

PRIMJENA PLANIRANJA EKSPERIMENATA U OPLEMENJIVANJU MINERALNIH SIROVINA

SLAVKA PFAFF, BRANKO SALOPEK

*Rudarsko-geološko-naftni fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Pierottijeva 6, HR 10000 Zagreb, Hrvatska
E-mail: pfaffs@rgn.hr*

Ključne riječi: Statističko planiranje eksperimenata, potpuni faktorski plan, centralno složen plan, oplemenjivanje mineralnih sirovina

Key words: Statistical design of experiments, full factorial design, central composite design, mineral processing

Sažetak

Statističko planiranje eksperimenata bavi se metodama takvog izvođenja eksperimenta koje osigurava sakupljanje podataka primjerenih statističkoj analizi na osnovi koje je moguće donijeti objektivne i valjane zaključke. Tim metodama obuhvaćena su dva usko povezana problema eksperimentiranja: plan eksperimenta i statistička obrada rezultata. Štoviše, planovi za izvođenje eksperimenata sastavljeni su tako da uravnotežuju odnos između preciznosti statističkog zaključivanja i troškova eksperimentiranja. Faktorski planovi primjenjuju se za eksperimente koji uključuju više zavisnih varijabli tj. faktora, a potrebno je ispitati ukupni utjecaj faktora na zavisnu varijablu. U slučaju k faktora od kojih svaki prima samo dvije različite vrijednosti, često se primjenjuje potpuni 2^k plan kojim se zavisna varijabla ispituje u svakoj od kombinacija vrijednosti faktora. Ako se zavisna varijabla ispituje na više od dvije različite vrijednosti svakog od faktora, moguće je, osim procjene utjecaja pojedinog faktora ili njihovih međudjelovanja, odrediti i nelinearnu regresijsku jednadžbu ovisnosti zavisne varijable o faktorima. U slučaju dvaju faktora takva jednadžba predstavlja plohu u trodimenzionalnom prostoru pa se općenito plan za određivanje nelinearne regresijske jednadžbe može nazvati plan za plohu zavisne varijable. Centralno složen plan je jedan od takvih planova. U radu su na primjeru ispitivanja apsorpcije vode briketa u ovisnosti o četiri faktora (pritisak, temperatura, sadržaja vlage, grano-sastav ugljena) prikazani potpuni 2^4 faktorski plan i centralno složeni plan i njihova analiza. U glavnim crtama opisane su metode analize i izvođenja zaključaka.

Abstract

Statistical design of experiments deals with methods of planning the experiment so that appropriate data are collected, which may be analyzed by statistical methods resulting in objective and valid conclusions. These methods extend over two closely related experimental problems: the design of the experiment and the statistical analysis of the data. Moreover, designed experiments maintain a balance between statistical accuracy and the cost of the experimental process. Factorial designs are used in experiments involving several factors where it is necessary to study the joint effects of these factors on a dependent variable i.e. response. In case of k factors, each at only two levels, the full 2^k factorial design in which the response is tested in all possible combinations of settings is widely used. If the response is investigated with more than two different values of each factor then, in addition to the effect estimates of factors and their interactions, the curvilinear regression equation of the relationship between response and factors can be obtained. In case of two factors such equation represents a surface in three-dimensional space, so designs for fitting the response surface are often called response surface designs. One of them is the central composite design. The paper presents the full 2^4 factorial design and the central composite design and their analysis exemplified by the results of investigation about how the four factors (pressure, humidity, temperature and granulation of the coal) affect the water absorption. The methods of analysis and the way of drawing conclusions have been outlined.

Uvod

Testiranje tehnoloških shema oplemenjivanja zahtijeva relativno mnogo vremena i novaca a da pri tome krajnji rezultat nije uvijek zadovoljavajući. Tako npr. traženje optimalnog grano-sastava odnosno raščina u procesu mljevenja i klasiranja ili pak optimalnog iskorištenja u procesu flotiranja ponekad zahtijeva ispitivanje čitavog niza nezavisnih varijabli. Radi toga se u posljednje vrijeme u tom području sve više koristi statistička metoda planiranja eksperimenta (Crosier, 1992, Rao & Mohanty, 2002, Sheridan at al., 2002).

U svakom slučaju kad eksperiment zahtijeva ispitivanje velikog broja varijabli potrebno je napraviti dobar plan izvođenja eksperimenta kako bi se uz što manji broj testova dobilo što više nepristranih informacija o utjecaju nezavisnih varijabli na zavisne varijable. Samo na osnovi takvog plana i njegove statističke analize moguće je pouzdano zaključivati o djelovanju sustava u cjelini. Istraživač mora eksperiment vrlo pažljivo koncipirati od samog početka što znači od izbora veličina koje će najbolje opisati funkcioniranje sustava i veličina koje imaju utjecaj na njegov rad pa sve do završne interpretacije obrade rezultata. Brojna

literatura bavi se načinom obrade rezultata eksperimenta tj. raznim statističkim metodama i analizama rezultata eksperimenta. Manji broj autora pod nazivom planiranje eksperimenata (*design of experiments, experimental design*) bavi se i fazom pripreme eksperimenta u kojoj treba odlučiti o broju ispitivanja, izboru promatranih veličina za pojedini test, vrijednostima varijabli s kojima će se eksperimentirati i sl. To je vrlo važan segment koncepcije eksperimenta jer se provodi s ciljem da se uz što manji broj «dobro» provedenih testova ili mjerenja dobije što veći broj kvalitetnih informacija. Gotovi programi za statističku obradu podataka danas sadrže i dio koji pruža mogućnost generiranja određenog broja poznatih planova eksperimenta i odgovarajuću obradu rezultata dobivenih tako izvedenim eksperimentima.

