UDK 514.774.8:514.142:528.221
Pregledni znanstveni članak

Geometrijske interpretacije afinog preslikavanja

Miljenko LAPAINE – Zagreb[1]

SAŽETAK. Afino preslikavanje našlo je primjenu u različitim područjima geodezije. U ovome su radu opisane dvije moguće interpretacije afinog preslikavanja ravnine na ravninu. Pri prvoj od njih afino preslikavanje rastumačeno je kao kompozicija rotacije, nejednolike promjene mjerila i smicanja uz translaciju. Pokazano je da takva raščlamba afinog preslikavanja nije jedinstvena te je objašnjeno da pri interpretaciji afinog preslikavanja nema smisla govoriti o dvije translacije, dvije promjene mjerila ili dvije rotacije. Druga interpretacija afinog preslikavanja paralelno je projiciranje ravnine na ravninu u prostoru. Iz vektorskog prikaza preslikavanja dolazi se do uobičajenih izraza za afino preslikavanje s pomoću koordinata pridruženih točaka. Takav pristup omogućuje i jasnu geometrijsku interpretaciju parametara preslikavanja.

Ključne riječi: afino preslikavanje, afina transformacija, translacija, rotacija, nejednolika promjena mjerila, smicanje.

1. Uvod

O afinom preslikavanju ravnine na ravninu u kontekstu transformacije koordinata u geodeziji pisano je u više navrata (vidjeti npr. Berenov 1952, Brukner 1962, Borčić i Frančula 1969, Lapaine i Frančula 1990, 1993, 1994, Lapaine i Tutić 2014).

U ovome radu opisat ćemo dvije geometrijske interpretacije afinog preslikavanja ravnine na ravninu. Najprije ćemo pokazati da se afino preslikavanje ravnine na ravninu može interpretirati kao kompozicija translacije, rotacije, nejednolike promjene mjerila i smicanja. Druga interpretacija bit će paralelno projiciranje ravnine na ravninu smještenih u trodimenzionalnom prostoru.

2. Afino preslikavanje ravnine na ravninu

Afina geometrija je dio geometrije u kojem se proučavaju svojstva figura koja su invarijantna s obzirom na afina preslikavanja (npr. paralelnost pravca itd.). Takva

[1] prof. dr. sc. Miljenko Lapaine, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Kačićeva 26, HR-10000 Zagreb, Croatia, e-mail: mlapaine@geof.hr.

svojstva prvi je proučavao A. F. Möbius u prvoj polovici 19. st. Pojam afine geometrije pojavio se tek nakon Erlangenskog programa 1872. godine, prema kome svakoj grupi preslikavanja pripada odgovarajuća geometrija koja se bavi svojstvima figura koja su invarijantna u odnosu na preslikavanja u toj grupi.

Poznato je da se jednadžbe afinog preslikavanja ravnine na ravninu mogu napisati u obliku

$$x' = a_1 x + b_1 y + c_1, \quad y' = a_2 x + b_2 y + c_2 , \tag{1}$$

odnosno

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}, \tag{2}$$

gdje su x, y i x', y' koordinate točke i njezine slike. Točka s koordinatama x, y je u sustavu xOy, a njezina slika s koordinatama x', y' u koordinatnom sustavu $x'O'y'$. Brojevi označeni s $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ su parametri afinog preslikavanja.

Označimo s h apsolutnu vrijednost determinante matrice afinog preslikavanja $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$, tj. neka je

$$h = |a_1 b_2 - a_2 b_1| . \tag{3}$$

To znači da je

$$h = |a_1 b_2 - a_2 b_1| \neq 0 \tag{4}$$

prirodan uvjet regularnosti preslikavanja i na taj način postojanja inverznog preslikavanja.

Afino preslikavanje općenito ne čuva kutove. U to se možemo uvjeriti ako uočimo da se jedinični vektori $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ preslikavaju u vektore $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ koji, naravno, općenito nisu jedinični, a kut θ među njima određen je do na kvadrant formulom

$$\cos\theta = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}} . \tag{5}$$

Da bi kut θ bio pravi, trebalo bi biti

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0 , \tag{6}$$

što općenito nije slučaj. Kut γ između vektora $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ u ravnini projekcije određen je formulama

$$\cos\gamma = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}, \quad \sin\gamma = \pm\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}, \quad \tan\gamma = \pm\frac{a_2}{a_1}. \tag{7}$$

Analogno tomu, kut γ' između vektora $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ u ravnini projekcije određen je formulama

$$\cos\gamma' = \frac{b_1}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}, \quad \sin\gamma' = \pm\frac{b_2}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}, \quad \tan\gamma' = \pm\frac{b_2}{b_1}. \tag{8}$$

