Hrvatski matematički elektronski časopis *math.e*

Broj 11

http://e.math.hr/

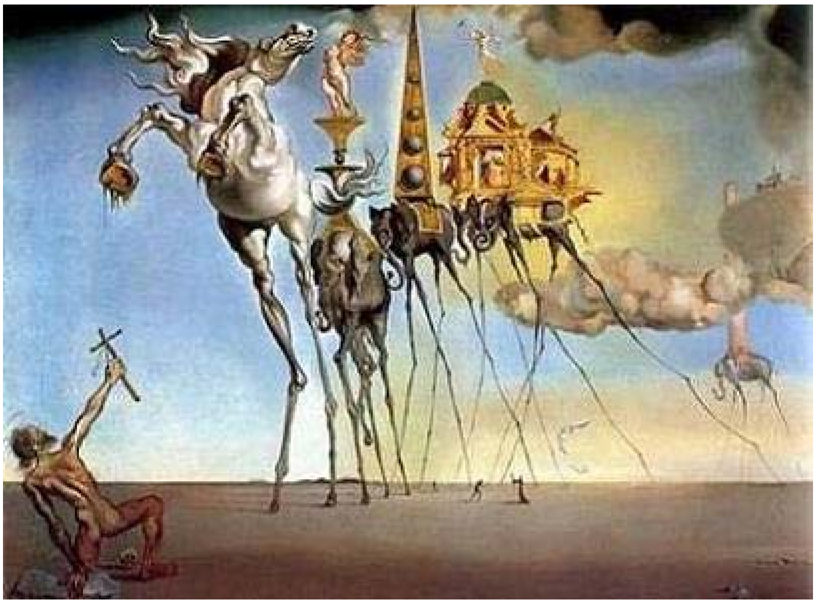
Nadrealni brojevi

Bojana Kodrič

Sadržaj:

1. Uvod

Za sve postoji vrijeme i mjesto, pa tako i za izraze poput $\sqrt{\omega - \pi}$. A budući da to vrijeme i mjesto nije kolegij *Teorija skupova* u zimskom semestru, vrijeme je da sami stvorimo prikladno mjesto. Nadrealni brojevi? Neobična kombinacija riječi, gotovo oksimoron, barem u svakodnevnom shvaćanju. Definiciju dugujemo *Johnu Hortonu Conwayu*, dok je sam naziv osmislio *Donald Knuth*. Ovi "novi" brojevi sadrže realne brojeve, no i mnogo, mnogo više - beskonačne ordinale, infinitezimalne vrijednosti i doslovno sve ono između. Dakle, naziv im sasvim dobro pristaje. Uostalom, nikad nije na odmet malo nadrealizma u matematici...



Salvador Dalí, *Iskušenje sv. Antuna*.

Conway je na zamisao o nadrealnim brojevima došao prije nekoliko desetljeća, na Cambridge Universityju, dok je pokušavao naučiti igrati *Go*, izazovnu igru na ploči, popularnu u Kini i Japanu.

Pažljivo promatranje uvjerilo ga je da se igra može tumačiti kao zbroj više manjih, jednostavnijih igara. Conway je primijenio istu logiku i na neke druge strateške igre, i došao do zaključka da se igre određenog tipa ponašaju kao brojevi s karakterističnim osobinama. Mi se ovdje nećemo dotaknuti igara, no o njima možete čitati u članku Matka Botinčana *Kombinatorne igre* [MB] koji je objavljen u 6. broju *math.e*.

2. Konstrukcija brojeva

Brojeve je moguće zadati aksiomatski, kao što je to uobičajena praksa s realnim brojevima na uvodnim kolegijima u matematičku analizu. No, tada se postavlja pitanje postoji li uopće skup brojeva koji zadovoljava navedene aksiome? To pitanje, naravno, nije specifično za brojeve nego za bilo koju strukturu koju zadajemo aksiomatski. Kad su u pitanju realni brojevi, dva su najčešće spominjana načina na koji ih se može konstruirati od racionalnih brojeva: Dedekindovi rezovi i Cantorova konstrukcija s pomoću Cauchyjevih nizova.

Konstrukcija nadrealnih brojeva ima sličnosti s konstrukcijom realnih brojeva s pomoću Dedekindovih rezova. Razlika je u tome što ne pretpostavljamo da su racionalni brojevi već konstruirani nego sve brojeve konstruiramo na isti način. Osnovna ideja konstrukcije je jednostavna, ali djeluje pomalo zbunjujuće pri prvom susretu. Evo kako je tu ideju opisao Donald Knuth u svojoj matematičkoj noveli [DK].