Bilo da se radi o istraživanju nekog procesa, laboratorijskom testiranju, ispitivanju djelovanja nekog uređaja ili postrojenja prvi je korak izabrati veličinu ili više njih koje najbolje opisuju djelovanje tog postrojenja kao cjeline odnosno sustava. Ta veličina je rezultat rada cijelog sustava i ona se naziva zavisna varijabla. Također treba odrediti i one veličine čije promjene imaju utjecaj na zavisnu varijablu i te veličine se nazivaju nezavisne varijable ili faktori. Nakon toga treba planirati i obaviti eksperimente, ispitivanja, testiranja, mjerenja i dr., te analizom rezultata doći do zaključka koji faktori i njihova međudjelovanja imaju značajan utjecaj na zavisnu varijablu i koliki je taj utjecaj. Jasno je da o broju faktora i broju različitih vrijednosti koje može primiti svaki od faktora ovisi i broj i složenost testova.

Općenito se plan eksperimenta u tom slučaju naziva faktorski plan (*factorial design*). Ovdje će se prikazati neki posebni slučajevi takvih planova, izložiti osnove metoda za njihovu analizu i dati primjer u kojem je odgovarajući postupak proveden i analiziran. Primjer predstavlja jedan dio istraživanja u području ispitivanja kvalitete briketa ugljena (Salopek et al. 2003). (Briketiranje – postupak okrupnjavanja sitnozrnih ili praškastih materijala primjenom pritiska. Pored ugljena, što je najčešće, briketiraju se i drugi materijali od kojih se izrađuju pojedini proizvodi u npr. kemijskoj, prehrambenoj ili farmaceutskoj industriji.) Za obradu rezultata korišten je program *Statistica ver.4.5*. Tablice s rezultatima i grafovi ostavljeni su u obliku u kojem ih daje taj program. To je učinjeno s namjerom da se mogućim korisnicima tog programa što bolje objasne izlazni rezultati.

Potpuni 2^k faktorski plan

Kao prvo razmotrit će se istraživanje u kojem se želi analizirati utjecaj koji na zavisnu varijablu ima k faktora pri čemu svaki od njih prima samo dvije različite vrijednosti. To je čest slučaj u ispitivanju rada laboratorijskih ili nekih drugih postrojenja kad su te dvije vrijednosti dvije razine na kojima pojedini uređaj radi, dva različita uređaja ili uključivanje odnosno isključivanje pojedinog uređaja, ali općenito, to mogu biti i dvije vrijednosti bilo

kojeg faktora npr. temperature, tlaka i sl. Ako se planira obaviti ispitivanja u svim kombinacijama vrijednosti svih faktora tada treba obaviti 2^k testova i takav plan se naziva **potpuni 2^k faktorski plan** (*full 2^k factorial design*). Na primjer, za tri faktora program *Statistica* će generirati plan prikazan u Tablici 1 u kojem su dvije vrijednosti svakog faktora označene s -1 i $+1$.

Tablica 1. Potpuni 2^3 plan eksperimenata

Table 1. Full 2^3 factorial design

STAT. EXPERIM. DESIGN	Design Summary 2^{3-0} design of resolution R = FULL (Factors are denoted by letters)		
Run	A	B	C
1	-1	-1	-1
2	+1	-1	-1
3	-1	+1	-1
4	+1	+1	-1
5	-1	-1	+1
6	+1	-1	+1
7	-1	+1	+1
8	+1	+1	+1

Važno je uočiti da, s obzirom da svaki od faktora prima samo dvije vrijednosti, analiza rezultata dobivenih na osnovi ovakvog plana uključuje pretpostavku o linearnoj ovisnosti zavisne varijable o faktorima u rasponu njihovih vrijednosti.

U primjeru kojim se ilustrira postupak planiranja eksperimenta i analiza rezultata nakon obavljenih testova, za zavisnu varijablu izabrana je apsorpcija vode, pored tlačne otpornosti (čvrstoće) osnovni pokazatelj kakvoće briketa. Kao nezavisne varijable, dakle faktori koji utječu na apsorpciju vode promatrani su: pritisak, sadržaj vlage, temperatura, i grano-sastav ugljena. Izabrane su po dvije vrijednosti za svaki od faktora i provedeno je 16 mjerenja apsorpcije vode prema potpunom 2^4 faktorskom planu.

Dobiveni rezultati analiziraju se s ciljem da se utvrdi koji od pojedinačnih faktora i koja od međudjelovanja za svaka dva faktora imaju značajan utjecaj na zavisnu varijablu. Metoda koja se u tu svrhu koristi je metoda analize varijance (kraće se naziva ANOVA prema engleskom *Analysis of Variance*) koja se kao standardna metoda detaljno opisuje u gotovo svakom statističkom udžbeniku (Pauše, 1993, Snedecor & Cochran, 1968). Suština te metode je da se razlaganjem ukupne varijance zavisne varijable ispita da li postoji razlika u aritmetičkim sredinama između pojedinih grupa unutar podataka. U ovom slučaju ukupna varijanca zavisne varijable prikazuje se kao zbroj varijanci od kojih je svaka rezultat promjene pojedinog faktora. Ostatak varijance (*residual*) naziva se varijanca greške i smatra se rezultatom slučajnosti. Moguće je iz varijance greške izdvojiti i varijance koje su posljedica međudjelovanja nekoliko faktora. Zatim se provodi F-test za svaki od faktora i njihovih međudjelovanja s osnovnom hipotezom

da je varijanca koja je posljedica promjene tog faktora odnosno međudjelovanja jednaka varijanci greške, dakle da je i ona rezultat slučajnosti. Prihvaćanje te osnovne hipoteze znači da određeni faktor ili međudjelovanje nema značajan utjecaj na zavisnu varijablu.

Rezultati analize varijance za apsorpciju vode dani su u prikazu koji je uobičajen za tu metodu u Tablici 2. U glavi tablice navodi se o kojoj analizi podataka se radi (ANOVA za glavne faktore i dvosmjerna međudjelovanja), koji je plan analiziran, naziv zavisne varijable, te vrijednost aritmetičke sredine (Mean) i standardne devijacije (Sigma) zavisne varijable.

