

UDK 528.181:528.37:528.318(497.5)
Izvorni znanstveni članak

Analiza točnosti nivelmanskih mjerenja i jedinstveno izjednačenje II. NVT-a

Milan REZO – Varaždin¹, Danko MARKOVINOVIĆ – Zagreb²,
Marko ŠLJIVARIĆ – Šibenik³

SAŽETAK. U radu je provedena cjelovita analiza nivelmanskih vlakova i poligona II. NVT-a te izračunate nesuglasice zatvaranja nivelmanskih poligona, referentne srednje pogreške i referentne vjerojatne pogreške kao jedan od temeljnih elemenata za određivanje kriterija točnosti. Provedena je analiza računanja referentne vjerojatne pogreške s obzirom na broj nivelmanskih vlakova u nivelmanskom poligonu kao i na broj nivelmanskih strana u nivelmanskom vlakvu. Izračunata je vrijednost konstante za normalnu ortometrijsku popravku i provedena analiza utjecaja određivanja visina i geodetskih širina krajnjih točaka nivelmanske strane na računate pojedinačne vrijednosti ortometrijskih popravki. Prvi se put prikazuje jedinstveno izjednačenje II. NVT-a metodom posrednog izjednačenja uz fiksne repere pet mareografa te je provedena analiza dobivenih rezultata izjednačenja s prethodnim službenim izjednačenjem mreže nivelmanskih poligona II. NVT-a za područje Republike Hrvatske.

Ključne riječi: nivelmanska strana, nivelmanski vlak, nivelmanska figura, normalna ortometrijska popravka, jedinstveno izjednačenje.

1. Uvod

Određivanje visinskih razlika u nivelmanu visoke točnosti spada u red najzahtjevnijih i najpreciznijih geodetskih mjerenja (Zrinjski i dr. 2010). Razlog tomu je činjenica da ne postoji alternativa u pogledu točnosti, pa mreže geometrijskog nivelmana, prije svega nivelman visoke točnosti (NVT), čine okosnicu nacionalnih i kontinentalnih visinskih sustava. Stabilizirane točke (reperi) podložne su različitim geodinamičkim procesima uzrokovanim gibanjima tektonskih ploča ili lokalnim poremećajima Zemljine površine, koji direktno dovode do promjene položaja (visine) repera. Pomaci tektonskih ploča izravno su povezani s točnosti mjerenja s posebnim naglaskom na stabilnost visinske osnove u dužem vremen-

¹ doc. dr. sc. Milan Rezo, Geotehnički fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Hallerova aleja 7, HR-42000 Varaždin, Croatia, e-mail: mrezo@gfv.hr,

² dr. sc. Danko Markovinović, Državna geodetska uprava, Gruška 20, HR-10000 Zagreb, Croatia, e-mail: danko.markovinovic@dgu.hr,

³ dr. sc. Marko Šljivarić, Geodezija d.o.o. Šibenik, Kralja Zvonimira 42, HR-22000 Šibenik, Croatia, e-mail: marko.sljivacic@gmail.com.

skom razdoblju. Zato se preporuča reniveliranje osnovnih visinskih mreža u razdoblju od 20 do 30 godina (Rožić 1995).

Mreža nivelmana visoke točnosti uspostavljena od 1970. do 1973. godine čini osnovu visinskoga referentnog sustava u Republici Hrvatskoj. Nivelemanskim vlakovima povezani su mareografi (mareografski reperi), fundamnetalni (FR) i čvorni reperi, a kao cjelina čine niz uvezanih nivelmanskih figura u nivelmanskoj mreži (Klak i dr. 1992, Klak i dr. 1994).

Prema definiciji, nivelman visoke točnosti je onaj geometrijski nivelman koji zadovoljava sljedeće uvjete (Rožić 1995):

- svaka nivelmanska razlika mora biti mjerena dvostrukim mjerenjima u dva suprotna smjera pod različitim vremenskim uvjetima
- niveliranje se provodi iz sredine s najvećom dužinom vizure od $35 \pm 0,4$ m za optičke nivelire i $22,5 \pm 0,5$ m za digitalne nivelire
- točnost mjerenja, definirana srednjom referentnom pogreškom, mora biti manja od $\pm 1,0 \text{ mm}/\sqrt{\text{km}}$ za slučajne pogreške, a $\pm 0,2 \text{ mm}/\sqrt{\text{km}}$ za sustavne pogreške mjerenja
- dopuštena nesuglasica pri dvostrukim mjerenjima nivelmanske strane je $\Delta = \pm 2 \text{ mm} \sqrt{L}$, gdje je L dužina nivelmanske strane izražena u km
- opseg nivelanskog poligona (figure) smije iznositi najviše 300 km.

2. Model ocjene točnosti zatvaranja nivelmanskih figura u NVT-u

Najjednostavniji model ocjene točnosti nivelmana određen je primjenom teorijske pretpostavke da su u mjerenjima prisutne samo i isključivo slučajne pogreške mjerenja. Temeljni elementi za određivanje kriterija točnosti nivelmana mogu se svrstati u tri razine (Rožić 1995):

- 1) nesuglasice dvostrukih mjerenja nivelmanskih strana ρ , duljine nivelmanskih strana R i broj nivelmanskih strana n_R
- 2) nesuglasice dvostrukih mjerenja nivelmanskih vlakova λ , duljine nivelmanskih vlakova L i broj nivelmanskih vlakova n_L
- 3) nesuglasice zatvaranja nivelmanskih poligona ω , duljine nivelmanskih poligona F i broj nivelmanskih poligona n_F .

Korištenjem pojedinih prethodno navedenih veličina, za nivelmansku se mrežu u cjelini određuje pripadna vrijednost srednje referentne pogreške.

U radu je analizirana razina točnosti koja se odnosi na zatvaranje nivelanskog poligona, jer su prethodne dvije razine provedene već u postupku definiranja jedne visinske razlike temeljem aritmetičke sredine.

Srednja kvadratna pogreška dvostrukog mjerenja određena na temelju zakona o prirastu pogrešaka može se napisati kao (Rožić 1995):

$$m_{\Delta h_i} = \pm m'_R \sqrt{R_i} \quad , \quad (1)$$

gdje je m'_R referentna srednja kvadratna pogreška dvostrukog niveliranja visinske razlike, koja se računa pomoću izraza:

$$m'_R = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{n_R} \left[\frac{\rho\rho}{R} \right]}, \quad (2)$$

gdje su: n_R ukupan broj nivelmanskih strana u vlaku, $\rho\rho$ kvadrat nesuglasice dvostrukih mjerenja i R duljina pojedinoga nivelmanskog vlaka u kilometrima.

Nesuglasica zatvaranja nivelmanskih poligona ω teorijski je prava pogreška, pa se može izraziti na temelju primjene zakona o prirastu pogrešaka:

$$\omega_i = m_{F_i} \sqrt{F_i}. \quad (3)$$

Kvadriranjem i preuređivanjem izraza (3), određene su pojedine vrijednosti kvadrata srednjih referentnih kvadratnih pogrešaka:

$$m_{F_i}^2 = \frac{\omega_i^2}{F_i}. \quad (4)$$

Vrijednost kvadrata referentne srednje kvadratne pogreške može se odrediti pomoću obične aritmetičke sredine:

$$m_F'^2 = \frac{\frac{\omega_1^2}{F_1} + \dots + \frac{\omega_{n_F}^2}{F_{n_F}}}{n_F} = \frac{1}{n_F} \left[\frac{\omega\omega}{F} \right], \quad (5)$$

ili pomoću težinske aritmetičke sredine:

$$m_F''^2 = \frac{\frac{\omega_1^2}{F_1} F_1 + \dots + \frac{\omega_{n_F}^2}{F_{n_F}} F_{n_F}}{F_1 + \dots + F_{n_F}} = \left[\frac{\omega\omega}{F} \right], \quad (6)$$

pri čemu se duljine poligona F smatraju težinama. Na temelju izraza (5) i (6) određene su referentne srednje kvadratne pogreške:

$$m'_F = \pm \sqrt{\frac{1}{n_F} \left[\frac{\omega\omega}{F} \right]}, \quad (7)$$

$$m''_F = \pm \sqrt{\left[\frac{\omega\omega}{F} \right]}, \quad (8)$$

odnosno referentne vjerojatne pogreške:

$$u'_F = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{1}{n_F} \left[\frac{\omega\omega}{F} \right]}, \quad (9)$$

$$u_F^n = \frac{3}{2} \sqrt{\left[\frac{\omega\omega}{F} \right]}. \quad (10)$$

Pri određivanju referentne pogreške m_F , uz pojedine međusobno neovisne nivelmanske poligone najčešće se u obzir uzima i obodni nivelmanski poligon, premda je ovisan pri definiranju zatvorene figure nivelmanskim vlakovima koji povezuju mareografske repere.