> *U početku bijaše praznina, i J. H. W. H. Conway poče stvarati brojeve. Conway reče: "Neka budu dva pravila koja će iznjedriti sve brojeve, velike i male. Ovo neka bude prvo pravilo: Svaki broj odgovara dvama skupovima prethodno stvorenih brojeva, takvima da nijedan element lijevog skupa nije veći ili jednak nijednom elementu desnog skupa. A drugo pravilo neka bude: Broj je manji ili jednak drugom broju ako i samo ako nijedan element lijevog skupa prvog broja nije veći ili jednak drugom broju, i nijedan element desnog skupa drugog broja nije manji ili jednak prvom broju." I vidje Conway da su pravila dobra.*

Dakle, da utvrdimo:

> **Nadrealan broj** je uređeni par skupova prethodno konstruiranih brojeva koje zovemo **lijevim skupom** i **desnim skupom**. Nijedan element lijevog skupa nije veći ili jednak nijednom elementu desnog skupa.

Ovako ćemo označavati brojeve: $x = \{X_L \mid X_R\}$, gdje su X_L i X_R lijevi i desni skup broja x. Zahtjev koji imamo na njih jest: za svaki $x_L \in X_L$ i za svaki $x_R \in X_R$ vrijedi $x_L \not\geqslant x_R$, odnosno kraće $X_L \not\geqslant X_R$. Zasad ne znamo što znači "veći ili jednak" pa prethodna definicija zahtijeva još jednu - usporedivost nadrealnih brojeva. Napomenimo da $x \geqslant y$ znači isto što i $y \leqslant x$.

> Kažemo da je nadrealan broj x **manji ili jednak** od nadrealnog broja y ako nijedan element lijevog skupa od x nije veći ili jednak od y, i nijedan element desnog skupa od y nije manji ili jednak od x.

To, pak, zapisano simbolički izgleda ovako:

$$x \leqslant y \ :\Leftrightarrow \ (\nexists\, x_L \in X_L \,:\, x_L \geqslant y) \text{ i } (\nexists\, y_R \in Y_R \,:\, y_R \leqslant x).$$

Sada imamo nadrealne brojeve definirane u terminima nadrealnih brojeva i relacije "manji ili jednak", koja je također zadana rekurzivno. Unatoč tomu, nema razloga za paniku! U ovom članku nećemo davati formalnu definiciju nadrealnih brojeva jer ona zahtijeva dublje poznavanje teorije skupova (naprimjer transfinitnu indukciju i teorem rekurzije). Nadamo se da će ideja konstrukcije postati jasnija kroz primjere i tvrdnje koje slijede.

Nove brojeve stvaramo od onih već stvorenih pa je na početku, kada nemamo nijedan prethodno konstruirani broj, prirodno da nam ulogu lijevog i desnog skupa preuzme prazan skup. Prvi stvoreni broj izgleda ovako: $\{\emptyset \mid \emptyset\}$. Zapravo, prije nego što ustvrdimo da to jest broj, moramo provjeriti uvjet iz definicije. No uistinu, nijedan element praznog skupa nije veći ili jednak nijednom elementu praznog skupa (jer prazan skup nema elemenata), pa je uvjet zadovoljen. Taj broj zovemo "nula" i skraćeno ćemo ga pisati kao 0, tj. $0 \equiv \{\emptyset \mid \emptyset\}$. Bilo bi zgodno kada bi vrijedilo $0 \leqslant 0$, no sada smo u novom okruženju, i tu tvrdnju moramo sami provjeriti.

Propozicija 1. $0 \leqslant 0$.

Dokaz. Ono što tvrdimo jest $\{\emptyset \mid \emptyset\} \leqslant \{\emptyset \mid \emptyset\}$. Izravno iz definicije slijedi da je to ekvivalentno zahtjevima da ne postoji element praznog skupa koji je veći ili jednak od nule i da ne postoji element praznog skupa koji je manji ili jednak od nule, što zasigurno vrijedi. ■

Sada kada znamo jedan nadrealan broj, možemo ga iskoristiti kako bismo došli do novih brojeva, tako da stavimo nulu kao element lijevog ili desnog skupa: $\{0 \mid \emptyset\}$, $\{\emptyset \mid 0\}$, $\{0 \mid 0\}$. Međutim, $\{0 \mid 0\}$ nije broj jer, prema maloprije dokazanom, vrijedi $0 \leqslant 0$. Pogledajmo kako se naša nova dva broja odnose prema nuli.

Propozicija 2. $0 \leqslant \{0 \mid \emptyset\}$.

Dokaz. Potrebno je vidjeti da ne postoji element praznog skupa koji je veći ili jednak od broja $\{0 \mid \emptyset\}$ i da ne postoji element praznog skupa koji je manji ili jednak od 0. Budući da je i jedno i drugo istinito, slijedi tvrdnja. ■

Na isti način sami možete dokazati sljedeću tvrdnju.

Zadatak 1. $\{\emptyset \mid 0\} \leqslant 0$.