Stupac pod nazivom SS (*Sum of Squares*) sadrži dio varijance koja je rezultat određenog faktora ili međudjelovanja navedenih u prvom stupcu. Treći i četvrti stupac su veličine potrebne za izračunavanje veličine test vrijednosti F koja je navedena u petom stupcu. Posljednji stupac p sadrži vrijednost praga značajnosti (*p-level*) provedenog testa koji ustvari predstavlja vjerojatnost pogrešnog odbacivanja istinite osnovne hipoteze. Dakle, što je p veći, veća je vjerojatnost da je pogrešno odbaciti osnovnu hipotezu, odnosno prihvaćanje osnovne hipoteze je pouzdanije. U tom smislu je uobičajeno da se za $p > 0.05$ osnovna hipoteza prihvaća, a inače odbacuje.

Prema p-vrijednostima iz Tablice 2 osnovnu hipotezu da faktor nema značajnog utjecaja na apsorpciju vode

treba odbaciti u slučaju temperature i sadržaja vlage. Prema tome može se zaključiti da temperatura i sadržaj vlage imaju značajan utjecaj na apsorpciju vode dok za ostala dva faktora i međudjelovanja između faktora prihvaćamo hipotezu da nemaju značajan utjecaj na apsorpciju vode.

Tablica 3 je također rezultat analize varijance, ali samo za glavne faktore, što znači da je dio varijance koji je rezultat međudjelovanja faktora pribrojen varijanci greške. Vidi se da s još manjom vjerojatnosti pogreške možemo smatrati da su temperatura i vlaga značajni faktori, ali i da uz vjerojatnost pogreške od svega 8% možemo prihvatiti da i grano-sastav ugljena utječe na apsorpciju vode.

Sastavni dio analize rezultata punog 2^k plana je i proračun procjene veličine utjecaja koji pojedini faktor ili međudjelovanje dvaju faktora ima na zavisnu varijablu. Ta procjena za pojedini faktor predstavlja razliku aritmetičke sredine vrijednosti koje prima zavisna varijabla kad je faktor na gornjoj odnosno na donjoj razini. Može se dakle reći da procjena daje očekivanu promjenu zavisne varijable kad faktor promijeni vrijednost s gornje na donju razinu. Procjena veličine utjecaja međudjelovanja dvaju faktora je srednja promjena zavisne varijable pod utjecajem jednog faktora s obzirom na dvije vrijednosti drugog (StatSoft, 1995).

Tablica 2. Analiza varijance za potpuni plan

Table 2. Analysis of variance for the full 2^4 design

STAT. EXPERIM. DESIGN	ANOVA for main effects and two-way interactions 2**(4-0) design of resolution R = FULL APSORPCI; Mean = 42.0687 Sigma = 20.38888				
Effect	SS	df	MS	F	p
1:PRITISAK	86.026	1	86.026	.67756	.447895
2:VLAGA	3803.806	1	3803.806	29.95957	.002773
3:TEMP.	1251.391	1	1251.391	9.85621	.025682
4:GRANO-S.	263.251	1	263.251	2.07342	.209430
12	117.181	1	117.181	.92294	.380826
13	8.851	1	8.851	.06971	.802297
23	3.706	1	3.706	.02919	.871048
14	15.406	1	15.406	.12134	.741775
24	.391	1	.391	.00308	.957914
34	50.766	1	50.766	.39984	.554954
Residual	634.823	5	126.965		

Tablica 3. Analiza varijance za glavne faktore

Table 3. Analysis of variance for main effects

STAT. EXPERIM. DESIGN	ANOVA for main effects; interactions are pooled in error 2**(4-0) design of resolution R = FULL APSORPCI; Mean = 42.0687 Sigma = 20.38888				
Effect	SS	df	MS	F	p
1:PRITISAK	86.026	1	86.026	1.13856	.308816
2:VLAGA	3803.806	1	3803.806	50.34383	.000020
3:TEMP.	1251.391	1	1251.391	16.56231	.001852
4:GRANO-S.	263.251	1	263.251	3.48415	.088823
Residual	831.122	11	75.557		

Iz Tablice 4, u kojoj su procjene veličine utjecaja za sve faktore i njihova višestruka međudjelovanja, vidi se da su procjene utjecaja temperature i vlage znatno veće od svih ostalih faktora i međudjelovanja, što je u skladu s prethodnom analizom. S obzirom da su obje te procjene negativne zaključuje se da porastom temperature i vlage apsorcija vode briketa opada.

Tablica 4. Procjena utjecaja faktora i međudjelovanja

Table 4. Estimates of the main effects and interactions

STAT. EXPERIMEN. DESIGN	2**(4-0) design of resolution R = FULL APSORPCI; Mean = 42.0687 Sigma = 20.38888
Effect	Effect Estimate
1:PRITISAK	-4.637500000000
2:VLAGA	-30.837500000000
3:TEMP.	-17.687500000000
4:GRANO-S.	-8.112500000000
12	-5.412500000000
13	1.487500000000
23	-.962500000000
14	1.962500000000
24	.312500000000
34	3.562500000000
123	3.912500000000
124	-.312500000000
134	-3.312500000000
234	6.787500000000
1234	-9.287500000000

Centralno složen plan

U 2^k faktorskom planu nezavisne varijable primaju samo po dvije različite vrijednosti pa analiza rezultata podrazumijeva linearnu ovisnost zavisne varijable o pojedinoj nezavisnoj varijabli. Takvu je pretpostavku

često teško unaprijed prihvatiti već je potrebno proširiti ispitivanja i na više različitih vrijednosti svakog od faktora da bi se tek nakon ispitivanja i analize rezultata zaključilo o «obliku» ovisnosti nezavisne varijable o faktorima. Općenito je cilj odrediti jednadžbu ovisnosti zavisne varijable o nezavisnim varijablama na osnovi rezultata obavljenih ispitivanja, dakle jednadžbu regresije. U slučaju dva faktora i pod pretpostavkom da ovisnost nije linearna u odnosu na faktore takva jednadžba predstavlja plohu u trodimenzionalnom prostoru. Nelinearna jednadžba ovisnosti može se odrediti i za više od dva faktora i tada je nije moguće predočiti u trodimenzionalnom prostoru, ali se može nazvati «plohom» u višedimenzionalnom prostoru. Metode i planovi eksperimenata koji omogućavaju određivanje krivolinijske jednadžbe ovisnosti zavisne varijable o nezavisnim nazivaju se u engleskom govornom području *response surface methodology* ili *response surface designs* (jer se nezavisna varijabla često naziva *response*).