3. Predobrada nivelmanskih mjerenja

Pri određivanju “*a priori*” kriterija ocjene točnosti osnovna je pretpostavka da su u mjerenjima prisutne samo i isključivo slučajne pogreške. Zbog nedostatka mjerenih sirovih nivelmanskih podataka u radu nije iskazana ocjena točnosti dvostrukih mjerenja nivelmanskih strana i dvostruko mjerenih nivelmanskih poligona. Ocjena točnosti dana je nesuglasicama zatvaranja nivelmanskih poligona, referentnom srednjom kvadratnom pogreškom, odnosno referentnom vjerojatnom pogreškom za sve nivelmanske poligone na prostoru Republike Hrvatske, Republike



Slika 1. Oblik i veličina nivelmanskih poligona (Rezo 2010).

Slovenije, Bosne i Hercegovine, te dijelom u Srbiji i Crnoj Gori. Na slici 1 prikazani su oblik i veličina nivelmanskih poligona. U tablicama 1 do 15 nalaze se statistički podaci s ocjenom točnosti nivelmanskih poligona.

Za osnovni kriterij točnosti u nivelmanu visoke točnosti (NVT-u) uzima se referentna vjerojatna pogreška mjerenja u_F , računata na temelju nesuglasica zatvaranja nivelmanskih figura ω_i . Odnos referentne vjerojatne pogreške mjerenja i referentne srednje pogreške dan je izrazom (Rožić 1995):

$$u = \frac{2}{3} m. \quad (11)$$

U NVT-u referentna vjerojatna pogreška mjerenja smije iznositi najviše $\pm 1 \text{ mm}/\sqrt{\text{km}}$, pa prema tome slijedi da srednja kvadratna pogreška može iznositi $\pm 1,5 \text{ mm}/\sqrt{\text{km}}$.

Sukladno međunarodnim preporukama i kriterijima za određivanje točnosti (s obzirom na njihovu raščlambu na sustavne i slučajne pogreške), referentna vjerojatna slučajna pogreška mjerenja može iznositi $\pm 0,29 \text{ mm}\sqrt{\text{km}}$, referentna vjerojatna sustavna pogreška $\pm 0,86 \text{ mm}\sqrt{\text{km}}$, a referentna vjerojatna ukupna pogreška mjerenja visinskih razlika $\pm 0,91 \text{ mm}\sqrt{\text{km}}$.

Tablica 1. Statistika i ocjena točnosti nivelanskog poligona I.

Nivelmanski poligon I. (Figura I.)					
Broj nivelanskog vlaka	Broj repera	Dužina u km	Maks Δh (m)	Min Δh (m)	$\Sigma \Delta h$ (m)
NV001 = FR1029-BP82	21	13,51	13,087080	-44,140670	-167,186750
NV002 = FR1029-5486	113	75,54	64,497800	-54,766600	-170,150170
NV003 = 5486-PN305	284	191,51	38,286970	-46,035270	506,033080
NV005 = PN305-2753	149	116,46	41,817560	-42,711210	-256,226530
NV006 = 2753-FR3020	125	112,85	11,289040	-15,308830	-134,093400
NV007 = FR3020-MCCI	149	151,95	55,057020	-55,312640	364,919300
NV008 = C46-MCCI	37	23,61	51,177860	-35,165330	476,542800
NV009 = C46-MCXVI	77	56,53	41,297360	-38,620240	55,670100
NV010 = MCXVI-FR1029	216	152,03	46,102460	-46,570200	110,415930
NV078 = MCXVI-BV15663	5	1,38	-0,172370	-22,423420	-58,943040
Σ u smjeru kazaljke na satu = 476,56831 m			Σ suprotno od smjera kazaljke na satu = 476,54280 m		
ω_i (m)	m'_F (mm $\sqrt{\text{km}}$)	m''_F (mm $\sqrt{\text{km}}$)	u'_F (mm $\sqrt{\text{km}}$)	u''_F (mm $\sqrt{\text{km}}$)	
0,02551	0,269	0,852	0,404	1,279	

Tablica 2. Statistika i ocjena točnosti nivelmanskog poligona IV.

Nivelmanski poligon IV. (Figura IV.)					
Broj nivelmanskog vlaka	Broj repera	Dužina u km	Maks Δh (m)	Min Δh (m)	$\Sigma\Delta h$ (m)
NV007 = FR3020-MCCI	149	151,95	55,057020	-55,312640	364,919300
NV017 = CP695-FR302	99	94,18	54,066280	-55,633860	-57,699180
NV034 = FR1039-CP695	86	63,54	18,725460	-9,856340	18,427250
NV035 = MCCI-FR1039	183	149,37	48,964270	-59,735220	-325,641860
Σ u smjeru kazaljke na satu = 0 m			Σ suprotno od smjera kazaljke na satu = 0,00551 m		
ω_{IV} (m)	m'_F (mm $\sqrt{\text{km}}$)	m''_F (mm $\sqrt{\text{km}}$)	u'_F (mm $\sqrt{\text{km}}$)	u''_F (mm $\sqrt{\text{km}}$)	
-0,00551	0,128	0,257	0,193	0,386	

Tablica 3. Statistika i ocjena točnosti nivelmanskog poligona II.

Nivelmanski poligon II. (Figura II.)					
Broj nivelmanskog vlaka	Broj repera	Dužina u km	Maks Δh (m)	Min Δh (m)	$\Sigma\Delta h$ (m)
NV006 = 2753-FR3020	125	112,85	11,289040	-15,308830	-134,093400
NV011 = FR3052-2753	260	224,91	50,959620	-50,959540	91,008640
NV012 = FR3053-FR3052	50	36,42	18,413920	-14,787340	-9,759240
NV013 = FR3020-FR3053	99	79,02	32,807800	-41,469400	52,840790
Σ u smjeru kazaljke na satu = 0 m			Σ suprotno od smjera kazaljke na satu = -0,00321 m		
ω_{II} (m)	m'_F (mm $\sqrt{\text{km}}$)	m''_F (mm $\sqrt{\text{km}}$)	u'_F (mm $\sqrt{\text{km}}$)	u''_F (mm $\sqrt{\text{km}}$)	
0,00321	0,075	0,150	0,113	0,226	

Tablica 4. Statistika i ocjena točnosti nivelmanskog poligona III.

Nivelmanski poligon III. (Figura III.)					
Broj nivelmanskog vlaka	Broj repera	Dužina u km	Maks Δh (m)	Min Δh (m)	$\Sigma\Delta h$ (m)
NV013 = FR3020-FR3053	99	79,02	32,807800	-41,469400	52,840790
NV014 = FR3053-DCCLIII	146	115,50	10,131520	-11,401080	-48,666130
NV015 = C143-BV11530	45	42,45	34,556750	-19,792580	39,740370
NV016 = CP695-A437	62	51,01	24,376110	-43,776730	-53,012770
NV017 = CP695-FR3020	99	94,18	54,066280	-55,633860	-57,699180
NV074 = DCCLIII-C143	20	11,63	2,463580	-2,283420	-4,420160
NV075 = BV11530-A437	60	52,31	40,067080	-51,159060	-34,796350
Σ u smjeru kazaljke na satu = -53,00066 m			Σ suprotno od smjera kazaljke na satu = -53,01277 m		
ω_{III} (m)	m'_F (mm $\sqrt{\text{km}}$)	m''_F (mm $\sqrt{\text{km}}$)	u'_F (mm $\sqrt{\text{km}}$)	u''_F (mm $\sqrt{\text{km}}$)	
0,01211	0,217	0,5733	0,325	0,860	

Tablica 5. Statistika i ocjena točnosti nivelmanskog poligona V.

Nivelmanski poligon V. (Figura V.)					
Broj nivelmanskog vlaka	Broj repera	Dužina u km	Maks Δh (m)	Min Δh (m)	$\Sigma\Delta h$ (m)
NV008 = C46-MCCI	37	23,61	51,177860	-35,165330	476,542800
NV035 = MCCI-FR1039	183	149,37	48,964270	-59,735220	-325,641860
NV038 = FR1039-O472	64	55,08	45,740280	-25,250890	511,742470
NV049 = O472-C162	194	160,04	71,441880	-70,099700	-583,376140
NV050 = C162-C46	319	232,05	47,906760	-43,145800	-79,320510
Σ u smjeru kazaljke na satu = -0,05324 m			Σ suprotno od smjera kazaljke na satu = 0 m		
ω_V (m)	m'_F (mm $\sqrt{\text{km}}$)	m''_F (mm $\sqrt{\text{km}}$)	u'_F (mm $\sqrt{\text{km}}$)	u''_F (mm $\sqrt{\text{km}}$)	
-0,05324	0,956	2,138	1,434	3,207	

Tablica 6. Statistika i ocjena točnosti nivelmanskog poligona VI.