2.1. Osnovna svojstva afinog preslikavanja ravnine na ravninu

Osnovna svojstva afinog preslikavanja ravnine na ravninu su ova:

1. Ako tri točke ravnine π leže na jednom pravcu, njihove slike također leže na jednom pravcu u ravnini π'.
2. Slika pravca iz ravnine π je pravac u ravnini π'.
3. Ako se dva pravca u ravnini π sijeku, njihove slike u ravnini π' se također sijeku.
4. Ako su dva pravca u ravnini π paralelna, njihove slike u ravnini π' su također paralelni pravci.
5. Omjer usmjerenih dužina koje leže na istom pravcu ili na paralelnim pravcima jednak je omjeru njihovih slika.
6. Skup vektora ravnine π injektivno se preslikava na skup vektora ravnine π'. To je preslikavanje linearno.
7. Omjer površina pridruženih likova je konstanta afinog preslikavanja ravnine na ravninu.
8. Afino preslikavanje prevodi algebarsku krivulju u algebarsku. Pri tome ostaje sačuvan red krivulje.
9. Neka su $f:\pi\to\pi'$ i $g:\pi'\to\pi$ regularne afine transformacije. Tada je njihova kompozicija $f\circ g:\pi\to\pi$ afina transformacija ravnine π na samu sebe. Sve afine transformacije ravnine na sebe čine grupu.
10. Afino preslikavanje ne čuva kutove.
11. Izravno poopćenje afinog preslikavanja ravnine na ravninu je afino preslikavanje prostora na prostor. Za afino preslikavanje prostora vrijede svojstva analogna svojstvima od 1 do 9 (vidi Vinogradov 1977).

2.2. Primjena afine transformacije ravnine na ravninu u geodeziji

Kad se koordinate geodetskih točaka računaju u različitim koordinatnim sustavima, ukazuje se potreba za transformacijom koordinata iz jednog u drugi koordinatni sustav. Afina transformacija koordinata ravnine na ravninu upotrebljava se ili se upotrebljavala u raznim područjima geodezije (Lapaine i Frančula 1994):

- Pri uklapanju lokalnih mreža u državni koordinatni sustav.
- Pri uklapanju gradskih trigonometrijskih mreža u državni koordinatni sustav.
- Pri uklapanju osi objekata (prometnica, mostova, tunela, hidrotehničkih objekata i sl.) u državni koordinatni sustav.
- Za analizu stabilnosti geodetske osnove s koje se opaža radi ustanovljavanja prostornog ponašanja objekta (brana, tornjeva itd.). Transformacijom se svaka serija opažanja može svesti na nultu (početnu) seriju.
- Za uspostavljanje veze između koordinatnog sustava fotogrametrijskih instrumenata i sustava u kojem se izrađuju planovi ili karte.
- U fotogrametriji za korekciju deformacije filma ili ploče.
- U kartografiji za transformaciju starih koordinatnih sustava u sustave Gauss-Krügerove projekcije.
- U kartografiji za transformaciju digitaliziranih podataka.
- Pri transformaciji nivelmanskih mreža.
- Pri određivanju deformacija (usuha) geodetskih planova.

Već iz ovog sigurno nepotpunog popisa vidi se važnost afinog preslikavanja ravnine na ravninu za geodeziju.

3. Afino preslikavanje kao kompozicija translacije, rotacije, nejednolike promjene mjerila i smicanja

Ponekad se afino preslikavanje interpretira kao kompozicija dviju translacija, rotacije, dviju promjena mjerila i smicanja (vidi npr. Bill 1996, Cetl 2002, Roić i Cetl 2002). Cetl i dr. (2001) umjesto smicanja rabe neobičan termin *rotacijsko rastezanje*. Ponekad se spominju dvije rotacije (vidi npr. Jenny 2005–2014, Jenny i Hurni 2011). Takve interpretacije u načelu nisu ispravne jer je npr. translacija u smjeru jedne i u smjeru druge koordinatne osi jedna translacija (Javor 1982, str. 159). Kompozicija dviju rotacija oko ishodišta je jedna rotacija (Javor 1982, str. 145). Kompozicija dviju promjena mjerila (skaliranje) je jedna promjena mjerila. Općenito, promjena mjerila u pojedinoj točki je različita u različitim smjerovima, o čemu nas uči teorija kartografskih projekcija kad spominje elipsu deformacija ili Tissotovu indikatrisu (Frančula 2004).

U nastavku ćemo pokazati da se afino preslikavanje ravnine na ravninu može interpretirati kao kompozicija jedne translacije, jedne rotacije, jedne nejednolike promjene mjerila (skaliranja) i jednog smicanja. Translacija je definirana s dva parametra, rotacija s jednim, nejednolika promjena mjerila s dva i smicanje s jednim parametrom. Ukupno imamo šest neovisnih parametara pa se afina transformacija ponekad naziva i 6-parametarskom transformacijom.