Brojeve $\{0 \mid \emptyset\}$ i $\{\emptyset \mid 0\}$ zvat ćemo "jedan" i "minus jedan". Skraćeno ćemo ih zapisivati simbolima 1 i -1, tj. $1 \equiv \{0 \mid \emptyset\}$, $-1 \equiv \{\emptyset \mid 0\}$.

Znamo tri nadrealna broja i s pomoću njih mozemo napraviti 61 par lijevog i desnog skupa. No, samo 17 od tih parova zadovoljava uvjet iz definicije nadrealnog broja: $\{-1 \mid \emptyset\}$, $\{\emptyset \mid -1\}$, $\{1 \mid \emptyset\}$, $\{\emptyset \mid 1\}$, $\{-1, 0 \mid \emptyset\}$, $\{-1 \mid 0\}$, $\{\emptyset \mid -1, 0\}$, $\{0, 1 \mid \emptyset\}$, $\{0 \mid 1\}$, $\{\emptyset \mid 0, 1\}$, $\{-1, 1 \mid \emptyset\}$, $\{-1 \mid 1\}$, $\{\emptyset \mid -1, 1\}$, $\{-1, 0, 1 \mid \emptyset\}$, $\{-1, 0 \mid 1\}$, $\{-1 \mid 0, 1\}$, $\{\emptyset \mid -1, 0, 1\}$.

Kažemo da je nadrealni broj x **jednak** nadrealnom broju y ako vrijedi $x \leqslant y$ i $y \leqslant x$. Ako je $x \leqslant y$ i ne vrijedi $y \leqslant x$, kažemo da je x **strogo manji** od y.

Zadatak 2. Dokažite $0 < 1$.

Lako je dokazati da je $1 < \{1 \mid \emptyset\}$ i $\{\emptyset \mid -1\} < -1$, pa ćemo te brojeve zvati "dva" i "minus dva", odnosno $2 \equiv \{1 \mid \emptyset\}$, $-2 \equiv \{\emptyset \mid -1\}$.

Možda zanimljivije, može se dokazati $0 < \{0 \mid 1\}$ i $\{0 \mid 1\} < 1$, odnosno $-1 < \{-1 \mid 0\}$ i $\{-1 \mid 0\} < 0$. Ove brojeve zovemo "jedna polovina" i "minus jedna polovina": $\frac{1}{2} \equiv \{0 \mid 1\}$, $-\frac{1}{2} \equiv \{-1 \mid 0\}$.

Na prvi pogled nije jasno zašto se baš koristimo s $\frac{1}{2}$ i $-\frac{1}{2}$, a ne bilo kojim drugim brojevima između 0 i 1, odnosno -1 i 0. Odgovor se nalazi u *4. cjelini*, gdje ćemo vidjeti da je $\{0 \mid 1\} + \{0 \mid 1\} = 1$.

Promotrimo sada broj $\{-1 \mid 1\}$.

Propozicija 3. $0 \leqslant \{-1 \mid 1\}$.

Dokaz. Zapišimo 0 ponovno kao $\{\emptyset \mid \emptyset\}$. Tvrdnja je ekvivalentna sljedećem: ne postoji element praznog skupa koji je veći ili jednak od $\{-1 \mid 1\}$ i 1 nije manji ili jednak od 0. Prvo trivijalno vrijedi, a drugi zahtjev slijedi iz Zadatka 2. ■

Zadatak 3. Dokažite $\{-1 \mid 1\} \leqslant 0$.

Iz Propozicije 3 i Zadatka 3 imamo $0 = \{-1 \mid 1\}$. Primijetimo da je su ta dva broja jednaka, a ne identična, jer se kao skupovi očito razlikuju. Kažemo da su $\{\emptyset \mid \emptyset\}$ i $\{-1 \mid 1\}$ dva različita *predstavnika* broja 0. Slično se dokazuje da su svi do sada stvoreni brojevi jednaki jednom od ovih brojeva: 0, 1, −1, 2, −2, ½, −½.

Jasno je kako bismo dalje nalazili nove brojeve služeći se starima. Također očekujemo da ćemo pritom naići na mnoge nove predstavnike već otkrivenih brojeva. Uvedimo još jedan novi pojam, *rođendan* nadrealnog broja.

Nula je rođena na 1. dan. Koristeći se nulom konstruirali smo 1 i −1 pa kažemo da su ta dva broja rođena na 2. dan. Dalje, koristeći 0, 1 i −1 dobili smo −2, −½, ½ i 2, koji su rođeni na 3. dan. Kažemo da je 0 **stariji** od 1 i da je 2 **mlađi** od 1. Za nadrealan broj u čijoj konstrukciji je najstariji upotrebljeni broj rođen n-tog dana, kažemo da je rođen na $(n + 1)$.-vi dan.

Elemente iz X_L i X_R nekad zovemo *roditeljima* broja x.