Jednadžba i ispitivanje nelinearne ovisnosti zavisne varijable o faktorima može biti vrlo složeno ako se radi o ispitivanju u koje su uključena više od dva faktora. Radi toga se problem ograničava na određivanje jednadžbe drugog stupnja koja za k faktora glasi:

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i + \sum_{i=1}^k b_{ii} x_i^2 + \sum_{i=1}^k \sum_{j=i+1}^k b_{ij} x_i x_j \quad (1)$$

pri čemu je y zavisna varijabla označena y , a faktori $x_i, i = 1, 2, \dots, k$.

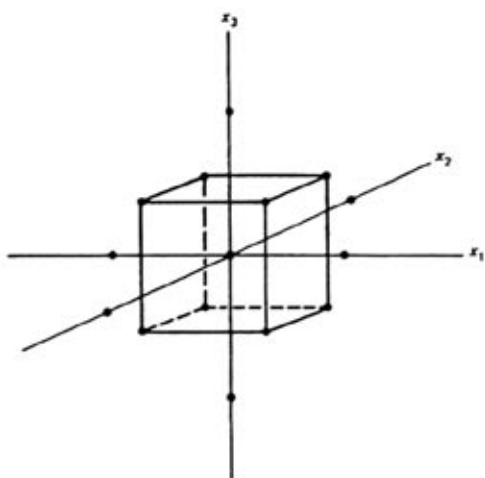
Prema tome model uključuje ispitivanje utjecaja glavnih faktora, njihovih kvadrata i međudjelovanja svaka dva faktora. Da bi se odredilo koeficijente u jednadžbi potrebno je imati određen broj mjerenja zavisne varijable sa nekoliko (svakako više od dvije) vrijednosti svakog od faktora. Standardna metoda nelinearne višestruke regresije omogućava određivanje koeficijenata u jednadžbi bez ikakvih pretpostavki o vrijednostima koje su imale pojedine nezavisne varijable

u svakom od testova. Međutim, s ciljem da se optimalnim izborom vrijednosti pojedinog faktora smanji broj testova a poveća pouzdanost zaključivanja izgrađeni su planovi eksperimenata za određivanje krivolinijske jednadžbe (1).

Najčešće primjenjen plan eksperimenata za određivanje jednadžbe regresije drugog stupnja je tzv. **centralno složen plan** (*central composite design*) koji se sastoji od potpunog 2^k plana kojem je dodan još određen broj ispitivanja u kojima svaki od faktora ima još neku vrijednost osim -1 i $+1$ i to u točno određenim kombinacijama vrijednosti.

Da bi se lakše objasnilo koje su to vrijednosti i njihove kombinacije ograničit ćemo se na tri faktora. Svaku kombinaciju vrijednosti faktora za izvođenje pojedinog ispitivanja može se shvatiti kao koordinate jedne točke u prostoru pa se zato vrijednosti faktora u pojedinom testu nazivaju točke plana. Može se uočiti da je svaka od točaka potpunog 2^3 plana iz Tablice 1 jedan vrh kocke kojoj je središte u ishodištu koordinatnog sustava. U centralno složen plan dodaje se određen broj tzv. centralnih točaka tj. točaka koje odgovaraju središtu kocke $(0,0,0)$ i po dvije centralno simetrične točke na svakoj koordinatnoj osi i to, za tri faktora, na udaljenosti 1,68 od ishodišta. Slika 1 (Montgomery, 1976) zorno prikazuje točke centralno složenog plana za tri faktora.

Općenito, centralno složen plan se sastoji od potpunog 2^k plana čije se točke nazivaju točke kocke kojem je dodan određen broj centralnih točaka i $2k$ tzv. aksijalnih točaka koje su po dvije na svakoj osi jednako udaljene od središta i one se nazivaju točke zvijezde. Udaljenost aksijalnih točaka od ishodišta i broj centralnih točaka ovisi o broju faktora. Tako sastavljen plan približno zadovoljava uvjete ortogonalnosti i rotabilnosti (Montgomery, 1976). Ne ulazeći u objašnjavanje tih pojmova može se reći da se ispunjavanjem tih uvjeta postiže nezavisnost informacija koje se mogu izvući iz provedenog plana, a time i pouzdanije zaključivanje.



Slika 1. Centralno složen plan za tri faktora

Figure 1. Central composite design for three factors

Da bi se generiralo centralno složen plan u programu *Statistica* potrebno je samo zadati broj faktora, pa se tako za $k=3$ dobije odgovarajući plan prikazan u Tablici 5.

Tablica 5. Centralno složen plan za tri faktora

Table 5. Central composite design for three factors

STAT. EXPERIM. DESIGN	Design Summary			
	2**(3-0) second order central composite design (Factors are denoted by letters)			
Run	Block	A	B	C
1	1	-1.00000	-1.00000	-1.00000
2	1	1.00000	-1.00000	-1.00000
3	1	-1.00000	1.00000	-1.00000
4	1	1.00000	1.00000	-1.00000
5	1	-1.00000	-1.00000	1.00000
6	1	1.00000	-1.00000	1.00000
7	1	-1.00000	1.00000	1.00000
8	1	1.00000	1.00000	1.00000
9	1	0.00000	0.00000	0.00000
10	1	0.00000	0.00000	0.00000
11	2	-1.68179	0.00000	0.00000
12	2	1.68179	0.00000	0.00000
13	2	0.00000	-1.68179	0.00000
14	2	0.00000	1.68179	0.00000
15	2	0.00000	0.00000	-1.68179
16	2	0.00000	0.00000	1.68179
17	2	0.00000	0.00000	0.00000