Ako su x, y koordinate točke prije translacije, a x', y' koordinate te točke nakon translacije, tada je translacija (engl. *translation* ili *pan*) definirana ovako:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Pritom su c_1 i c_2 konstante. Dakle, translacija u ravnini definirana je s dva parametra c_1 i c_2.

Rotacija (engl. *rotation*) oko ishodišta za kut α definirana je ovako:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Nejednolika promjena mjerila (neuniformno ili anizotropno skaliranje, engl. *non-uniform scaling* ili *anisotropic scaling*) definirana je ovako:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \tag{11}$$

gdje su p i q općenito različiti brojevi različiti od nule. Smicanje (engl. *shear mapping*) u smjeru osi x definirano je ovako:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Smicanje ostavlja x-pravce (y = const.) invarijantnima, a za $m \neq 0$ preslikava y-pravce ($x = a$) u pravce $y' = \frac{x' - a}{m}$ s nagibom $\frac{1}{m}$. Važno svojstvo smicanja je čuvanje površine. Lako se vidi da je za to preslikavanje $h = 1$.

Ako komponiramo nejednoliku promjenu mjerila, smicanje i rotaciju uz translaciju na ovaj način

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \tag{13}$$

onda možemo napisati (1) ili (2), pri čemu je

$$a_1 = p\cos\alpha$$

$$a_2 = p\sin\alpha$$

$$b_1 = q(m\cos\alpha - \sin\alpha)$$

$$b_2 = q(m\sin\alpha + \cos\alpha)\,. \tag{14}$$

Obratno, ako su zadani parametri a_1, a_2, b_1, b_2, tada je

$$p = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

$$q = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$$

$$m = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

$$\tan\alpha = \frac{a_2}{a_1}. \tag{15}$$

Usporedimo li posljednju formulu iz (15) sa (7) možemo zaključiti da je kut rotacije α u predloženoj interpretaciji afinog preslikavanja (13) zapravo jednak (do na predznak) kutu γ iz (7). Dodajmo još da je za izvod izraza (15) bilo potrebno pretpostaviti da je afino preslikavanje regularno, tj. da je ispunjen uvjet (4).

Ako umjesto parametara m i q uvedemo r i β na sljedeći način:

$$m = \tan(\alpha - \beta)$$

$$q = r\cos(\alpha - \beta) \tag{16}$$

onda umjesto (14) možemo napisati:

$$a_1 = p\cos\alpha$$

$$a_2 = p\sin\alpha$$

$$b_1 = -r\sin\beta$$

$$b_2 = r\cos\beta, \tag{17}$$

a umjesto (13)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \tan(\alpha-\beta) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & r\cos(\alpha-\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}, \tag{18}$$

odnosno nakon množenja matrica

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p\cos\alpha & -r\sin\beta \\ p\sin\alpha & r\cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Iz (17) slijedi

$$p = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

$$r = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

$$\tan\alpha = \frac{a_2}{a_1}$$

$$\tan\beta = -\frac{b_1}{b_2}\,. \tag{20}$$

I ovdje možemo usporediti pretposljednju formulu iz (20) sa (7), a posljednju s (8) te zaključiti da je α zapravo jednak (do na predznak) kutu γ iz (7), dok je kut β jednak kutu γ' iz (8) s promijenjenom orijentacijom. Dakle, kutovi α i β nisu kutovi rotacije kako bi se nekome moglo učiniti na prvi pogled već su to kutovi koje zatvaraju projekcije koordinatnih osi s novim koordinatnim osima u ravnini projekcije (Werner 1987). Potrebno je razlikovati rotaciju kao preslikavanje ravnine na ravninu od kuta između dvaju pravaca.

Na kraju ovog poglavlja pokazat ćemo da prikaz afinog preslikavanja u obliku kompozicije nejednolike promjene mjerila, smicanja i rotacije uz translaciju nije jedinstven. Da bismo to pokazali napisat ćemo po analogiji s (13) ovako:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Nakon množenja matrica s desne strane u (21) možemo napisati (1) ili (2), pri čemu je

$$a_1 = s(\cos\beta - m\sin\beta)$$

$$a_2 = s(\sin\beta + m\cos\beta)$$

$$b_1 = -r\sin\beta$$

$$b_2 = r\cos\beta\,. \tag{22}$$

Obratno, ako su zadani parametri a_1, a_2, b_1, b_2, tada je

$$r = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

$$s = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

$$m = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

$$\tan\beta = -\frac{b_1}{b_2}\,. \tag{23}$$

Na taj smo način dokazali da prikaz afinog preslikavanja u obliku kompozicije nejednolike promjene mjerila, smicanja i rotacije uz translaciju nije jedinstven.