3. Neka (osnovna) svojstva

Teorem 1. Ako je x nadrealan broj, onda je $x \leqslant x$.

Dokaz. Provodimo ga indukcijom po danu rođenja nadrealnog broja. Bazu smo već dokazali: $0 \leqslant 0$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve brojeve rođene prije x, odnosno za sve elemente iz X_L i X_R. Vrijedi $x \leqslant x$ ako i samo ako ne postoji $x_L \in X_L$ takav da je $x \leqslant x_L$ i ne postoji $x_R \in X_R$ takav da je $x_R \leqslant x$. Prvo dokazujemo lijevu stranu. Želimo dokazati da $x \not\leqslant x_L$, za svaki $x_L \in X_L$. To je ekvivalentno sljedećem: postoji $a \in X_L$ takav da je $x_L \leqslant a$ ili postoji $b \in X_{LR}$ takav da je $b \leqslant x$, gdje je X_{LR} desni skup broja x_L. Budući da je x_L mlađi od x, vrijedi $x_L \leqslant x_L$, pa možemo uzeti $a \equiv x_L$ i time smo dokazali lijevu stranu. Analogno se dokazuje desna strana. ■

Kao posljedicu dobivamo još jednu "zgodnu" tvrdnju.

Korolar 1. Ako je x nadrealan broj, onda je $x = x$.

Teorem 2. Nadrealan broj veći je od svih elemenata svojeg lijevog skupa i manji od svih elemenata svojeg desnog skupa, odnosno $a < \{A \mid B\}$ i $\{A \mid B\} < b$ za sve $a \in A$ i $b \in B$.

Dokaz. Da bismo dokazali prvi dio, definicija relacije $<$ zahtijeva da dokažemo dvije tvrdnje: $a \leqslant \{A \mid B\}$ i $\{A \mid B\} \not\leqslant a$, za svaki $a \in A$. Drugu je tvrdnju lako pokazati: $a \leqslant a$ za svaki $a \in A$, pa vrijedi $\{A \mid B\} \not\leqslant a$. Prvu tvrdnju dokazujemo indukcijom po skupu A. Ako je $A = \emptyset$, tvrnja vrijedi. Raspisivanjem definicije $\leqslant$ dobivamo: ne postoji $a_L \in A_L$ takav da je $\{A \mid B\} \leqslant a_L$ i ne postoji $b \in B$ takav da je $b \leqslant a$ (pritom je A_L lijevi skup broja a). Prva tvrdnja vrijedi jer je $\{A \mid B\}$ nadrealan broj, i stoga nijedan element od A nije veći ili jednak nijednom elementu od B. Druga tvrdnja ekvivalentna je sljedećem:

$$\forall\, a_L \in A_L \;:\; \{A \mid B\} \not\leqslant a_L,$$

što je dalje ekvivalentno s

$$\forall\, a_L \in A_L \;:\; \big(\, \exists\, a' \in A \;:\; a_L \leqslant a' \;\text{ ili }\; \exists\, a_{LR} \in A_{LR} \;:\; a_{LR} \leqslant \{A \mid B\}\,\big).$$

Ako izaberemo $a' \equiv a$, onda je $a_L \leqslant a$, za svaki $a_L \in A_L$. Ta tvrdnja identična je prvoj tvrdnji teorema, osim što su varijable zamijenjene nekim roditeljem svojeg lijevog skupa. Induktivno zaključujemo da prva tvrdnja vrijedi ako vrijedi za nadrealan broj kojemu je lijevi skup prazan, a to smo već provjerili. Analogno se dokazuje druga tvrdnja teorema, $\{A \mid B\} < b$ za svaki $b \in B$. ■

Teorem 3. Ako je $x \leqslant y$ i $y \leqslant z$, onda je $x \leqslant z$.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno: postoje nadrealni brojevi x, y, z takvi da je $x \leqslant y$ i $y \leqslant z$ i $x \not\leqslant z$. To je ekvivalentno sa sljedećih pet tvrdnji:

$$\begin{gathered}
\nexists\, x_L \in X_L \;:\; y \leqslant x_L,\\
\nexists\, y_R \in Y_R \;:\; y_R \leqslant x,\\
\nexists\, y_L \in Y_L \;:\; z \leqslant y_L,\\
\nexists\, z_R \in Z_R \;:\; z_R \leqslant y,\\
\big(\, \exists\, x_L \in X_L \;:\; z \leqslant x_L \big) \;\text{ ili }\; \big(\, \exists\, z_R \in Z_R \;:\; z_R \leqslant x\,\big).
\end{gathered}$$

Imamo dva slučaja s obzirom na zadnju tvrdnju. Ako postoji $x_L \in X_L$ takav da je $z \leqslant x_L$, onda je (y, z, x_L) trojka brojeva s istim svojstvom koje ima trojka (x, y, z). Ako, pak, postoji $z_R \in Z_R$ takav da je $z_R \leqslant x$, onda je (z_R, x, y) takva trojka. U svakom slučaju, dolazimo do kontradikcije, jer ako je suma dana rođenja od x, y i z jednaka n, onda je suma dana rođenja nove trojke strogo manja od n. Tako možemo nastaviti dalje i po volji smanjiti sumu, no suma dana rođenja triju brojeva nikad nije manja od 3. ■

Teorem 4. Uređaj $\leqslant$ na nadrealnim brojevima je linearan, odnosno bar jedna od tvrdnji $x \leqslant y$ i $y \leqslant x$ je istinita.