Nivelmanski poligon VI. (Figura VI.)					
Broj nivelmanskog vlaka	Broj repera	Dužina u km	Maks Δh (m)	Min Δh (m)	$\Sigma\Delta h$ (m)
NV037 = OP744-O472	121	108,47	64,891170	-68,313860	288,402330
NV042 = FR1069-OP744	42	36,6	18,206380	-37,642450	-173,030890
NV049 = O472-C162	194	160,04	71,441880	-70,099700	-583,376140
NV051 = BV14530-FR1069	220	191,75	66,758300	-54,370920	542,334640
NV052 = C162-BV14530	120	86,38	31,820480	-41,782240	-74,244050
Σ u smjeru kazaljke na satu = 0 m			Σ suprotno od smjera kazaljke na satu = 0,08589 m		
ω_{VI} (m)	m'_F (mm $\sqrt{\text{km}}$)	m''_F (mm $\sqrt{\text{km}}$)	u'_F (mm $\sqrt{\text{km}}$)	u''_F (mm $\sqrt{\text{km}}$)	
-0,08589	1,591	3,556	2,386	5,335	

Tablica 7. Statistika i ocjena točnosti nivelmanskog poligona VIII.

Nivelmanski poligon VIII. (Figura VIII.)					
Broj nivelmanskog vlaka	Broj repera	Dužina u km	Maks Δh (m)	Min Δh (m)	$\Sigma\Delta h$ (m)
NV015 = C143-BV11530	45	42,45	34,556750	-19,792580	39,740370
NV018 = K274-C143	80	58,58	7,459890	-5,436850	-0,675890
NV019 = CP317-FR3063	50	48,77	15,554550	-13,589750	-6,167920
NV020 = C650-FR3063	126	109,65	18,372760	-19,891000	-33,266250
NV021 = A437-C650	24	22,33	6,539520	-10,043010	-3,299080
NV075 = BV11530-A437	60	52,31	40,067080	-51,159060	-34,796350
NV076 = CP317-K274	65	50,73	3,344460	-3,722710	26,127470
Σ u smjeru kazaljke na satu = -6,16792 m			Σ suprotno od smjera kazaljke na satu = -6,16973 m		
ω_{VIII} (m)	m'_F (mm $\sqrt{\text{km}}$)	m''_F (mm $\sqrt{\text{km}}$)	u'_F (mm $\sqrt{\text{km}}$)	u''_F (mm $\sqrt{\text{km}}$)	
0,00181	0,035	0,092	0,052	0,138	

Tablica 8. Statistika i ocjena točnosti nivelmanskog poligona IX.

Nivelmanski poligon IX. (Figura IX.)					
Broj nivelmanskog vlaka	Broj repera	Dužina u km	Maks Δh (m)	Min Δh (m)	$\Sigma\Delta h$ (m)
NV019 = CP317-FR3063	50	48,77	15,554550	-13,589750	-6,167920
NV022 = O362-CP317	61	43,25	16,226830	-20,272180	-64,015010
NV023 = FR3114-O362	57	31,33	32,456220	-6,257960	68,854320
NV024 = C880-FR3114	177	109,88	7,086300	-7,812030	7,627210
NV025 = FR3104-C880	58	37,895	28,580830	-54,921870	-33,809800
NV026 = FR3102-FR3104	77	62,615	13,796600	-10,849000	29,693890
NV027 = FR3063-FR3102	122	98,465	8,565070	-20,901250	-2,180300
Σ u smjeru kazaljke na satu = 0 m			Σ suprotno od smjera kazaljke na satu = 0,00239 m		
ω_{IX} (m)	m'_F (mm $\sqrt{\text{km}}$)	m''_F (mm $\sqrt{\text{km}}$)	u'_F (mm $\sqrt{\text{km}}$)	u''_F (mm $\sqrt{\text{km}}$)	
-0,00239	0,043	0,115	0,065	0,172	

Tablica 9. Statistika i ocjena točnosti nivelmanskog poligona VII.

Nivelmanski poligon VII. (Figura VII.)					
Broj nivelmanskog vlaka	Broj repera	Dužina u km	Maks Δ (m)	Min Δ (m)	$\Sigma\Delta h$ (m)
NV016 = CP695-A437	62	51,01	24,376110	-43,776730	-53,012770
NV021 = A437-C650	24	22,33	6,539520	-10,043010	-3,299080
NV034 = FR1039-CP695	86	63,54	18,725460	-9,856340	18,427250
NV036 = CP650-OP744	153	141,90	18,156790	-7,932250	261,250230
NV037 = OP744-O472	121	108,47	64,891170	-68,313860	288,402330
NV038 = FR1039-O472	64	55,08	45,740280	-25,250890	511,742470
Σ u smjeru kazaljke na satu = 511,76796 m			Σ suprotno od smjera kazaljke na satu = 511,74247 m		
ω_{VII} (m)	m'_F (mm $\sqrt{\text{km}}$)	m''_F (mm $\sqrt{\text{km}}$)	u'_F (mm $\sqrt{\text{km}}$)	u''_F (mm $\sqrt{\text{km}}$)	
0,02549	0,495	1,212	0,742	1,818	

Tablica 10. Statistika i ocjena točnosti nivelmanskog poligona XI.

Nivelmanski poligon XI. (Figura XI.)					
Broj nivelmanskog vlaka	Broj repera	Dužina u km	Maks Δh (m)	Min Δh (m)	$\Sigma \Delta h$ (m)
NV020 = C650-FR3063	126	109,65	18,372760	-19,891000	-33,266250
NV036 = C650-OP744	153	141,90	18,156790	-7,932250	261,250230
NV039 = FR1065-FR3063	101	102,03	17,306630	-48,159150	-108,471720
NV040 = FR1065-A463	25	25,83	11,086780	-48,159140	-15,562710
NV041 = FR1069-FR1067	77	55,95	38,812580	-45,578630	-176,214280
NV042 = FR1069-OP744	42	36,46	18,206380	-37,642450	-173,030890
NV077 = A463-FR1067	104	85,37	42,460890	-37,999930	198,424700
Σ u smjeru kazaljke na satu = -23,43515 m			Σ suprotno od smjera kazaljke na satu = -23,43577 m		
ω_{XI} (m)	m'_F (mm $\sqrt{\text{km}}$)	m''_F (mm $\sqrt{\text{km}}$)	u'_F (mm $\sqrt{\text{km}}$)	u''_F (mm $\sqrt{\text{km}}$)	
0,00062	0,010	0,026	0,015	0,039	

Tablica 11. Statistika i ocjena točnosti nivelmanskog poligona XII.

Nivelmanski poligon XII. (Figura XII.)					
Broj nivelmanskog vlaka	Broj repera	Dužina u km	Maks Δh (m)	Min Δh (m)	$\Sigma \Delta h$ (m)
NV027 = FR3063-FR3102	122	98,465	8,565070	-20,901250	-2,180300
NV039 = FR1065-FR3063	101	102,03	17,306630	-48,159150	-108,471720
NV043 = FR3102-C689	89	43,29	8,338260	-9,460200	43,241710
NV044 = C689-C694	40	27,49	10,604950	-13,554140	19,781630
NV045 = C694-FR1065	161	121,15	52,061650	-50,385530	47,628530
Σ u smjeru kazaljke na satu = -0,00015 m			Σ suprotno od smjera kazaljke na satu = 0 m		
ω_{XII} (m)	m'_F (mm $\sqrt{\text{km}}$)	m''_F (mm $\sqrt{\text{km}}$)	u'_F (mm $\sqrt{\text{km}}$)	u''_F (mm $\sqrt{\text{km}}$)	
-0,00015	0,003	0,007	0,005	0,011	

Tablica 12. Statistika i ocjena točnosti nivelmanskog poligona XIII.

Nivelmanski poligon XIII. (Figura XIII.)					
Broj nivelmanskog vlaka	Broj repera	Dužina u km	Maks Δh (m)	Min Δh (m)	$\Sigma\Delta h$ (m)
NV040 = FR1065-A463	25	25,83	11,086780	-48,159140	-15,562710
NV045 = C694-FR1065	161	121,15	52,061650	-50,385530	47,628530
NV046 = FR1085-C694	125	103,09	44,694420	-60,486360	-716,286370
NV047 = A473-FR1085	90	65,80	69,643210	-63,971840	348,596850
NV048 = FR1067-A473	72	51,99	46,415040	-63,618870	137,233390
NV077 = A463-FR1067	104	85,37	42,460890	-37,999930	198,424700
Σ u smjeru kazaljke na satu = 0 m			Σ suprotno od smjera kazaljke na satu = 0,03439 m		
ω_{XIII} (m)	m'_F (mm $\sqrt{\text{km}}$)	m''_F (mm $\sqrt{\text{km}}$)	u'_F (mm $\sqrt{\text{km}}$)	u''_F (mm $\sqrt{\text{km}}$)	
-0,03439	0,659	1,615	0,989	2,423	

Tablica 13. Statistika i ocjena točnosti nivelmanskog poligona XIV.