Ako k tome dodamo poznatu činjenicu da je svaku rotaciju moguće interpretirati kao kompoziciju dviju osnih simetrija (Javor 1982), onda je jasan zaključak da se svako afino preslikavanje ravnine na ravninu može interpretirati kao kompozicija jednostavnijih preslikavanja ravnine na ravninu na beskonačno mnogo načina. Pritom, naravno, treba pripaziti da takva interpretacija bude korektna s geometrijskog stajališta.

4. Geometrijska interpretacija koeficijenata a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2

Jedinični kvadrat s vrhovima $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,1)$, $D(0,1)$ preslikat će se afinim preslikavanjem (1) u paralelogram s vrhovima $A'(c_1,c_2)$, $B'(a_1+c_1,a_2+c_2)$, $C'(a_1+b_1+c_1,a_2+b_2+c_2)$, $D'(b_1+c_1,b_2+c_2)$. Stranice su tog paralelograma:

$$A'B'=C'D'=a=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$$

$$B'C'=A'D'=b=\sqrt{b_1^2+b_2^2}\ .$$

Vidimo da su suprotne stranice četverokuta $A'B'C'D'$ međusobno jednake i paralelne. To znači da je četverokut $A'B'C'D'$ paralelogram. Kut θ između stranica a i b određen je relacijom (22). Kut γ imeđu stranice a i osi x' određen je relacijom (7), a kut γ' između stranice b i osi x' relacijom (8).

5. Afino preslikavanje kao paralelno projiciranje ravnine na ravninu u prostoru

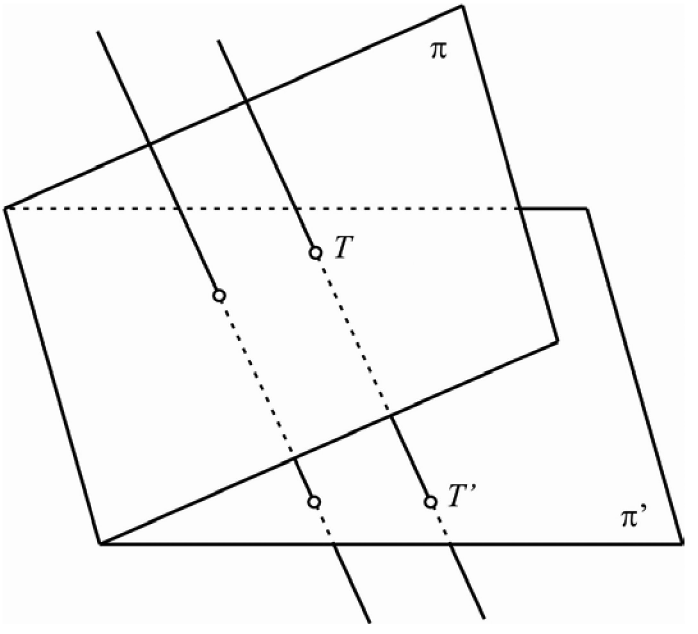
Postupak kojim se točkama nekog objekta pridružuju njihove slike u ravnini zove se projiciranje. Ako je objekt također ravnina, riječ je o projiciranju ravnine na ravninu. Najčešće su vrste projiciranja paralelno i centralno projiciranje.

Neka je T točka ravnine π, a T' njezina slika u ravnini projekcije π'. Ako su za svaki par točaka T, T' pripadni pravci TT' međusobno paralelni, riječ je o paralelnom projiciranju ravnine π na ravninu π' (slika 1).

Neka je naš objekt, ravnina π koju treba projicirati, koordinatna x, y ravnina Kartezijeva koordinatnog sustava $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Paralelno projiciranje jednoznačno je određeno smjerom projiciranja i položajem ravnine projekcije. Neka je smjer projiciranja određen smjerom vektora $\vec{v}=v_1\vec{i}+v_2\vec{j}+v_3\vec{k}$, a ravnina projekcije π' neka ima vektor normale $\vec{N}=A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da za skalarni produkt vektora $\vec{v}$ i $\vec{N}$ vrijedi $\vec{v}\vec{N}<0$, tj. da je kut između tih vektora tupi (slika 2).