Iz Tablice 5 je očito da ovaj centralno složen plan s tri faktora zahtijeva obavljanje 17 testova. U drugom stupcu Tablice 5 nalazi se varijabla nazvana Block koja ima vrijednost 1 za osam točaka kocke i dvije centralne točke, a vrijednost 2 za četiri točke zvijezde i jednu centralnu točku. To je varijabla koja je sastavni dio nekih planova eksperimenata i naziva se faktor bloka (*blocking factor*) pri čemu naziv blok ima smisao skupine testova. Ona se uvodi u plan eksperimenta, kao prvo, u slučaju kada iz određenih tehničkih razloga nije moguće sve testove izvesti odjednom tj. pod sasvim istim uvjetima (npr. kad veličina aparature ne omogućava istovremeno ispitivanje svih uzoraka). Tada se eksperimenti izvode u skupinama tj. blokovima pa se svakoj skupini ispitivanja koja se provode u jednom bloku pridijeli po jedna vrijednost faktora bloka. U ovom slučaju, faktor bloka uveden je jer se želi ispitati da li postoji bitna razlika u varijanci (odnosno srednjoj vrijednosti) zavisne varijable između dviju skupina ispitivanja.

Vrijednosti za pojedine faktore koje su navedene u Tablici 5 predstavljaju kodirane tj. transformirane vrijednosti varijabli. Ako se stvarna i -ta vrijednosti i -tog faktora označi s x_{ij} , a pet kodiranih vrijednosti (jednakih za sve faktore) s k_j tada se stvarne vrijednosti mogu odrediti iz izraza

$$x_{ij}(k_j) = d_i k_j + x_{i0}, \quad i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, \dots, 5 \quad (2)$$

Centralna vrijednost x_{i0} (ona za koju je kodirana vrijednost jednaka nuli) i d_i mogu se za svaki faktor izabrati po volji. Ako se za provođenje ovog plana želi iskoristiti već proveden potpuni 2^3 plan tada je jasno da se središnja vrijednost x_{i0} svakog faktora odredi kao aritmetička sredina vrijednosti faktora na nižoj i višoj razini, a d_i je razlika vrijednosti na višoj razini i centralne vrijednosti tj.

$$x_{i0} = (x_i(-1) + x_i(1))/2 \quad i \quad d_i = x_i(1) - x_{i0} \quad (3)$$

Treba napomenuti da ima slučajeve kada nije moguće postići da stvarne vrijednosti svakog faktora budu upravo ovakva linearna transformacija kodiranih vrijednosti, npr. kad su vrijednosti nekog faktora posljedica podešenosti

aparature ili stroja. U tom slučaju treba nastojati izabrati vrijednosti koje što je moguće bolje podražavaju svojstva koja su navedena za kodirane vrijednosti.

Centralno sastavljen plan za četiri faktora koji će generirati *Statistica* ima 27 točaka. Prvu skupinu ispitivanja (vrijednost faktora bloka za te testove jednaka je jedinici) čini 16 točaka kocke i dvije centralne točke, a drugu (vrijednost faktora bloka jednaka je dva) čini osam točaka zvijezde i jedna centralna točka. Takav plan eksperimenata proveden je u istraživanju kvalitete briketa. U Tablici 6 prikazane su vrijednosti faktora (pritiska, sadržaja vlage, temperature i grano-sastava ugljena) u svakom testu i odgovarajući rezultat mjerenja apsorpcije vode briketa.

Tablica 6. Centralno složen plan – rezultati 27 mjerenja apsorpcije vode kao zavisne varijable

Table 6. Central composite design – results of 27 tests of water absorption as response

	1	2	3	4	5	6
	BLOK	PRITISAK	VLAGA	TEMP.	GRANO-S.	APSORPC
1	1	MPa 150	% 15	C 37	mm 2.5/0	65.0
2	1	MPa 170	% 15	C 37	mm 2.5/0	71.9
3	1	MPa 150	% 25	C 37	mm 2.5/0	59.9
4	1	MPa 170	% 25	C 37	mm 2.5/0	30.2
5	1	MPa 150	% 15	C 72	mm 2.5/0	59.9
6	1	MPa 170	% 15	C 72	mm 2.5/0	50.0
7	1	MPa 150	% 25	C 72	mm 2.5/0	12.9
8	1	MPa 170	% 25	C 72	mm 2.5/0	19.2
9	1	MPa 150	% 15	C 37	mm 6/0	63.5
10	1	MPa 170	% 15	C 37	mm 6/0	63.0
11	1	MPa 150	% 25	C 37	mm 6/0	27.5
12	1	MPa 170	% 25	C 37	mm 6/0	26.3
13	1	MPa 150	% 15	C 72	mm 6/0	40.0
14	1	MPa 170	% 15	C 72	mm 6/0	46.6
15	1	MPa 150	% 25	C 72	mm 6/0	26.4
16	1	MPa 170	% 25	C 72	mm 6/0	10.8
17	1	MPa 160	% 20	C 55	mm 4/0	37.0
18	1	MPa 160	% 20	C 55	mm 4/0	36.2
19	2	MPa 140	% 20	C 55	mm 4/0	32.2
20	2	MPa 180	% 20	C 55	mm 4/0	44.1
21	2	MPa 160	% 10	C 55	mm 4/0	25.1
22	2	MPa 160	% 30	C 55	mm 4/0	32.6
23	2	MPa 160	% 20	C 20	mm 4/0	43.0
24	2	MPa 160	% 20	C 90	mm 4/0	65.0
25	2	MPa 160	% 20	C 55	mm 0.5/0	35.2
26	2	MPa 160	% 20	C 55	mm 8/0	50.0
27	2	MPa 160	% 20	C 55	mm 4/0	37.4