Nivelmanski poligon XIV. (Figura XIV.)					
Broj nivelmanskog vlaka	Broj repera	Dužina u km	Maks Δh (m)	Min Δh (m)	$\Sigma\Delta h$ (m)
NV041 = FR1069-FR1067	77	55,95	38,812580	-45,578630	-176,214280
NV048 = FR1067-A473	72	51,99	46,415040	-63,618870	137,233390
NV051 = BV14530-FR1069	220	191,75	66,758300	-54,370920	542,334640
NV053 = C346-A473	242	174,45	55,742850	-63,002340	510,931750
NV054 = C346-MCCC	172	133,77	60,906990	-50,191970	-0,139190
NV057 = MCCC-BV14530	12	7,34	10,421440	-15,129710	7,758350
Σ u smjeru kazaljke na satu = 510,97291 m			Σ suprotno od smjera kazaljke na satu = 510,93175 m		
ω_{XIV} (m)	m'_F (mm $\sqrt{\text{km}}$)	m''_F (mm $\sqrt{\text{km}}$)	u'_F (mm $\sqrt{\text{km}}$)	u''_F (mm $\sqrt{\text{km}}$)	
0,04116	0,677	1,659	1,016	2,489	

Tablica 14. Statistika i ocjena točnosti nivelanskog poligona XV.

Nivelanski poligon XV. (Figura XV.)					
Broj nivelanskog vlaka	Broj repera	Dužina u km	Maks Δh (m)	Min Δh (m)	$\Sigma\Delta h$ (m)
NV047 = A473-FR1085	90	65,80	69,643210	-63,971840	348,596850
NV053 = C346-A473	242	174,45	55,742850	-63,002340	510,931750
NV058 = FR1085-A377	60	51,29	41,334670	-63,178920	-517,733790
NV059 = A377-C620	274	218,99	72,507980	-67,845990	-209,114660
NV060 = C620-FR1098	15	8,85	32,108740	-35,688980	-133,096240
NV062 = FR1098-C346	125	94,83	46,430150	-46,690890	0,410820
Σ u smjeru kazaljke na satu = -0,00527 m			Σ suprotno od smjera kazaljke na satu = 0 m		
ω_{XV} (m)	m'_F (mm $\sqrt{\text{km}}$)	m''_F (mm $\sqrt{\text{km}}$)	u'_F (mm $\sqrt{\text{km}}$)	u''_F (mm $\sqrt{\text{km}}$)	
-0,00527	0,086	0,213	0,130	0,319	

Tablica 15. Statistika i ocjena točnosti nivelanskog poligona XVI.

Nivelanski poligon XVI. (Figura XVI.)					
Broj nivelanskog vlaka	Broj repera	Dužina u km	Maks Δh (m)	Min Δh (m)	$\Sigma\Delta h$ (m)
NV059 = A377-C620	274	218,99	72,507980	-67,845990	-209,114660
NV063 = FR1087-A377	50	42,35	21,221030	-26,802030	-72,552610
NV064 = FR1089-FR1087	145	117,38	80,956710	-73,596660	-166,705520
NV067 = FR1094-FR1089	204	175,84	69,919140	-53,775960	481,754650
NV069 = C620-FR1094	171	112,52	65,292440	-54,323250	-33,330500
Σ u smjeru kazaljke na satu = 0 m			Σ suprotno od smjera kazaljke na satu = 0,05136 m		
ω_{XVI} (m)	m'_F (mm $\sqrt{\text{km}}$)	m''_F (mm $\sqrt{\text{km}}$)	u'_F (mm $\sqrt{\text{km}}$)	u''_F (mm $\sqrt{\text{km}}$)	u'''_F (mm $\sqrt{\text{km}}$)
-0,05136	0,889	1,988	1,334	2,982	

U nivelanskim poligonima uočava se utjecaj slučajnih pogrešaka većih od dopuštenih. Neujednačenost topografije terena kojim se pružaju nivelanski vlakovi dovela je do većih slučajnih pogrešaka u nivelanskim poligonima V. i VI. (vidi tablice 5 i 6). Karakteristike su većine nivelanskih figura: neujednačenost u broju repera, dužini i broju nivelanskih vlakova koji zatvaraju nivelanski poligon.

3.1. Analiza računanja referentne vjerojatne pogreške s obzirom na broj nivelmanskih vlakova u nivelmanskom poligonu

Broj vlakova i dužina nivelmanskog poligona, uz kvadrat nesuglasice zatvaranja nivelmanske figure, određuju vrijednosti relativnih vjerojatnih pogrešaka kojima se ocjenjuje točnost nivelmana visoke točnosti.

Primijeni li se na izraz (9) činjenica da jednu nivelmansku figuru zatvaraju četiri nivelmanska vlaka ($n_F = 4$) ukupne dužine 200 – 500 km (s povećanjem dužine figure u svakom sljedećem koraku za 50 km), dobiju se referentne vjerojatne pogreške (tablica 16), dok se za osam nivelmanskih vlakova ($n_F = 8$) podaci referentnih vjerojatnih pogrešaka nalaze u tablici 17.

Tablica 16. Referentne vjerojatne pogreške za četiri nivelmanska vlaka u nivelmanskom poligonu dužine od 200 do 500 km.

$F = \omega_i$ (m)	200 km	250 km	300 km	350 km	400 km	450 km	500 km
	Referentna vjerojatna pogreška: u'_F (mm $\sqrt{\text{km}}$)						
0,005	0,265	0,237	0,216	0,200	0,187	0,177	0,167
0,010	0,530	0,474	0,433	0,401	0,375	0,353	0,335
0,020	1,060	0,949	0,866	0,802	0,750	0,707	0,670
0,030	1,591	1,423	1,299	1,203	1,125	1,061	1,001

Tablica 17. Referentne vjerojatne pogreške za osam nivelmanskih vlakova u nivelmanskom poligonu dužine od 200 do 500 km.

$F = \omega_i$ (m)	200 km	250 km	300 km	350 km	400 km	450 km	500 km
	Referentna vjerojatna pogreška: u'_F (mm $\sqrt{\text{km}}$)						
0,005	0,187	0,167	0,153	0,142	0,132	0,125	0,118
0,010	0,375	0,335	0,306	0,283	0,265	0,250	0,237
0,020	0,750	0,671	0,612	0,567	0,530	0,500	0,474
0,030	1,125	1,001	0,918	0,850	0,795	0,750	0,711

Iz prethodnog se može zaključiti da nivelmanski poligon s četiri nivelmanska vlaka i dužinom od 350 km te nesuglasicom zatvaranja figure od 3 cm ne zadovoljava kriterije nivelmana visoke točnosti. Ako je ista nivelmanska figura zatvorena s osam nivelmanskih vlakova, nivelmanski poligon se prihvaća na temelju kriterija točnosti NVT-a. Prema tome, istovjetnost računanja referentne vjerojatne pogreške zahtijeva, zbog egzaktnog pokazatelja točnosti mjerenja visinskih razlika u nivelmanu visoke točnosti, ujednačenost nivelmanskih poligona po dužini i obliku, te broju nivelmanskih vlakova.

3.2. Analiza računanja referentne vjerojatne pogreške s obzirom na broj nivelmanskih strana u nivelmanskom vlaku

Isto se razmatranje može primijeniti i na referentnu srednju kvadratnu pogrešku dvostrukog niveliranja u pojedinim nivelmanskim vlakovima danu izrazom (2).

Referentna srednja kvadratna pogreška u tablici 18 izračunata je za dužine nivelmanskih strana od 1 km, a u tablici 19 za dužine od 0,5 km.

Tablica 18. Referentne srednje kvadratne pogreške za nivelmansku stranu od 1 km.

$R =$	10 km	20 km	30 km	40 km	50 km	60 km	70 km
n_R	10	20	30	40	50	60	70
$\rho\rho_i$ (m)	Referentna srednja kvadratna pogreška: $m'_R(\text{mm}\sqrt{\text{km}})$						
0,0050	0,250	0,125	0,083	0,062	0,050	0,042	0,035
0,0100	0,500	0,250	0,167	0,125	0,100	0,083	0,071
0,0250	1,250	0,625	0,417	0,312	0,250	0,208	0,178

Tablica 19. Referentne srednje kvadratne pogreške za nivelmansku stranu od 0,5 km.

