. Prema tome, iz pročitane vrijednosti točnosti ne može se lako izračunati srednje horizontalno odstupanje pojedine mjerene koordinate i obratno.

Prema tome, na temelju provedenih ispitivanja nije moguće u potpunosti odgovoriti na postavljeno pitanje o značenju „točnosti“ koja se čita s uređaja za vrijeme mjerenja. Istraživanja bi u tom smislu trebalo nastaviti, ali i proširiti na ispitivanje preciznosti određivanja visina te procjene točnosti rezultata dobivenih mjerenjem.

Zahvala

Autori zahvaljuju prof. dr. sc. Gorani Novaković i dr. sc. Svetozaru Petroviću na korisnim sugestijama i otklancjanju propusta koji su se potkrali u rukopisu ovog rada.

References / Literatura

- DZNM (1997): Statistika – Rječnik i znakovi – 1. dio: Vjerojatnost i opći statistički nazivi (ISO 3534-1:1993), HRN ISO 3543-1, Državni zavod za normizaciju i mjeriteljstvo, Zagreb.
- Garmin (2004): GPSMAP 76CS with sensors and maps, owner's manual (Upute za upotrebu), http://www.tramssoft.ch/downloads/garmin/gpsmap76cs_users-guide.pdf
- Petrović, S. (2007): Osobno priopćenje. Personal communication.
- Župan, R., Lapaine, M. (2006): GPSMAP 76CS, Kartografija i geoinformacije 6, 129-136.