Tablica 7. Analiza varijance centralno složenog plana za podatke iz Tablice 6

Table 7. Analysis of variance for central composite design for Data in Table 6

STAT. EXPERIM. DESIGN	Analysis of Variance; Variable: APSORPC 2**(4-0) second order central composite design Mean =41.1444 Sigma = 16.8824 Intercept = 36.8667				
	SS	df	MS	F	p
Cube vs. Star	5.415	1	5.415	.015675	.902626
(1)PRITISAK	7.370	1	7.370	.021335	.886513
(2)VLAGA	2236.871	1	2236.871	6.474968	.027256
(3)TEMP.	396.094	1	396.094	1.146555	.307204
(4)GRANO-S.	51.920	1	51.920	.150292	.705653
PRITISAK**2	5.672	1	5.672	.016418	.900356
VLAGA**2	69.842	1	69.842	.202168	.661707
TEMP.**2	427.810	1	427.810	1.238363	.289514
GRANO-S.**2	56.550	1	56.550	.163693	.693535
1 by 2	117.181	1	117.181	.339197	.572037
1 by 3	8.851	1	8.851	.025619	.875734
1 by 4	15.406	1	15.406	.044594	.836614
2 by 3	3.706	1	3.706	.010727	.919376
2 by 4	.391	1	.391	.001131	.973778
3 by 4	50.766	1	50.766	.146949	.708773
Residual	3800.107	11	345.464		

Tablica 8. Koeficijenti u jednadžbi regresije drugog stupnja za apsorpciju vode u ovisnosti o sadržaju vlage i temperaturi

Table 8. Second-order regression coefficients for water absorption depending on humidity and temperature

STAT. EXPERIM. DESIGN	Parameter Estimates; Variable: ABSORPC 2**(2-0) second order central composite design Mean =41.1444 Sigma = 16.8824 Intercept = 39.8517					
	B-weight	Std.Err. of B	Beta	St. Err of BETA	t(20)	p-level
C vs. S	-.19000	1.170265	-.027032	.166498	-.16236	.872654
VLAGA	-9.65417	2.925662	-.549415	.166498	-3.29982	.003578
TEMP.	-4.06250	2.925662	-.231195	.166498	-1.38857	.180234
1**2	-2.34531	2.832760	-.140691	.169932	-.82792	.417483
2**2	3.94219	2.832760	.236484	.169932	1.39164	.179317
1 by 2	-.48125	3.583190	-.022362	.166498	-.13431	.894502

Analizom varijance ovih mjerenja, kao i kod potpunog 2^k plana, utvrđuje se koji od faktora, njihovih kvadrata i međudjelovanja po dva faktora imaju značajan utjecaj na zavisnu varijablu. Kao što se vidi iz Tablice 7 u ovom slučaju kao utjecajan faktor može se izdvojiti samo sadržaj vlage briketa. U retku tablice u kojem se kao faktor navodi Cube vs.Star navedeni su podaci koji su potrebni za testiranje utjecaja «umjetne» varijable Block. Drugim rječima testira se hipoteza da između dviju navedenih skupina rezultata ne postoji razlika srednjih vrijednosti. Iz tablice je vidljivo da je ta hipoteza s velikom pouzdanošću prihvatljiva.

Nadalje, program *Statistica* izračunava i sve koeficijente u jednadžbi krivolinijske regresije drugog

stupnja. Međutim, s obzirom na opsežnost te jednadžbe kao ilustracija data je Tablica 8 u kojoj su navedeni koeficijenti u jednadžbi regresije za samo dva faktora, temperaturu i sadržaj vlage.

Koeficijenti u jednadžbi drugog stupnja za navedene faktore nalaze se u stupcu B-weight, a slobodni član (b₀) naveden je u glavi tablice pod imenom Intercept tako da jednadžba regresije za apsorpciju (y) ovisno o sadržaju vlage (k₁) i temperaturi (k₂) glasi:

$$y=39.9-9.65k_1-4.06k_2-2.35k_1^2+3.94k_2^2-0.48k_1k_2 \quad (4)$$

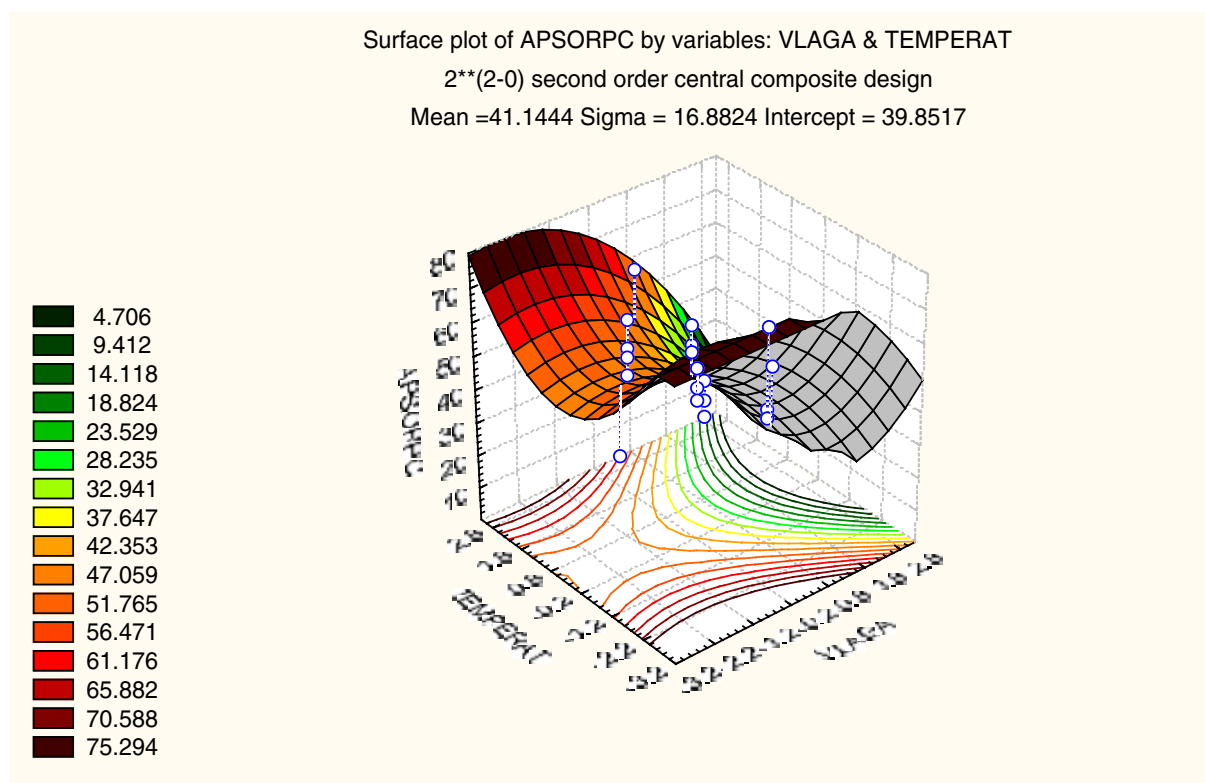
Ova jednadžba vrijedi za kodirane vrijednosti faktora, a jednadžba za stvarne vrijednosti faktora