$R =$	10 km	20 km	30 km	40 km	50 km	60 km	70 km
n_R	20	40	60	80	100	120	140
$\rho\rho_i$ (m)	Referentna srednja kvadratna pogreška: $m'_R(\text{mm}\sqrt{\text{km}})$						
0,0050	0,177	0,088	0,058	0,044	0,035	0,029	0,025
0,0100	0,350	0,177	0,117	0,088	0,071	0,059	0,051
0,0250	0,884	0,442	0,294	0,221	0,177	0,147	0,126

Analizom dobivenih vrijednosti može se zaključiti da se s dvostrukim povećanjem broja nivelmanskih strana u nivelmanskim vlakovima istih dužina referentna srednja kvadratna pogreška smanjuje za 30%. Stoga broj nivelmanskih strana u nivelmanskim vlakovima mora biti ujednačen kako bi se ocjena točnosti dana referentnom srednjom kvadratnom pogreškom mogla jednako interpretirati za sve nivelmanske vlakove. Očekivana je dužina nivelmanskih vlakova u nivelmanskom poligonu oko 50 km, a tolerancija ± 10 km donosi promjenu u ocjeni točnosti za $\approx 20\%$. Prema tome, dužine nivelmanskih vlakova u nivelmanskim figurama moraju biti približno iste, odnosno očekivane razlike dužina ne bi trebale biti veće za 10% u odnosu na srednju vrijednost dužina nivelmanskih vlakova (Rezo 2010).

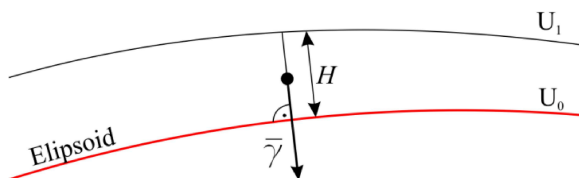
Na temelju prethodnih ispitivanja može se zaključiti da referentna srednja kvadratna pogreška mora biti manja od $\approx 0,4 \text{ mm}\sqrt{\text{km}}$.

4. Normalna ortometrijska popravka – NOP

4.1. Računanje konstante normalne ortometrijske popravke za nivo-elipsoid GRS80

Na osnovi poznatog svojstva nivo-ploha da je $W_0 = \text{konstanta}$ i $W_1 = \text{konstanta}$, tada je i razlika potencijala između dviju susjednih nivo-ploha konstantna veličina i može se uz pomoć slike 2 prikazati izrazom:

$$\Delta W = W_1 - W_0 = \text{konstanta} . \quad (12)$$



Slika 2. Potencijal bliskih nivo-ploha (Rezo 2010).

Analogno izrazu (12) u normalnom polju ubrzanja sile teže za dvije bliske nivo-plohe imamo (Bilajbegović 1984):

$$U_0 - U_1 = \bar{\gamma}H = \text{konstanta} , \quad (13)$$

gdje je U_0 normalni potencijal na plohi nivo-elipsida i za GRS80 elipsoid iznosi $6,2636861 \cdot 10^7 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$, U_1 normalni potencijal na nivo-plohi, a H visinska razlika između dviju jako bliskih nivo-ploha.

Diferenciranjem izraza (13) te izdvajanjem diferencijalno malog prirasta po visini dobit ćemo:

$$0 = d\bar{\gamma}H + \bar{\gamma}dH \Rightarrow dH = -\frac{d\bar{\gamma}}{\bar{\gamma}}H . \quad (14)$$

Kako je normalna ortometrijska popravka mala veličina, vrijednost $d\bar{\gamma}/\bar{\gamma}$ možemo aproksimirati s $d\gamma_0/\gamma_0$ (Bilajbegović 1984).

Budući da je referentnim nivo-elipsoidom za određivanje normalnog polja ubrzanja sile teže u Republici Hrvatskoj prihvaćen elipsoid GRS80 (*Geodetic Reference System 1980*) s pripadajućim fizikalnim parametrima: geocentričnom gravitacijskom konstantom $GM = 398600,5 \cdot 10^9 \text{ m}^3\text{s}^{-2}$ i kutnom brzinom Zemljine rotacije $\omega = 7,292115 \cdot 10^{-5} \text{ rads}^{-1}$, potrebno je izračunati normalno ubrzanje sile teže za isti elipsoid prema izrazu (Heiskanen i Moritz 1996, Torge i Muller 2012):

$$\gamma_0 = \gamma_e (1 + \beta \sin^2 \varphi + \beta_1 \sin^2 2\varphi) . \quad (15)$$

Normalna globalna spljoštenost ubrzanja sile teže β dobije se prema:

$$\beta = \frac{\gamma_p - \gamma_e}{\gamma_e} , \quad (16)$$

gdje je γ_p normalna vrijednost ubrzanja sile teže na polu i za referentni elipsoid GRS80 iznosi $9,8321863685 \text{ ms}^{-2}$, γ_e normalna vrijednost ubrzanja sile teže na ekvatoru iznosi $9,7803267715 \text{ ms}^{-2}$, dok je numerička vrijednost globalne spljoštenosti ubrzanja sile teže izračunata preko izraza (16) jednaka $0,005302440112$ (Hećimović 2002, Bašić 2009a).

Vrijednost trećeg člana u zagradi β_1 može se izračunati uz pomoć formule (Torge 1989):

$$\beta_1 = -\frac{1}{8}\mu^2 + \frac{5}{8}\mu m = 0,0000058615, \quad (17)$$

pri čemu je μ spljoštenost elipsoida, tj. razlika velike i male poluosi, izražena u jedinicama velike poluosi (Bašić 2009b, Torge i Muller 2012):

$$\mu = \frac{a-b}{a} = 0,0033528106812, \quad (18)$$

dok je m pomoćna veličina i jednaka je:

$$m = \frac{\omega^2 a}{\gamma_e} = 0,3467747732. \quad (19)$$

Uvrste li se izračunate vrijednosti u izraz (15), imat ćemo:

$$\gamma_0 = 9,7803267715(1 + 0,005302440112\sin^2\varphi + 0,0000058615\sin^2 2\varphi)[\text{ms}^{-2}]. \quad (20)$$

Uzme li se za područje računanja srednja vrijednost geodetske širine $\bar{\varphi} = 44^\circ 38' 58''$, te uvede supstitucija za dvostruki kut $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$, izraz (20) konačno će glasiti:

$$\gamma_0 = 9,7803267715(1 + 0,0053143066\sin^2\varphi)[\text{ms}^{-2}]. \quad (21)$$

Uvođenjem općih oznaka te diferenciranjem normalnog ubrzanja sile teže na nivo-plohi elipsoida slijedi:

$$d\gamma_0 = \gamma_e(0,0053143066 \cdot 2\sin\varphi\cos\varphi d\varphi) = \gamma_e(0,0053143066\sin 2\varphi d\varphi). \quad (22)$$

Uvrštavanjem izraza (22) i (21) u $d\gamma_0/\gamma_0$ dobije se formula (23) za srednju vrijednost geodetske širine $\bar{\varphi}$:

$$\frac{d\gamma_0}{\gamma_0} = \frac{\gamma_e(0,0053143066 \sin 2\varphi d\varphi)}{\gamma_e(1 + 0,0053143066 \sin^2 \varphi)} \approx (0,005300358 \sin 2\varphi d\varphi). \quad (23)$$

Na temelju izraza (23) slijedi:

$$dH = -\frac{d\bar{\gamma}}{\bar{\gamma}} H = -(0,005300358 \sin 2\varphi d\varphi) H, \quad (24)$$

gdje je $d\varphi = d\varphi''/\rho''$ pa se konačno izraz (24) za srednju vrijednost geodetske širine $\bar{\varphi}$ u području računanja može pisati:

$$H_{n-ort}^B = \sum_0^B \Delta h + NOP = \sum_0^B \Delta h - 0,000000025696731945532 \cdot \sin 2\varphi_s'' \Delta\varphi'' H_s, \quad (25)$$

pri čemu je $\varphi_s'' = (\varphi_A + \varphi_B) / 2$.

Pojednostavnjeni izraz za normalnu ortometrijsku popravku s konstantom 0,000000025696731945532 izračunatom za srednju vrijednost geodetske širine u području računanja za referentni elipsoid GRS80, glasi:

$$NOP = -0,000000025696731945532 H_s \Delta\varphi'' [\text{mm}], \quad (26)$$

gdje je H_s srednja visinska razlika nivelmanske strane između točaka A i B , a $\Delta\varphi''$ razlika geodetskih širina njezinih krajnjih točaka iskazana u sekundama.