Neka je točka T' projekcija točke $T(x,y,0)$, a točka O_1 projekcija ishodišta O u ravninu π'. Označimo $\overrightarrow{OT}=\vec{r}$ i $\overrightarrow{OT'}=\vec{r}_0$. Tada mora biti

$$\overrightarrow{TT'}=\vec{r}_0-\vec{r}=\rho\vec{v}\,, \tag{24}$$



Slika 1. *Paralelno projiciranje ravnine π na ravninu π'.*

gdje je ρ neki broj. Relacijom (24) opisana je paralelnost vektora $\overrightarrow{TT'}$ i $\vec{v}$. Iz (24) možemo dobiti

$$\rho = \frac{(\vec{r}_0 - \vec{r})\vec{N}}{\vec{v}\vec{N}}. \tag{25}$$

Analogno mora biti

$$\overrightarrow{OO_1} = \vec{o} = \omega\vec{v} \tag{26}$$

i odatle

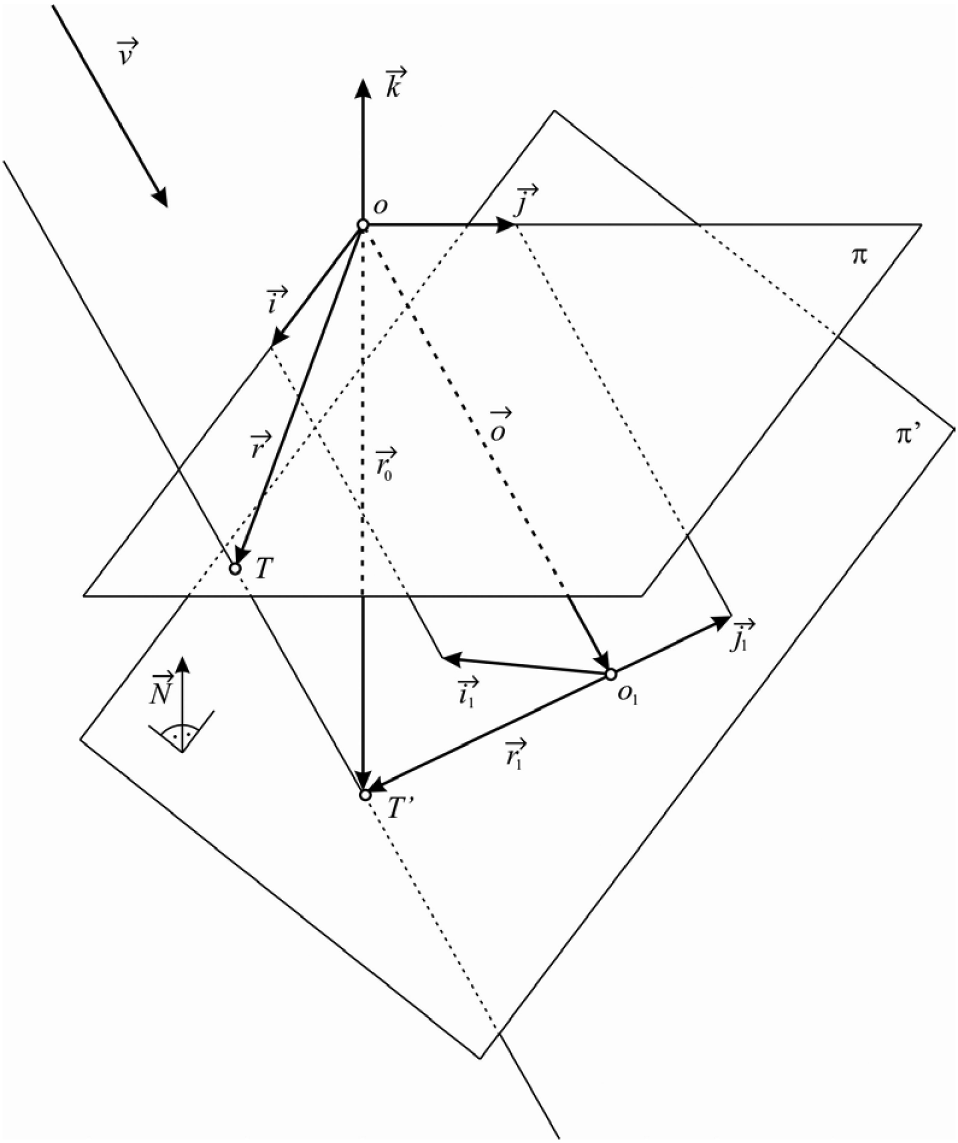
$$\omega = \frac{\vec{o}\vec{N}}{\vec{v}\vec{N}}. \tag{27}$$

Želimo li vektor $\vec{r}_1 = \overrightarrow{O_1T'}$ izraziti kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{i}_1, \vec{j}_1$ koji su nastali projiciranjem vektora $\vec{i}, \vec{j}$, možemo napisati

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_0 - \vec{o} = \vec{r} + \rho\vec{v} - \omega\vec{v}. \tag{28}$$