može se dobiti uvrštavanjem transformacija za svaki od faktora tj. $k_i = (x_i - x_{i0})/d_i$, $i = 1, 2$. U jednadžbu regresije ne uvodi se «umjetna» varijabla bloka iako je i njezin koeficijent naveden u prvom retku drugog stupca. Razlog za to je što se jednadžba u prvom redu koristi za predviđanje vrijednosti zavisne varijable o stvarnim faktorima, a također se vidjelo da ta varijabla ima zanemariv utjecaj.

Detaljno objašnjenje ostalih vrijednosti u Tablici 8 prelazi okvire ovakvog prikaza i može se naći u elektroničkom priručniku programa *Statistica* i statističkoj literaturi u području metoda višestruke regresije odnosno korelacije (Snedecor & Cochran, 1968). Ukratko, u stupcu Beta navedeni su parcijalni koeficijenti korelacije pojedinog člana iz stupca Effect čija veličina govori o ovisnosti zavisne varijable o pojedinom članu uz pretpostavku da su svi ostali članovi nezavisni i konstantni. Tako se može uočiti da je taj koeficijent najveći za sadržaj vlage što potvrđuje da sadržaj vlage ima najveći utjecaj na apsorpciju vode, a njegov negativan predznak ukazuje na to da porastom sadržaja vlage apsorpcija vode opada. Uz

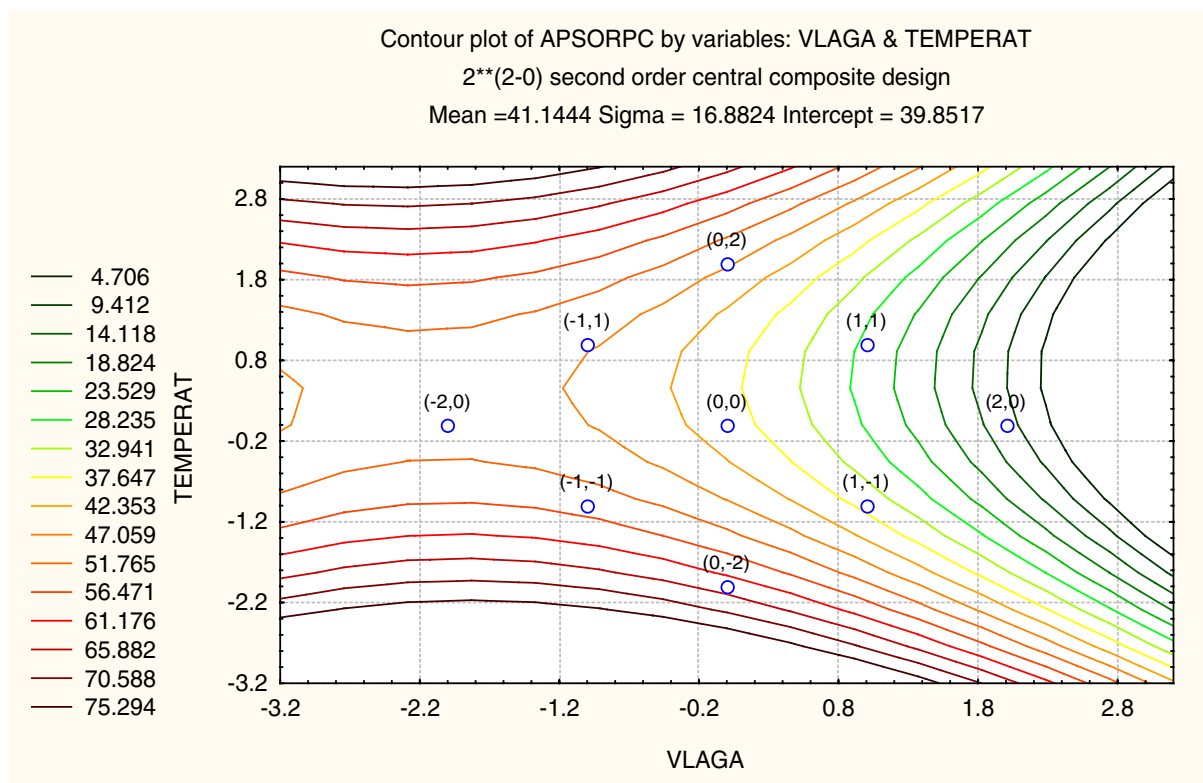
postupak određivanja koeficijenata u jednadžbi višestruke regresije provodi se i t-test kojim se testira osnovna hipoteza da je pojedini koeficijent (ili odgovarajući koeficijent parcijalne korelacije) u jednadžbi jednak nuli, tj. da nema značajan utjecaj na zavisnu varijablu. Vrijednosti u stupcima Standard Error of B (odnosno Beta) su potrebne za izračunavanje test vrijednosti t koja je navedena u stupcu t(20) pri čemu broj 20 označava tzv. stupanj slobode koji je parametar T-razdiobe o kojem ovise vrijednosti te varijable. U stupcu p-level navedene su vjerojatnosti koje imaju isti smisao kao i u slučaju provođenja F-testa što je već objašnjeno. Vrijednosti p iz Tablice 8 potvrđuju da je jedini značajan koeficijent onaj uz faktor sadržaj vlage, ali se uz ne veliku vjerojatnost pogreške može u jednadžbu uključiti i temperatura i njezin kvadrat.