4.2. Utjecaj određivanja visina i geodetskih širina krajnjih točaka nivelmanske strane na normalne ortometrijske popravke

U vremenu realizacije II. NVT-a određivanje koordinata točaka repera svakako je bio iznimno velik i zahtjevan posao. Koordinate točaka mogle su se odrediti razvijanjem i obradom poligonskih vlakova, odnosno presjecima naprijed i nešto praktičnijim presjekom nazad iz tri vidljiva i po koordinatama poznata signala. Međutim, uz prethodno kartiranje, koordinate repera očitane su s topografskih karata mjerila 1:25 000 i 1:50 000. Takav način pridruživanja koordinata reperima podložan je pogrešci kartiranja i očitavanja koordinatnih razlika. Upravo zbog toga provedena je analiza utjecaja pogreške u geodetskoj širini na definitivne vrijednosti normalnih ortometrijskih popravki, i to na srednjim visinama od 100, 200, 500, 750 i 1000 metara (tablica 20).

Tablica 20. Utjecaj pogreške geodetske širine na normalnu ortometrijsku popravku [m].

H_s (m)	100	200	500	750	1000
$\Delta\varphi = 1''$	-0,000003	-0,000005	-0,000013	-0,000019	-0,000026
$\Delta\varphi = 2''$	-0,000005	-0,000010	-0,000026	-0,000039	-0,000051
$\Delta\varphi = 3''$	-0,000008	-0,000015	-0,000039	-0,000058	-0,000077

Ako se za maksimalnu pogrešku geodetskih širina dvaju repera uzme $\Delta\varphi = 2''$, onda se može zaključiti da se položaj repera za srednje visine iznad 200 metara mora određivati s većom točnošću nego što je nude topografske karte, jer je razlika od 0,005 mm značajna veličina u sumi normalnih ortometrijskih popravki. Stoga u nekom novom nivelmanu visoke točnosti koordinate repera treba određivati satelitskim metodama koje nude točnost bolju od ± 5 m, što danas nije problem jer je hrvatskim pozicijskim sustavom (CROPOS) omogućeno određivanje 2D koordinata s točnošću od $\pm 0,02$ m.

Za razliku od položaja, odnosno pogreške određivanja geodetske širine, točnost određivanja srednjih visina krajnjih točaka za nivelmansku stranu dužine 1,2 km ($\Delta\varphi = 40''$) s pogreškom (ΔH_s) od $\pm 0,5$ do ± 10 cm, nema nikakvog utjecaja na izračunate normalne ortometrijske popravke. Drugim riječima, izračunate najvjerojatnije visine repera iz geometrijskih visinskih razlika zadovoljavaju točnost za računanje normalnih ortometrijskih popravki (vidi tablicu 21).

Tablica 21. Utjecaj određivanja visina krajnjih točaka na normalnu ortometrijsku popravku [mm].

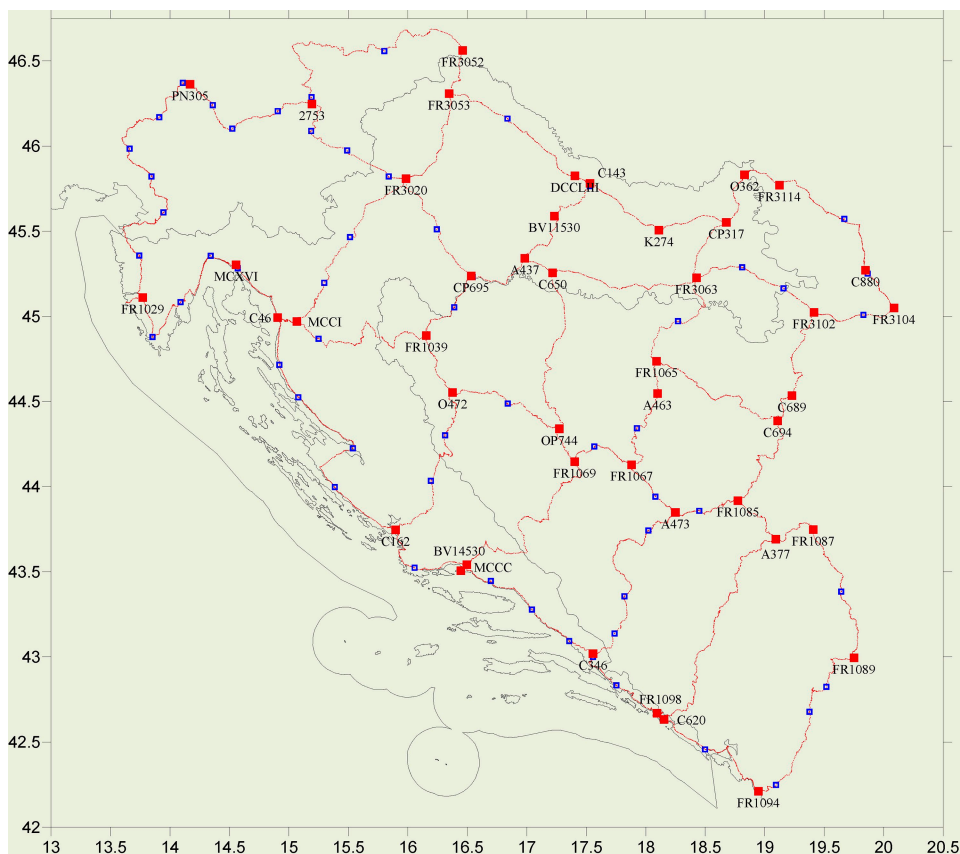
H_s (m)	100	200	500	750	1000
$\Delta H_s = 0,5$ cm	-0,000103	-0,000205	-0,000514	-0,000771	-0,001027
$\Delta H_s = 1,0$ cm	-0,000103	-0,000205	-0,000514	-0,000771	-0,001027
$\Delta H_s = 1,5$ cm	-0,000103	-0,000205	-0,000514	-0,000771	-0,001027
$\Delta H_s = 5,0$ cm	-0,000103	-0,000206	-0,000514	-0,000771	-0,001028
$\Delta H_s = 10,0$ cm	-0,000103	-0,000206	-0,000514	-0,000771	-0,001028

5. Jedinstveno izjednačenje II. NVT-a

Uspostavom drugog nivelmana visoke točnosti (II. NVT) nivelmanskim vlakovima povezani su mareografi te normalni reper koji se nalazio u Maglaju, geometrijskom težištu svih nivelmanskih poligona. U tako zamišljenom visinskom sustavu normalni bi reper bio ishodište visinskog sustava. Od koncepta normalnog repera odustalo se zbog karakterističnog oblika granične linije gdje se takav reper nije mogao definirati, pa je prihvaćen koncept pet tzv. temeljnih repera visinskog sustava pravilno raspoređenih unutar teritorija Republike Hrvatske. Temeljni su reperi ujedno činili okosnicu visinskog sustava u kopnenom dijelu. Odabir tih lokacija bio je uvjetovan stabilizacijom repera i geološkom strukturom tla. Odabrani temeljni reperi su fundamentalni reperi (FR) stabilizirani u Brajkovićima, Otočcu, Kostajnici, Virovitici i Strizivojni (Feil i Rožić 2000).

U ovom je radu napušten tradicijski koncept uspostave normalnih ili tzv. temeljnih repera radi zajedničkog izjednačenja cjelokupne mreže nivelmana visoke točnosti (slika 3). Zajedničko izjednačenje mreže II. NVT-a obavljeno je sukladno pravilima izjednačenja posrednih mjerenja uz primjenu metode najmanjih kvadrata pod pretpostavkom da su mjerenja opterećena samo slučajnim pogreškama.

Izjednačenjem su određene najvjerojatnije vrijednosti nepoznanica (visine repera) i mjerenja (visinske razlike), odnosno njihove najbolje procjene, a pomoću popravaka mjerenja određuju se kriteriji točnosti: referentno standardno odstupanje, standardna odstupanja mjerenja, standardna odstupanja nepoznanica i standardna odstupanja izjednačenih mjerenja (Rožić 2007).



Slika 3. Nivelmanski vlakovi u mreži II. NVT-a (Rezo 2010).

5.1. Izjednačenje u sustavu normalnih ortometrijskih visina – “a priori”

Nivelman visoke točnosti spada u red najtočnijih geodetskih mjerenja, te pri obradi rezultata tih mjerenja treba uzeti u obzir i mnoge pojedinosti teorije oblika i fizikalnih svojstava Zemlje, koje su često puta irelevantne za ostale geodetske radove. Prihvaćeni sustavi visina trebali su zadovoljiti niz uvjeta, a među inima da visine točaka (repera) trebaju biti jednoznačno određene i neovisne o putu niveliranja (Bašić 2009a). Sustav normalnih ortometrijskih visina ne zadovoljava taj temeljni uvjet te je, zbog nedostatka podataka za gustoću površinskih slojeva, izračunat bez uvođenja hipoteza o unutrašnjoj građi Zemlje.