Dokaz. Ako $x \leqslant y$ ne vrijedi, to znači da je najmanje jedna od slijedećih dviju tvrdnji istinita:

$$\begin{gathered}
\exists\, x_L \in X_L \;:\; y \leqslant x_L,\\
\exists\, y_R \in Y_R \;:\; y_R \leqslant x.
\end{gathered}$$

Ako pretpostavimo da je prva tvrdnja istinita, možemo naći x_L takav da je $y \leqslant x_L$. Nadalje, zbog *Teorema 2* znamo da je $x_L \leqslant x$. Sada, koristeći *Teorem 3* (svojstvo tranzitivnosti), dobivamo $y \leqslant x$. Analogno postupamo kada pretpostavimo da je druga tvrdnja istinita. ■

Zadatak 4. Ako je $x < y$ i $y < z$, onda je $x < z$.

Sljedeći teorem će nam dopustiti da pojednostavnimo mnoge brojeve.

Teorem 5. Ako nam je dan nadrealan broj $x = \{X_L \mid X_R\}$, možemo ukloniti bilo koji element iz X_L osim najvećeg, a da ne promijenimo vrijednost broja x. Slično, možemo ukloniti bilo koji element iz X_R osim najmanjeg, a da ne promijenimo vrijednost broja x.

Dokaz. Dokazat ćemo prvi dio teorema, a drugi dio dokazuje se na isti način. Pretpostavimo da je $x= \{x_1, x_2, \ldots \mid X_R\}$ i da je $x_1 < x_2$. Želimo dokazati da je $\{x_1, x_2, \ldots \mid X_R\} = \{x_2, \ldots \mid X_R\}$, a to znači da moramo dokazati $\{x_1, x_2, \ldots \mid X_R\} \leqslant \{x_2, \ldots \mid X_R\}$ i $\{x_2, \ldots \mid X_R\} \leqslant \{x_1, x_2, \ldots \mid X_R\}$. To se dalje razlaže na četiri tvrdnje:

$$\begin{gathered}
\nexists\, a \in \{x_1, x_2, \ldots\} \;:\; \{x_2, \ldots \mid X_R\} \leqslant a, \\
\nexists\, b \in X_R \;:\; b \leqslant \{x_1, x_2, \ldots \mid X_R\}, \\
\nexists\, a' \in \{x_2, \ldots\} \;:\; \{x_1, x_2, \ldots \mid X_R\} \leqslant a', \\
\nexists\, b' \in X_R \;:\; b' \leqslant \{x_2, \ldots \mid X_R\}.
\end{gathered}$$

Druga, treća i četvrta tvrdnja direktno slijede iz *Teorema 2*. Prva tvrdnja ekvivalentna je s

$$\forall\, a \in \{x_1, x_2, \ldots\} \;:\; \{x_2, \ldots \mid X_R\} \not\leqslant a,$$

što je, pak, ekvivalentno s

$$\forall\, a \in \{x_1, x_2, \ldots\} \;:\; \{x_2, \ldots \mid X_R\} > a.$$

Trebamo samo promotriti slučaj kada je $a = x_1$ jer ostale vrijednosti broja a pokriva Teorem 2. Iz *Teorema 2* imamo $\{x_2, \ldots \mid X_R\} > x_2$, pa sada, budući da je $x_2 > x_1 = a$, prema svojstvu tranzitivnosti (*Teorem 3*) slijedi zadnja tvrdnja. ■

Uočite da skup nadrealnih brojeva ne mora imati niti najveći, niti najmanji element (u *5. cjelini* razmatrat ćemo beskonačne skupove!), pa ne možemo zaključiti da X_L i X_R možemo svesti na jednočlane skupove za svaki nadrealan broj $x = \{X_L \mid X_R\}$.

Korolar 2. Ako skup nadrealnih brojeva A ima najveći element $a_{\max}$, tada je $\{A \mid B\} = \{a_{\max} \mid B\}$. Slično, ako skup B ima najmanji element $b_{\min}$, tada je $\{A \mid B\} = \{A \mid b_{\min}\}$.

Zadatak 5. Ako je nadrealni broj x veći od svih elemenata skupa A i manji od svih elemenata skupa B, tada je $x = \{X_L \cup A \mid X_R \cup B\}$.