Zbog (25) i (27) imamo

$$\vec{r}_1 = \vec{r} - \frac{\vec{r}\vec{N}}{\vec{v}\vec{N}}\vec{v} \tag{29}$$



Slika 2. *Smjer projiciranja ravnine π na ravninu π' određen je smjerom vektora* $\vec{v}$.

jer je $\vec{r}_0\vec{N} - \vec{o}\vec{N} = (\vec{r}_0 - \vec{o})\vec{N} = \vec{r}_1\vec{N} = 0$. Relacijom (29) je vektor $\vec{r}_1$ prikazan u koordinatnom sustavu $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. U posebnom slučaju za $\vec{r} = \vec{i}$ iz (29) slijedi

$$\vec{i}_1 = \vec{i} - \frac{A}{\vec{v}\vec{N}}\vec{v}\,. \tag{30}$$

Analogno za $\vec{r} = \vec{j}$ dobijemo

$$\vec{j_1} = \vec{j} - \frac{B}{\vec{v}\vec{N}}\vec{v} . \tag{31}$$

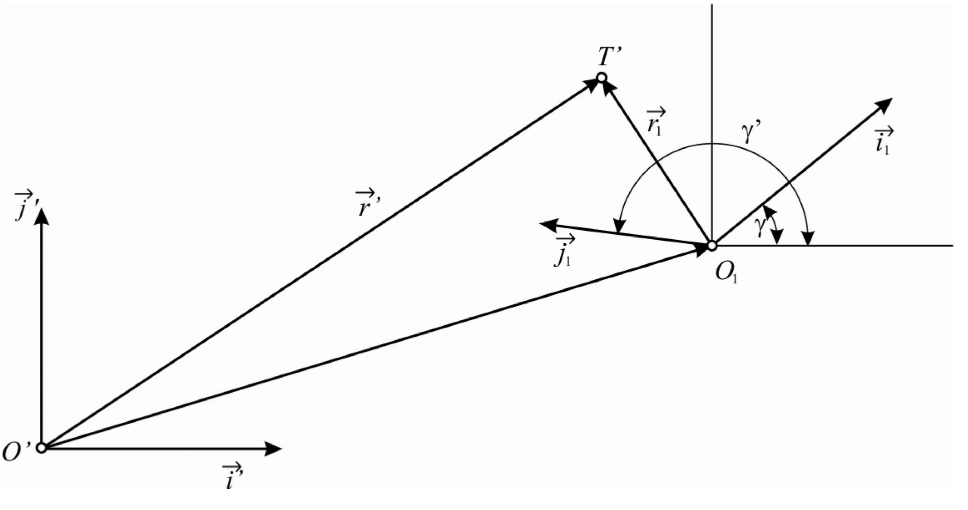
Pomnožimo li (30) s x, (31) s y i zbrojimo, dobit ćemo

$$x\vec{i_1} + y\vec{j_1} = \vec{r} - \frac{\vec{r}\vec{N}}{\vec{v}\vec{N}}\vec{v} . \tag{32}$$

Ako usporedimo (29) i (32), možemo zaključiti da je

$$\vec{r_1} = x\vec{i_1} + y\vec{j_1} . \tag{33}$$

Relacija (33) je prikaz vektora $\vec{r_1}$ u koordinatnom sustavu $(\vec{i_1}, \vec{j_1})$ u ravnini slike (projekcije). Par vektora $(\vec{i_1}, \vec{j_1})$ općenito ne mora biti ortonormiran. Drugim riječima, ta dva vektora ne moraju biti jedinični ni međusobno okomiti. Neka je u ravnini slike π' zadan desni Kartezijev koordinatni sustav $(\vec{i}', \vec{j}')$ s ishodištem u točki O' (slika 3).



Slika 3. *Koordinatni sustavi* $(\vec{i_1}, \vec{j_1})$ *i* $(\vec{i}', \vec{j}')$ *u ravnini projekcije* π'.

Svaki vektor u ravnini π' može se izraziti kao linearna kombinacija vektora $\vec{i}', \vec{j}'$. Označimo

$$\vec{i_1} = a_1\vec{i}' + a_2\vec{j}' , \quad \vec{j_1} = b_1\vec{i}' + b_2\vec{j}' ,$$

$$\overrightarrow{O'O_1} = c_1\vec{i}' + c_2\vec{j}' , \quad \vec{r}' = \overrightarrow{O'T'} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' . \tag{34}$$

Zatim možemo napisati

$$\vec{r}\,' = \vec{r}_1 + \overrightarrow{O'O_1}\,,$$

odnosno koristeći (33) i (34) dobit ćemo izraz (1). Izrazi (34), odnosno (1), kojima je dana veza između koordinata x, y bilo koje točke T u Kartezijevu koordinatnom sustavu $(\vec{i},\vec{j})$ u ravnini π i koordinata x', y' njezine slike T' u Kartezijevu koordinatnom sustavu $(\vec{i}\,',\vec{j}\,')$ u ravnini π' pri paralelnom projiciranju ravnine π na ravninu π', zovu se jednadžbe afinog preslikavanja ravnine π na ravninu π'. U geodeziji se uobičajeno umjesto projiciranje ili preslikavanje kaže transformacija. Dakle, afina transformacija ravnine na ravninu drugi je naziv za paralelno projiciranje ravnine na ravninu.