Izračunata srednja vrijednost visinske razlike nivelmanske strane (iz četiri visinske razlike) prethodno je korigirana za popravke letvi i nazvana „mjerenom visinskom razlikom“, kojoj je dodana ortometrijska popravka.

Normalne ortometrijske popravke vrlo su malog iznosa, što se može vidjeti u tablici 22, tako da se pri obradi nivelmanskih mjerenja nižih redova mogu zanemariti.

Tablica 22. Normalne ortometrijske popravke za NV001 (Brajkovići – Rovinj).

Reper_A	Reper_B	H_s	(")	$\Delta h_{\text{mjereno}}$	NOP (m)	Δh_{ort} (m)
FR1029	01_A169	171,3426	1	-1,365400	-,000004	-1,365404
01_A169	01_14/1007	173,6397	-13	5,959630	,000058	5,959688
01_14/1007	01_MP203	164,8673	-1	-23,504440	,000004	-23,504436
01_MP203	01_MP792	144,9773	3	-16,275270	-,000011	-16,275281
01_MP792	01_19466/1007	140,5154	-5	7,351730	,000018	7,351748
01_19466/1007	01_A46	150,7348	8	13,087080	-,000031	13,087049
01_A46	01_MP518	135,2081	-3	-44,140670	,000010	-44,140660
01_MP518	01_MP704	97,4172	-13	-31,440890	,000033	-31,440857
01_MP704	01_MP850	70,6120	-10	-22,169360	,000018	-22,169342
01_MP850	01_AP758	47,9653	-25	-23,123710	,000031	-23,123679
01_AP758	01_MP466	32,0223	-7	-8,762170	,000006	-8,762164
01_MP466	01_19465/1007	32,4684	-23	9,654490	,000019	9,654509
01_19465/1007	01_MP892	27,8096	-9	-18,971990	,000006	-18,971984
01_MP892	01_19464/1007	20,4181	-13	4,188930	,000007	4,188937
01_19464/1007	01_DP279	22,0686	1	-,887920	-,000001	-,887921
01_DP279	01_BP776	15,6195	3	-12,010310	-,000001	-12,010311
01_BP776	01_A104	6,1967	5	-6,835300	-,000001	-6,835301
01_A104	01_AP807	2,8502	-1	,142370	,000000	,142370
01_AP807	01_BP136	6,9515	5	8,060310	-,000001	8,060309
01_BP136	BP82	7,9097	3	-6,143860	-,000001	-6,143861
Suma:				-167,18675	0,000159	-167,186591
Minimalna vrijednost:				-44,140670	-0,000031	-44,140660
Maksimalna vrijednost:				13,087080	0,000058	13,087049
Standardno odstupanje:					0,000018	

Normalne ortometrijske popravke – NOP izračunate su prema izrazu (26), sa statističkim pokazateljima za minimalnu vrijednost od $-0,001366$ m, maksimalnu od $0,000931$ m i standardnim odstupanjem od $0,000170$ m (Rezo 2010).

Normalne ortometrijske popravke ovisne su o položaju dvaju susjednih repera, točnije njihovim geodetskim širinama i visinama krajnjih točaka nivelmanske strane. Položaj repera u II. NVT-u očitao je s topografskih karata, a visine su dobivene prethodnim izjednačenjem s ulaznim vrijednostima mjerenih visinskih razlika.

Računanje normalnih ortometrijskih visina imalo je cilj ponajprije u ovom radu, provesti zajedničko izjednačenje svih nivelmanskih figura i dobivene najvjerojatnije vrijednosti visina (H_{ort-2}) usporediti s prethodnim službenim izjednačenjem (H_{ort-1}) (Feil i Rožić 2000), te na taj način potvrditi pouzdanost vlastitih i prethodnih računanja.

Zbog velikog broja ponavljanja istih imena repera u nivelmanskim vlakovima te radi lakšeg i bržeg pronalaska i detekcije pojedinih pogrešaka u nivelmanskoj mreži, svim nivelmanskim vlakovima dodana je oznaka broja nivelanskog vlaka ispred broja repera, npr. oznaka „01_A169” označava reper A169 iz nivelanskog vlaka broj 1. Oznake mareografa i čvornih repera zadržane su u svom izvornom obliku, te se na taj način brzo prepoznaje smjer pojedinih nivelmanskih vlakova u mreži II. NVT-a.

Radi korektnosti usporedbe, izjednačenje je provedeno tako da su za fiksne repere uzete visine 5 mareografa za epohu 1971.5 (tablica 23). Spomenute visine nisu popravljene za utjecaj Zemljinih plimnih valova.

Tablica 23. Podaci o mareografskim reperima za epohu 1971.5 (Feil i Rožić 2000).

Reper	Geodetska širina			Geodetska dužina			Visina repera	Ubrzanje sile teže	Geopot. kota	Naziv
	°	'	"	°	'	"	(m)	(ms ⁻²)	GPU	
5486	45	32	51	13	43	50	1,88260	9,8065702	1,846185	Kopar
BP82	45	05	03	13	38	01	4,83770	9,8064643	4,744076	Rovinj
BV15633	45	18	28	14	32	19	2,66010	9,8060137	2,608498	Bakar
PN167	43	30	23	16	26	41	3,33220	9,8047288	3,267033	Split
A496	42	39	31	18	03	58	3,67706	9,8038948	3,604953	Dubrovnik

S obzirom na broj od 6705 repera u II. NVT-u, u nastavku (tablica 24) dan je samo pregled podataka za čvorne repere s pripadnim standardnim odstupanjem nepoznanica kao ocjenom točnosti izračunatom u postupku izjednačenja. Referentno standardno odstupanje „*a posteriori*” iznosi 0,014 m, a broj prekobrojnih mjerenja jednak je 19.

Uočene razlike na reperima (C880, FR3102, FR3114) koje prelaze vrijednosti veće od 1 mm nalaze se u nivelmanskoj figuri IX. (slika 1, slika 3), a spomenuti reperi na području Vojvodine. Čvorni reper O362, stabiliziran u Batini, ima razliku od 1,36 mm, a reperi CP317 u Osijeku i K274 u Našicama imaju razlike visina 0,53 i 0,37 mm. Ostale razlike čvornih repera su unutar 0,3 mm. Razlike visina čvornih repera mogu se pripisati različitom pristupu izjednačenja. Prethodno izjednačenje provedeno je tako da su izračunate visinske razlike između čvornih repera, odnosno njima odgovarajuće dužine (za potrebe definiranja težina), te se s istim ušlo u izjednačenje mreže. Na taj su način dobivene visine samo čvornih repera. Ako to nazovemo „izjednačenjem čvornih repera“, onda su najvjerojatnije vrijednosti visina repera dobivene izjednačenjem pojedinačnih nivelmanskih figura (u tablici 24 visine označene s H_{ort-1}). Takav način izjednačenja dovodi do pojave dviju najvjerojatnijih vrijednosti visina za jedan reper u dvije susjedne figure.