Program *Statistica* daje i trodimenzionalni prikaz regresijske plohe određene jednadžbom (4), a također i prikaz njenih nivo linija u ravnini. Za podatke iz primjera to su Slika 2 i Slika 3.



Slika 2. Regresijska ploha za apsorpciju u ovisnosti o sadržaju vlage i temperaturi

Figure 2. Surface plot of water absorption depending on humidity and temperature



Slika 3. Nivo linije regresijske plohe za apsorpciju vode u ovisnosti o sadržaju vlage i temperaturi

Figure 3. Contour plot of water absorption depending on humidity and temperature

Naravno da su i u tim grafovima na koordinatnim osima svakog od faktora navedene kodirane vrijednosti. Slika 2 prikazuje sedlastu plohu i zorno prikazuje ovisnost apsorpcije o sadržaju vlage i temperaturi i zajedno sa Slikom 3 omogućava zaključak da je apsorpcija vode najmanja pri kodiranoj vrijednosti temperature od 0.5 što odgovara stvarnoj vrijednosti od približno 64°C. Pri toj temperaturi i sadržaju vlage između 5% i 14% (kodirane vrijednosti -3 do -1.2) apsorpcija vode je približno konstantna i iznosi oko 42, a povećanjem sadržaja vlage iznad 14% još opada.

U slučaju više od dva faktora može se također dobiti prikaz odgovarajuće plohe i njezinih nivo linija za izabrana bilo koja dva faktora.

Zaključne napomene

Potpuni 2^k plan eksperimenata koji je u prikazu opisan, zahtijeva veliki broj ispitivanja ako je broj faktora velik, iako svaki od faktora prima tek dvije različite vrijednosti. Na primjer, za 6 faktora treba obaviti 64, a za 10 čak 1024 testova, odnosno ispitivanja. Svako ispitivanje zahtijeva podešavanje uređaja ili neki drugi način «postavljanja» vrijednosti svakog faktora pa provođenje takvog plana može biti dugotrajno i skupo, čak i neizvedivo. Radi toga se za veliki broj faktora upotrebljava tzv. djelomični

faktorski plan (fractional factorial design) kod kojeg je broj potrebnih ispitivanja znatno smanjen. To naravno utječe na količinu informacija koje se mogu izvući iz provedenih testova. Ne ulazeći u objašnjavanje djelomičnog plana može se reći da se u tom planu zanemaruju određena međudjelovanja, odnosno zamjenjuje ih se određenim brojem glavnih faktora. Za djelomični plan kaže se da nema potpuno rješenje (*resolution*), nego je ono određenog stupnja. Tako, na primjer, djelomični plan za 11 faktora sa stupnjem rješenja 3 zahtijeva obavljanje svega 16 ispitivanja.

Povećanjem broja vrijednosti pojedinog faktora naravno raste i broj potrebnih testova. Na primjer, ispitivanje četiri faktora od kojih svaki prima pet različitih vrijednosti zahtijeva za potpuni plan tj. ispitivanje koje obuhvaća sve kombinacije vrijednosti faktora obavljanje $5^4=625$ testova. U primjeru ispitivanja utjecaja četiri faktora na apsorpciju vode briketa vidjelo se da u centralno složenom planu svaki od faktora prima pet različitih vrijednosti, a plan zahtijeva svega 27 mjerenja.

Osim prikazanih planova i spomenutog djelomičnog faktorskog plana postoje još neki planovi: slučajni blok plan, latinski kvadrat, grčko-latinski kvadrat, hijerarhijski ili «ugnježdeni» (*nested*) plan itd. Opis, način primjene i analiza tih planova može se osim u statističkoj literaturi naći i u paketima gotovih statističkih programa.

Ovim radom želi se obratiti pozornost na važnost planiranja eksperimenata općenito, a naročito ako je potrebno ispitati utjecaj većeg broja faktora na neku zavisnu varijablu. Prikazani planovi pokazuju da je moguće smanjiti broj potrebnih testova, a da rezultati ipak omogućе donošenje pouzdanih zaključaka. Naravno da se smanjivanjem broja testova u odnosu na potpuni plan gubi dio informacija. Međutim, važno je izabrati vrijednosti faktora i njihove kombinacije tako da se zadovolji određene teorijske zahtjeve koji su pretpostavka za provođenje analize i donošenje valjanih zaključaka. To je suština svakog plana eksperimenta.

Primljeno: 11.7.2004.

Prihvaćeno: 3.9.2004.

Literatura

- Crosier, R.D. (1992): Flotation, Theory, reagents and ore testing Pergamon Press,342p, New York.
- Montgomery, D.C. (1976): Design and Analysis of Experiments. John Willey and Sons,418 p, New York
- Pauše, Ž. (1993): Uvod u matematičku statistiku. Školska knjiga, 405 str,Zagreb
- Rao, V.G. and Mohanty, M. (2002): Optimization of flotation parameters for enhancement of grade and recovery of phosphate from low-grade dolomitic rock phosphate ore from Jhamarkotra,India. Minerals & Metallurgical Processing, Vol.19.No 3,154-160,Littleton
- Salopek, B.,Pfaff, S. and Rajić, R. (2003): Statistical Experimental Design Approach in Coal Briquetting.12th International Symposium on Mine Planning and Equipment Selection,p.4, Kalgoorlie
- Sheridan, M.S., Nagaraj, D.R., Fornasiero, D. and Ralston, J. (2002): The use of a factorial experimental design to study collector properties of N-allyl-O-alkyl thionocarbonate collector in the flotation of a copper ore. Minerals Engineering,15,333-340
- Snedecor, G.W.,Cochran, W.G. (1968): Statistical Methods. The Iowa State University Press,593p,Ames Iowa
- StatSoft® (1995): Statistica for Windows. Statistica Electronic Manual, Statsoft Inc.,Tulsa