Parametri afinog preslikavanja $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ imaju prema (34) jasnu geometrijsku interpretaciju. Nadalje, na temelju (34) možemo još izvesti

$$\begin{aligned}
a_1 &= \vec{i}_1\vec{i}\,' = |\vec{i}_1||\vec{i}\,'|\cos\angle(\vec{i}_1,\vec{i}\,') = \sqrt{a_1^2+a_2^2}\cos\gamma \\
a_2 &= \vec{i}_1\vec{j}\,' = |\vec{i}_1||\vec{j}\,'|\cos\angle(\vec{i}_1,\vec{j}\,') = \sqrt{a_1^2+a_2^2}\sin\gamma \\
b_1 &= \vec{j}_1\vec{i}\,' = |\vec{j}_1||\vec{i}\,'|\cos\angle(\vec{j}_1,\vec{i}\,') = \sqrt{b_1^2+b_2^2}\cos\gamma' \\
b_2 &= \vec{j}_1\vec{j}\,' = |\vec{j}_1||\vec{j}\,'|\cos\angle(\vec{j}_1,\vec{j}\,') = \sqrt{b_1^2+b_2^2}\sin\gamma'\,.
\end{aligned} \tag{35}$$

Istražimo još geometrijsko značenje uvjeta (4). Uz oznake (34) vrijedi

$$\vec{i}_1 \times \vec{j}_1 = (a_1 b_2 - a_2 b_1)(\vec{i}\,' \times \vec{j}\,')\,. \tag{36}$$

Dakle, uvjet (36) ekvivalentan je uvjetu da vektor $\vec{i}_1 \times \vec{j}_1$ mora biti različit od nul-vektora. Kako je zbog (30) i (31)

$$\vec{i}_1 \times \vec{j}_1 = \frac{v_3}{\vec{v}\vec{N}}\vec{N}\,, \tag{37}$$

zaključujemo da mora biti

$$v_3 \neq 0\,, \tag{38}$$

što pak znači da vektor projiciranja $\vec{v}$ nije paralelan s ravninom π koja se projicira. To je očito sasvim prirodan uvjet.

6. Različiti načini zadavanja afinog preslikavanja ravnine na ravninu

U praksi se afino preslikavanje ravnine na ravninu može zadati na različite načine. Npr. ako raspolažemo s tri para afino pridruženih točaka, tada u skladu s (1) možemo napisati šest linearnih jednadžbi sa šest nepoznatih parametara

$a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$. Takav će sustav jednadžbi općenito imati jednoznačno rješenje. Međutim, može se pokazati da rješenje nećemo moći dobiti ako tri zadane točke leže na istom pravcu.

Ako su poznata četiri para pridruženih točaka, tada se opisani postupak za tri para pridruženih točaka ne može primijeniti jer imamo osam linearnih jednadžbi sa šest nepoznanica. Takav sustav je u općem slučaju neodređen i nema rješenja. Jedna od mogućnosti određivanja nepoznatih parametara u tom slučaju je primjena metode najmanjih kvadrata. Spomenimo da je Pravilnikom za državni premer II i III deo (1958) bio propisan poseban postupak, koji je detaljnije opisan u članku Berenov (1952). Određivanje parametara afine transformacije obavljalo se prije mnogo godina primjenom trigonometrijskog obrasca 32a, dok se transformacija pojedinih točaka računala u trigonometrijskom obrascu 24a. Upotreba spomenutih trigonometrijskih obrazaca ima danas samo još povijesni značaj. S obzirom na to da su se ti obrasci popunjavali ručno, bile su predviđene i odgovarajuće računske kontrole.

Ako je poznato četiri ili više parova afino pridruženih točaka, tada je uobičajeno odrediti šest nepoznatih parametara primjenom metode najmanjih kvadrata. Pritom se uz parametre mogu izračunati i procjene točnosti ne samo parametara, nego i procjena valjanosti preslikavanja uz moguću ocjenu točnosti transformiranih koordinata.