Teorem 6. Ako nakon dana m postoje nadrealni brojevi $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n$, sve nove brojeve koji su rođeni na $(m + 1)$.-vi dan možemo predstaviti s $\{\varnothing \mid x_1\}$, $\{x_1 \mid x_2\}$, $\{x_2 \mid x_3\}$, ... , $\{x_{n-1} \mid x_n\}$, $\{x_n \mid \varnothing\}$. Nakon $(m+1)$.-vog dana poredak stvorenih nadrealnih brojeva bit će:

$$\{\varnothing \mid x_1\} < x_1 < \{x_1 \mid x_2\} < x_2 < \{x_2 \mid x_3\} < x_3 < \ldots < \{x_{n-1} \mid x_n\} < x_n < \{x_n \mid \varnothing\}.$$

Dokaz. O brojevima rođenim na $(m + 1)$.-vi dan teorem tvrdi slijedeće:

(1) $\{\varnothing \mid x_1\}$ i $\{x_n \mid \varnothing\}$ su predstavnici brojeva koji nisu bili poznati na dan m;
(2) $\{x_i \mid x_j\}$ je predstavnik broja koji nije bio poznat na dan m ako je $i + 1 = j$;
(3) $\{x_i \mid x_j\}$ je predstavnik broja koji je bio poznat na dan m ako je $i + 1 \neq j$.

Iz *Teorema 2* znamo da je $\{\emptyset \mid x_1\} < x_1$. Budući da je x_1 najmanji broj rođen na dan m, $\{\emptyset \mid x_1\}$ mora predstavljati novu vrijednost i njegova pozicija u skupu do tada stvorenih brojeva je očigledna. Analogno zaključujemo za $\{x_n \mid \emptyset\}$ i time je dokazano (1). Nadalje, iz *Teorema 2* znamo da je $x_i < \{x_i \mid x_j\} < x_j$. Budući da na dan m nije postojao broj između x_i i x_j, $\{x_i \mid x_j\}$ mora predstavljati novi broj.

Ako je $i + 1 < j$, neka x_k predstavlja najstariji nadrealni broj između x_{i+1} i x_{j-1}. Ako postoji više jednako starih brojeva, neka je x_k bilo koji od njih. Znamo da roditelji od x_k moraju biti ili manji od x_{i+1} ili veći od x_{j-1} jer prije rođenja x_k nije postojao nijedan broj između x_{i+1} i x_{j-1}. Dakle, vrijedi $X_{kL} \leqslant x_i$ i $x_j \leqslant X_{kR}$, gdje su X_{kL} i X_{kR} lijevi i desni skup broja x_k. Sada iz $x_i < \{x_i \mid x_j\} < x_j$ slijedi $X_{kL} < \{x_i \mid x_j\} < X_{kR}$, pa primjenom *Zadatka 5* dolazimo do $\{x_i \mid x_j\} = \{x_i, X_{kL} \mid x_j, X_{kR}\}$. Primjenom *Zadatka 5* na činjenicu $x_i < x_k < x_j$ dobivamo i $x_k = \{x_i, X_{kL} \mid x_j, X_{kR}\}$. Slijedi $\{x_i \mid x_j\} = x_k$. Usput smo dokazali i da postoji samo jedan najstariji broj između x_i i x_j, s obzirom da vrijednost takvog broja nužno mora biti jednaka $\{x_i \mid x_j\}$. Drugi dio teorema direktno proizlazi iz *Teorema 2*. ■

Još jednom ćemo istaknuti činjenicu dobivenu u dokazu *Teorema 6* jer nam ona bitno olakšava računanje s nadrealnim brojevima.

Korolar 2. Ako je x najstariji nadrealan broj između a i b, tada je $\{a \mid b\} = x$.

4. Zbrajanje, oduzimanje i množenje

Prvo nekoliko uvodnih napomena. Sumu broja n i skupa brojeva S definiramo kao skup koji dobijemo dodavanjem broja n svakom elementu skupa S, tj. $n + S = \{n + s \;:\; s \in S\}$. Analogno definiramo razliku $n - S$ i produkt $n \cdot S$ broja n i skupa S. Primijetimo da je $n + \emptyset = \emptyset$, $n - \emptyset = \emptyset$ i $n \cdot \emptyset = \emptyset$.

Sumu skupova S i T definiramo kao skup koji dobijemo zbrajanjem svakog elementa skupa S sa svakim elementom skupa T, tj. $S + T = \{s + t \;:\; s \in S,\; t \in T\}$. Sada možemo definirati zbrajanje nadrealnih brojeva i suprotan broj.

$$x + y = \{\, (X_L + y) \cup (x + Y_L) \mid (X_R + y) \cup (x + Y_R) \,\}$$
$$-x = \{-X_R \mid -X_L\}$$

Zadatak 6. Dokažite da vrijedi $1 + ½ = 1½$.