Tablica 24. *Usporedba izjednačenih normalnih ortometrijskih visina.*

Reper	Hort-1	Standardno odstupanje	Hort-2	Standardno odstupanje	Razlika (Hort-1 – Hort-2)
	(m)	(mm)	(m)	(mm)	(m)
FF1029	172,02639	3,85	172,02626	3,70	0,000130
PN305	507,88483	16,68	507,88481	12,18	0,000020
MCXVI	61,60333	1,37	61,60335	1,32	-0,000020
2753	251,65738	12,52	251,65734	12,02	0,000040
C46	5,94167	7,47	5,94164	7,18	0,000030
MCCI	482,48861	8,53	482,48858	8,19	0,000030
FR3052	160,63626	13,43	160,63622	12,88	0,000040
FR3053	170,39973	12,31	170,39964	11,81	0,000090
FR3020	117,56628	10,71	117,56622	10,28	0,000060
CP695	175,27844	10,51	175,27836	10,08	0,000080
FR1039	156,85497	10,22	156,85494	9,81	0,000030
O472	668,61534	10,28	668,61535	9,88	-0,000010
C162	85,26357	8,97	85,26364	8,61	-0,000070
DCCLIII	121,74016	12,37	121,73995	11,86	0,000210
C143	117,32052	12,14	117,32032	11,63	0,000200
BV11530	157,06239	12,13	157,06226	11,63	0,000130
A437	122,26840	10,83	122,26837	10,38	0,000030
K274	118,00158	12,90	118,00121	12,35	0,000370
C650	118,97116	10,98	118,97117	10,52	-0,000010
OP744	380,23570	12,20	380,23564	9,80	0,000060
FR1069	553,27814	9,75	553,27825	9,37	-0,000110
BV14530	11,00989	3,16	11,00988	3,03	0,000010
MCCC	3,25156	0,49	3,25156	0,48	0,000000
FR3114	87,03735	14,61	87,03540	14,05	0,001950
O362	155,88991	13,96	155,88855	13,39	0,001360
CP317	91,87550	12,53	91,87497	11,98	0,000530
FR3063	85,71016	11,70	85,71044	11,16	-0,000280
FR1065	194,18849	11,93	194,18860	11,46	-0,000110
FR1067	377,06298	10,17	377,06308	9,77	-0,000100
C880	79,41029	15,05	79,41458	14,49	-0,004290
FR3102	83,53359	3,14	83,53593	12,30	-0,002340
C694	146,56985	12,18	146,56996	11,58	-0,000110
FR1085	862,89316	10,58	862,89325	10,14	-0,000090
A377	345,17334	10,90	345,17344	10,46	-0,000100
C346	3,40186	8,16	3,40189	7,84	-0,000030
FR1098	3,00534	2,72	3,00536	2,60	-0,000020
C620	136,10191	4,36	136,10192	4,19	-0,000010
FR1089	584,47926	14,12	584,47932	13,56	-0,000060
FR1094	102,76357	11,80	102,76359	11,34	-0,000020
Minimalno	3,005340	0,49	3,005360	0,48	-0,004290
Maksimalno	862,893160	16,68	862,893250	14,49	0,001950
St. odst.	199,009289	3,96	201,610789	3,52	0,000890
Sredina	141,33588	10,90	136,10192	10,46	0,00001

U ovom su radu učitane sve visinske razlike i provedeno je zajedničko izjednačenje s težinama definiranim preko dužine nivelmanskih strana d_i , između dva susjedna repera (u tablici 24 visine označene s H_{ort-2}), (Feil 1989, Feil 1990, Feil 1998):

$$p_i = \frac{1}{d_i}. \quad (27)$$

Uz težine definirane na temelju udaljenosti između dva repera u programskom paketu Columbus nudi se opcija definiranja težina na temelju broja stajališta n_{ST} , između dva susjedna repera u nivelmanskoj strani:

$$p_i = \frac{1}{n_{ST}}. \quad (28)$$

Treća se mogućnost odnosi na težine definirane preko varijance svakog mjerenja:

$$p_i = \frac{1}{\sigma_i^2}. \quad (29)$$

U radu je provedeno računanje najvjerojatnije vrijednosti nepoznanica, uvođenjem dužine i broja stajališta za težinu, koje daju istovjetne rezultate, dok se izjednačene vrijednosti nepoznanica nešto razlikuju kada se težine definiraju preko varijanci po pravilu dopuštenih odstupanja od 1 mm/km. Razlike najvjerojatnijih visina proizlaze iz činjenice da su “*a priori*” standardna odstupanja definirana matematičkim modelom, a ne na temelju stvarnih mjerenja.

Kod zajedničkog izjednačenja bitno je istaknuti bolju ocjenu točnosti danu standardnim odstupanjem nepoznanica (vidi tablicu 24).

6. Zaključak

Karakteristike većine nivelmanskih figura u NVT-u jesu neujednačenost u broju repera, dužini i broju nivelmanskih vlakova koji zatvaraju nivelmanski poligon. Broj vlakova i dužina nivelanskog poligona, uz kvadrat nesuglasice zatvaranja nivelmanske figure, određuju vrijednosti relativnih vjerojatnih pogrešaka kojima je ocijenjena točnost NVT-a. Zbog toga je u radu provedena analiza računanja referentne vjerojatne pogreške s obzirom na broj nivelmanskih vlakova u nivelmanskom poligonu (tablice 16 i 17). Također je analiziran utjecaj broja nivelmanskih strana na referentnu srednju kvadratnu pogrešku dvostrukog niveliranja za pojedine nivelmanske vlakove (tablice 18 i 19). Iz provedenih ispitivanja može se zaključiti da istovjetnost računanja referentne vjerojatne pogreške zahtijeva, zbog egzaktnog pokazatelja točnosti mjerenja visinskih razlika u nivelmanu visoke točnosti, ujednačenost nivelmanskih poligona po dužini i obliku te broju nivelmanskih vlakova.

Uvažavajući međunarodne preporuke i kriterije za određivanje točnosti i činjenicu o neprihvatljivosti pojedinih nivelmanskih poligona u red geometrijskog nivelmana visoke točnosti, u ovom je radu prvi put provedeno zajedničko izjednačenje svih nivelmanskih vlakova (slika 3). Izjednačenje je provedeno za Republiku Hrvatsku u službenom sustavu normalnih ortometrijskih visina u epohi 1971.5. Visinske

razlike su popravljene za normalnu ortometrijsku popravku (NOP) prije izjednačenja, a za fiksne repere uzeti su mareografski reperi u Dubrovniku, Splitu, Bakru, Rovinju i Kopru (tablica 23).

U tablici 24 dan je pregled podataka za čvorne repere s pripadnim standardnim odstupanjem nepoznanica kao ocjenom točnosti izračunatom u postupku izjednačenja. Referentno standardno odstupanje "*a posteriori*" iznosi 0,014 m, a broj prekobrojnih mjerenja jednak je 19. Izjednačenjem se potvrdila ispravnost autorovih računanja, kao i potvrda kvalitete prethodnih parcijalnih izjednačenja nivelmanskih figura.

Literatura

- Bašić, T. (2009a): Fizikalna geodezija, interna skripta, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb.
- Bašić, T. (2009b): Državna izmjera, interna skripta, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb.
- Bilajbegović, A. (1984): Praktično računanje normalnih i normalnih ortometrijskih visina, Geodetski list, 38 (61), 7–9, 165–168.
- Feil, L. (1989): Teorija pogrešaka i račun izjednačenja I. dio, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb.
- Feil, L. (1990): Teorija pogrešaka i račun izjednačenja II. dio, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb.
- Feil, L. (1998): Posebni algoritmi računa izjednačenja, interna skripta, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb.
- Feil, L., Rožić, N. (2000): Prijedlog službenog visinskog datuma Republike Hrvatske, Elaborat za Državnu geodetsku upravu Republike Hrvatske, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb.
- Hećimović, Ž. (2002): Računanje parametara nivo-elipsoida, Geodetski list, 56 (79), 2, 97–102.
- Heiskanen, W. A., Moritz, H. (1996): Physical Geodesy, Reprint, Institute of Physical Geodesy, Technical University, Graz.
- Klak, S., Feil, L., Rožić, N. (1992): Studija o sređivanju geometrijskog nivelmana na području Republike Hrvatske, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb.
- Klak, S., Feil, L., Rožić, N. (1994): Izjednačenje nivelmanskih mreža svih redova u II. nivelmanskom poligonu II. NVT-a, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb.
- Rezo, M. (2010): Značenje i primjena fizikalnih parametara u modernom pristupu geodetskim radovima državne izmjere, doktorska disertacija, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb.
- Rožić, N. (1995): Ispitivanje slučajnih i sistematskih pogrešaka u geometrijskom nivelmanu, doktorska disertacija, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb.
- Rožić, N. (2007): Računska obrada geodetskih mjerenja, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb.
- Torge, W. (1989): Gravimetry, Walter de Gruyter, Berlin – New York.
- Torge, W., Müller, J. (2012): Geodesy, 4th Edition, Walter de Gruyter, Berlin – Boston.
- Zrinjski, M., Barković, Đ., Razumović, I. (2010): Automatizacija ispitivanja preciznosti nivelira i umjeravanja invarnih nivelmanskih letvi, Geodetski list, 64 (87), 4, 279–296.

Analysis of Accuracy Levelling Measurements and Integral Adjustment of Precise Levelling Network (II. NVT)

ABSTRACT. Complete analysis of levelling traverses and levelling meshes in II. NVT network (second high accurate levelling network) is given, together with calculated closures, reference mean error and reference probable error as base for determination of accuracy criteria. After-calculation analysis of reference probable error with respect to the number of traverses in closing mesh, as well as the number single standpoint observations in each traverse. Value of constant variables for normal orthometric correction are calculated and an impact of height and latitude determination at end-points of mesh edge is analysed regarding to each single value of orthometric corrections. For the first time, single adjustment of II. NVT network is done by method of indirect observations with a fixed reference benchmarks on five tide gauges and obtained results are compared with official, previously done, adjustment of levelling meshes in II. NVT network for the Croatian Republic.

Keywords: levelling edge, levelling traverse, levelling mesh, normal orthometric correction, integral adjustment.

Primljeno: 2015-02-11

Prihvaćeno: 2015-03-02