7. Zaključak

Premda o afinom preslikavanju postoji izvjestan broj objavljenih radova u geodetskoj literaturi i premda je takvo preslikavanje našlo širu primjenu u geodeziji, izgleda da o toj vrsti preslikavanja još uvijek nije sve do kraja razjašnjeno. Stoga su u ovome radu opisane dvije moguće interpretacije afinog preslikavanja ravnine na ravninu. Pri prvoj od njih afino preslikavanje rastumačeno je kao kompozicija rotacije, nejednolike promjene mjerila i smicanja uz translaciju. Pritom nema smisla govoriti o dvije translacije, dvije promjene mjerila ili dvije rotacije. Nadalje, pokazano je da takva raščlamba afinog preslikavanja nije jedinstvena.

U drugome dijelu rada afino preslikavanje objašnjeno je kao paralelno projiciranje ravnine na ravninu u prostoru. Iz vektorskog prikaza preslikavanja nije teško doći do uobičajenih izraza za afino preslikavanje s pomoću koordinata pridruženih točaka. Takav pristup omogućuje i jasnu geometrijsku interpretaciju parametara preslikavanja.

Literatura

Berenov, S. (1952): Afina transformacija, Geodetski list, 4–9, 113–131.

Bill, R. (1996): Grundlagen der Geo-Informationssysteme, Band 2, Wichmann Verlag, Heidelberg.

Borčić, B., Frančula, N. (1969): Stari koordinatni sustavi na području SR Hrvatske i njihova transformacija u sustave Gauss-Krügerove projekcije, Zavod za kartografiju Geodetskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb.

Brukner, A. (1962): Grafička afina transformacija, Geodetski list, 1–3, 3–37.

Cetl, V. (2002): Transformacije geometrijskih podataka u katastru, seminarski rad, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb.

Cetl, V., Roić, M., Matijević, H. (2001): Transformacija koordinata u katastru, Zbornik radova Drugog hrvatskog kongresa o katastru, urednici M. Roić, Z. Kapović, Hrvatsko geodetsko društvo, Zagreb, 29–37.

Frančula, N. (2004): Kartografske projekcije, skripta, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb.

Javor, P. (1982): Matematika 1 za I razred, Školska knjiga, Zagreb.

Jenny, B. (2005–2014): Map Analyst, The Map Historian's Tool for the Analysis of Old Maps, http://mapanalyst.org.

Jenny, B., Hurni, L. (2011): Studying cartographic heritage: Analysis and visualization of geometric distortions, Computers & Graphics, 35, 402–411.

Lapaine, M., Frančula, N. (1990): Prilog ocjeni točnosti pri afinoj transformaciji, Zbornik radova Savetovanja “Katastar nepokretnosti”, Ilidža-Sarajevo, 26–27. 10. 1990., Savez geodetskih inženjera i geometara Jugoslavije, 63–76.

Lapaine, M., Frančula, N. (1993): Vpliv pogreška ene točke na natančnost afine transformacije, Referat: Kartografija, 26. geodetski dan Zveze geodetov Slovenije, Bled, 14–16. 10. 1993., objavljeno u: Geodetski vestnik, 1993, 3, 193–197.

Lapaine, M., Frančula, N. (1994): Osvrt na afinu transformaciju, Geodetski list, 2, 159–168.

Lapaine, M., Tutić, D. (2014): Helmertova i afina transformacija, Zbornik radova 7. simpozija ovlaštenih inženjera geodezije, urednica I. Racetin, Hrvatska komora ovlaštenih inženjera geodezije, Zagreb, 85–90.

Roić, M., Cetl, V. (2002): Transformacije geometrijskih podataka u katastru, Geodetski list, 3, 155–169.

Vinogradov, I. M. (gl. ur., 1977): Matematičeskaja enciklopedija, tom 1, Sovjetskaja enciklopedija, Moskva.

Werner, H. (1987): Die 5-Parameter-Transformation – Zusammenhang mit anderen Verfahren und die Elimination grober Fehler, Allgemeine Vermessungs Nachrichten, 7, 261–273.

*** (1958): Pravilnik za državni premer II i III deo, Savezna geodetska uprava, Beograd.

Geometrical Interpretations of Affine Mapping

ABSTRACT. Affine mapping is applied in different fields of geodesy and surveying. The paper describes two possible interpretations of affine mapping of a plane onto another plane. The first interpretation explains affine mapping as a composition of a rotation, non-uniform scaling and shear mapping including a translation. It is shown that such an approach is not unique and that considering it two translations, two modifications of scale or two rotations does not make any sense. The second interpretation of affine mapping is parallel projection of a plane into a plane in space. Common expressions for affine mapping by using coordinates of related points are derived from the vector approach to mapping. Such an approach enables clear geometric interpretation of mapping parameters.

Keywords: affine mapping, affine transformation, translation, rotation, non-uniform scaling, shear mapping.

Primljeno: 2015-01-18

Prihvaćeno: 2015-02-28