Lako je vidjeti da je suprotan broj nadrealnog broja nadrealan broj, no pokazati da je zbroj dvaju nadrealnih brojeva ponovno nadrealan broj, nije tako trivijalno. Indukcijom i napornim raspisivanjem zajedno se dokazuju sljedeća dva teorema.

Teorem 7. Ako je $x \leqslant x'$ i $y \leqslant y'$, onda je $x + y \leqslant x' + y'$.

Teorem 8. Ako je $x + y \geqslant x' + y'$ i $y \leqslant y'$, onda je $x \geqslant x'$.

Iz njih, pak, dalje proizlazi:

Korolar 3. Ako je $x = x'$ i $y = y'$, onda je $x + y = x' + y'$.

Teorem 9. Ako je $x < x'$ i $y \leqslant y'$, onda je $x + y < x' + y'$.

Dokaze možete pronaći u [CT] i [DK]. Tek sada imamo sve što je potrebno za dokazivanje da je zbroj dvaju nadrealnih brojeva nadrealan broj!

Zadatak 7. Ako su a i b nadrealni brojevi, tada je $a + b$ nadrealan broj.

Označimo s **N** skup nadrealnih brojeva.

Teorem 10. (**N**, +) je komutativna grupa.

Zapravo **N** nije skup nego prava klasa, kao što ćemo vidjeti u *5. cjelini*, tako da termin *grupa* nije posve prikladan. Svojstva asocijativnosti i komutativnosti lako je dokazati, kao i to da je neutralni element 0. Postojanje inverznog elementa $-x$ dokazuje se indukcijom.

Nećemo se detaljno baviti množenjem već ćemo samo dati uvid u definiciju kako bismo se mogli bolje zabaviti u idućoj cjelini.

$$x \cdot y = \{ (X_L \cdot y + x \cdot Y_L - X_L \cdot Y_L) \cup (X_R \cdot y + x \cdot Y_R - X_R \cdot Y_R) \mid (X_L \cdot y + x \cdot Y_R - X_L \cdot Y_R) \cup (X_R \cdot y + x \cdot Y_L - X_R \cdot Y_L) \}$$

Prvo bismo, naravno, trebali dokazati da je umnožak dvaju nadrealnih brojeva nadrealan broj. Uz istu napomenu u vezi s **N** kao maloprije, vrijedi:

Teorem 11. ($\mathbf{N}\backslash\{0\}$, $\cdot$) je komutativna grupa.

Ako vas interesira množenje, više o tome možete naći u [JC], [CT] i [DK].

5. Do beskonačnosti i dalje

Ako nastavimo stvarati brojeve kao u *2. cjelini*, dobivat ćemo redom racionalne brojeve koji u nazivniku imaju potenciju broja 2. No, što je sa svim ostalim realnim brojevima, naprimjer s ⅓? Svi na ovaj način stvoreni brojevi imaju konačan zapis u binarnom obliku. S druge strane, svaki broj koji ima konačan zapis u binarnom obliku prije ili kasnije bit će stvoren. No, ⅓ nema konačan zapis:

$$⅓ = 0.010101010101\ldots$$

Znači, ⅓ ne može biti stvoren nakon konačno mnogo koraka. Takvi brojevi rođeni su na dan $\aleph$ kad nam na raspolaganju stoje svi brojevi s konačnim binarnim zapisom. Da bismo dobili ⅓, možemo uzeti (u binarnoj notaciji) $X_L = \{0.01, 0.0101, 0.010101, 0.01010101, \ldots\}$ i $X_R = \{0.1, 0.011, 0.01011, 0.0101011, \ldots\}$. Na sličan način dolazimo do broja π. Neću vam uskratiti užitak!

Zadatak 8. Nađite jedan mogući izbor lijevog skupa i desnog skupa broja π.

Dakle, na dan $\aleph$ stvoreni su svi brojevi iz skupa realnih brojeva **R**. Nadrealni brojevi do sada nam nisu dali ništa novog... ili možda ipak jesu? Uzmimo $X_L = \{0\}$ i $X_R = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\}$. To je broj veći od 0 i manji od svih pozitivnih realnih brojeva! Možemo ga zvati ε. Ako stavimo $X_L = \{1\}$ i $X_R = \{1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{4}, 1\frac{1}{8}, \ldots\}$, dobivamo broj $x = \{X_L \mid X_R\}$ koji je "za dlaku" veći od 1. Sada je jasno da postoji broj "odmah do" svakog realnog broja, pa tako i do broja π. Međutim, on nastaje tek na dan $\aleph + 1$, a na dan $\aleph$ samo brojevi s konačnim binarnim zapisom dobivaju beskonačno bliskog susjeda. Primijetimo da na dan $\aleph + 1$ dobivamo i broj između 0 i ε.

Na dan $\aleph$ stvoren je još jedan broj koji ne pripada skupu realnih brojeva: $\omega = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots \mid \emptyset\}$. Taj broj veći je od svih prirodnih brojeva, dakle i od svih realnih! Čitatelji upoznati s transfinitnim brojevima prepoznaju prvi beskonačni ordinal. Ordinalni brojevi zapravo su redni brojevi, odnosno proširenje pojma rednog broja na beskonačan slučaj. Možemo ih reprezentirati kao nadrealne brojeve kojima je desni skup prazan. Više o ordinalnim brojevima potražite npr. u [MV].

Primijetimo da se zbrajanje nadrealnih brojeva razlikuje od zbrajanja ordinala. Poznato je da zbrajanje ordinala općenito nije komutativno. Naprimjer, vrijedi $1 + \omega = \omega$, ali je $\omega + 1 > \omega$. S druge strane, iz definicije zbrajanja nadrealnih brojeva imamo $1 + \omega = \omega + 1 = \{\omega, 2, 3, 4, 5,... \mid \emptyset\}$. To možemo pojednostavniti na $\{\omega \mid \emptyset\}$.

Broj $\omega + ½$ još je zanimljiviji, no jednako se lako pokazuje da vrijedi $\omega + ½ \equiv \{\omega \mid \omega + 1\}$. Možemo li izračunati $\omega - 1$? Nadam se da to niste pokušavali na *Teoriji skupova* ☺. Sad se lako vidi (a i ima smisla!) da je $\omega - 1 \equiv \{1, 2, 3, 4,... \mid \omega\}$ prvi broj veći od svih cijelih brojeva, ali manji od ω. Broj $\omega + \pi \equiv \{\omega + \Pi_L \mid \omega + \Pi_R\}$ stvoren je na dan $2\aleph$, zajedno s $\omega + \varepsilon$ i $\omega - \varepsilon$.

Možemo promatrati razne brojeve poput $\omega + \omega = \{\omega + 1, \omega + 2, \omega + 3, \omega + 4,... \mid \emptyset\}$, $3\omega = \{2\omega + 1, 2\omega + 2, 2\omega + 3, 2\omega + 4, ... \mid \emptyset\}$ koji je stvoren na dan $3\aleph$, $\omega^2 = \{\omega, 2\omega, 3\omega, 4\omega,... \mid \emptyset\}$ koji je stvoren na dan $\aleph^2$, $\omega^\omega = \{\omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4,... \mid \emptyset\}$ (na koji dan je stvoren?) i još uvijek smo samo na početku... Što li se tek događa s "malim" brojevima na dane kada nastaju brojevi ω^{ω^ω}, $\omega^{\omega^{\omega^\omega}}$ i tako dalje?

Zadatak 9. Dokažite $\varepsilon \cdot \omega \equiv 1$.

Zadatak 10. Dokažite $\sqrt{\omega} \equiv \{1, 2, 3, 4,... \mid \omega/1, \omega/2, \omega/3, \omega/4, ...\}$.

Iako nadrealni brojevi dopuštaju zbrajanje, množenje, potenciranje i logaritmiranje, problemi se javljaju kada dođemo do integriranja. Ironično, problemi nastaju upravo zbog veličine njihova kraljevstva. Bez integriranja, nadrealni brojevi nisu od interesa za fiziku pa dok (i ako) se ne uspije naći rješenje te teškoće, nadrealni brojevi čekaju svoj procvat.

Ostalo je još beskonačno stvari za učiniti... i samo konačno mnogo vremena... [DK]

Literatura

[MB] M. Botinčan, *Kombinatorne igre*, Math.e **6** (2005). *http://e.math.hr/igre*

[MC] M. Conrady, *Surreal numbers*, 1996. *http://www.usna.navy.mil/MathDept/wdj/surreal_numbers.html*

[JC] J. H. Conway, *On numbers and games*, Academic Press, 1976.

[ZE] Z. Erjavec, *Nadrealni brojevi*, Zbornik radova 2. kongresa nastavnika matematike, 2004.

[DK] D. E. Knuth, *Surreal numbers. How two ex-students turned on to pure mathematics and found total happines*, Adison - Wesley Publishing Company, 1974.

[IP] I. Peterson, *Computing in a surreal realm*, 1996. *http://www.maa.org/mathland/mathland_3_18.html*

[TS] T. Smith, *Surreal numbers and many-worlds*. *http://www.valdostamuseum.org/hamsmith/surreal.html*

[CT] C. Tøndering, *Surreal numbers - An introduction*, 2005. *http://www.tondering.dk/claus/surreal.html*

[MV] M. Vuković, *Teorija skupova*, skripta, PMF-Matematički odjel, 2005.

[WI] Wikipedia: The Free Encyclopedia (svibanj 2007.), *Surreal number*. *http://en.wikipedia.org/wiki/Surreal_number*