UDK 305:510.8

Pregledni članak
Primljeno: 2. rujna 2002.
Prihvaćeno: 7. listopada 2002.

Analiza nelinearne dinamike i neke od metoda otkrivanja kaosa u determinističkim socijalnim sustavima

Aleksandar Halmi
Anita Laslavić
Pravni fakultet – Studijski centar socijalnog rada, Sveučilište u Zagrebu

Sažetak

U suvremenom prirodno–znanstvenom diskursu, posebno matematičkom i fizikalnom, jednom od najinteresantnijih tema postala je »Teorija kaosa«. No, ta tema ne pokazuje se samo interesantnom, već i vrlo značajnom u kontekstu teoretskih diskusija današnjice. Ona se s područja fizike i matematike sve više disperzira na različita područja aplikativnih društvenih znanosti, pa tako postaje jednom od najprepoznatljivijih faceta interdisciplinarnog dijaloga na početku novog milenija. Teorija kaosa, na neki način, postaje novom znanošću koja postulira neke »nove zakonitosti«, a to opet postaje predmetom najrazličitijih promišljanja sa stajališta kako »prirodnih« tako i tzv. »društveno–humanističkih znanosti«. Teorijom se kaosa sada bave mnoge teoretske discipline te provenijencije: filozofija, teologija, sociologija, politologija, ekonomija, medicina, teorija medija i novih tehnologija, književna teorija i teorija umjetnosti te socijalni rad kao aplikativna društvena znanost.Teorija kaosa postaje tako svojevrsnom paradigmom u promišljanju suvremenosti, kao i civilizacijske razuđenosti, otjelotvorene u multikulturalnom svijetu današnjice. U mnoštvu različitih diskursa, odnosno jezičnih igara poststrukturalizma i postmodernizma, s kojima smo suočeni u epohi raspada tradicionalnog poimanja svijeta kao racionalno uređenog »kozmičkog« prostora i teoretski jezik filozofije pokazuje se jednako primjerenim za promišljanje teorije kaosa.

Ključne riječi: *deterministički kaos, nelinearna dinamika, disipativni sustavi, kompleksni brojevi, teorija bifurkacije*

1. UVOD

Deterministički, kauzalni poredak, kao znanstvena paradigma, koja je zadnja dva stoljeća u zapadnom mišljenju bila vladajuća, isključivo je temeljno pitanje filozofije – pitanje smisla događanja u svijetu. Nobelovac Wolfgang Pauli (1989) u djelu **Utjecaj arhetipskih ideja na Keplerove znanstvene teorije**, smatra da prirodna znanost, zasnovana isključivo na ideji kauzaliteta nema svoje budućnosti. Potreban je jedan sasvim novi horizont, nova znanstvena paradigma – horizont cjeline svijeta kao unaprijed zadani savršeni poredak, zasnovan ne samo na kauzalnosti i determinizmu već i na akauzalnim, nelinearnim vezama, odnosno dijakroniji (Čoh, 2000). Inspirirani Leibnizovom monadologijom, W. Pauli i C. G. Jung će reći da se stvari unutar poretka cjeline ne događaju samo tako da jedna drugu uzročno–posljedično određuju, već se one događaju i onako kako se vole događati. Uz stalne veze putem uzročnosti, oni govore i o »nestalnim vezama koje se dešavaju putem slučajnosti, istoznačnosti ili smisla«.

Danas vladajuća znanstvena paradigma jest **teorija determinističkog kaosa**. Njezin su interes one pojave u prirodi i društvu koje su kaotične, koje uzmiču kauzalitetu. Ona u njima otkriva jednu dublju zakonitost, odnosno smisao. U onom slučajnom, dakle nasumičnom, ona vidi prikriveni poredak u obliku latentnih, međusobno povezanih struktura koje imaju daleko dublje značenje od, na prvi pogled vidljivih, manifestnih dimenzija ili »varijabli«. Cilj ovòg članka je pokušaj prevladavanja determinističke slike svijeta koja nije bila u mogućnosti uključiti holističku perspektivu odnosno horizont razumijevanja njegova smisla. Osim toga, cilj nam je također zadržati se na jednom paradoksu da je smisleni poredak svijeta moguć samo ako je unutar njega prisutno ono **kaotično i slučajno**, ali istodobno i mjerljivo. Stoga se u drugom dijelu izlažu neke specifične metode kvantificiranja kaosa obuhvaćene matematikom kompleksnih brojeva. Drugim riječima, želi se dokazati da se kaotično ponašanje sustava može mjeriti, a samim time i kontrolirati. No, prije svakog daljnjeg razmatranja problematike determinističkog kaosa, potrebno je definirati neke temeljne pojmove.

2. POIMANJE KAOSA I NELINEARNE DINAMIKE

Možemo reći da danas ne postoji jedinstvena i sustavna definicija pojma kaosa. U svojoj poznatoj studiji James Gleick (1993) navodi nekoliko autora koji su pokušali definirati ovaj fenomen iz različitih disciplinarnih područja. Philip Holmes govori o *»složenim, aperiodičkim, atraktornim putanjama, obično niskodimenzijskih, dinamičkih sustava«*. Hao Bai–Lin navodi da se radi o *»vrstama reda bez periodičnosti«*. Bruce Stewart govori o *»prividno nasumičnom ponašanju jednostavnog determinističlog (mehaničkog) sustava«*. Roderick V. Jensen navodi postojanje *»nelinearnog, nepravilnog, neprekidnog ponašanja determinističkih, nelinearnih dinamičkih sustava«*. James Cruchfield govori o *»dinamici s pozitivnom, ali konačnom metričkom entropijom ili ponašanje koje stvara informaciju ali nije posve nepredvidivo«*.

Međutim, ključni element za razumijevanje opisanih fenomena je pojam **nelinearnosti**, a disciplina koja se bavi proučavanjem nelinearnog ponašanja naziva se **nelinearna dinamika**. Ova specifična disciplina istražuje dinamičko ponašanje **nelinearnih sustava**. Prema Hilbornu (1994) nelinearni su sustavi takvi sustavi čije su vremenske evolucijske jednadžbe – nelinearne, što znači da se dinamičke varijable koje opisuju obilježja takvog sustava (položaj, ubrzanje širenje i sl.) pojavljuju u jednadžbama koje imaju nelinearni oblik. Kaos je, dakle, naziv za posebnu vrstu složenog ponašanja dinamičkog sustava koji je opisan nelinearnim jednadžbama. Kaotično ponašanje sustava je aperiodično u vremenu (nikada se ne ponavlja), a čini se kao šum koji nastaje pod nasumičnim utjecajem okoline. Neke iznenadne promjene u nelinearnim dinamičkim sustavima mogu prerasti u takozvani deterministički kaos, gdje se naziv **deterministički** odnosi na sustav koji je određen kauzalnim vezama, odnosno za takav dinamički sustav postoje determinističke jednadžbe. Da bismo mogli jednoznačno odrediti sadašnje stanje sustava iz poznavanja prošlih stanja, potrebno je poznavanje evolucijskih diferencijanih jednadžbi i parametara koji opisuju sustav. U zadnja tri desetljeća razvio se novi skup koncepata i tehnika za rad s tom enormnom složenošću kao koherentni matematički okvir. Međutim, nema jasnog naziva za tu novu disciplinu. Popularno se naziva »matematika kompleksnih brojeva«, a stručno »dinamička teorija sustava«, »sustavna dinamika«, »kompleksna dinamika« ili »nelinearna dinamika«. Najčešće se koristi pojam **znanost o nelinearnoj dinamici**.

3. MATEMATIČKI TEMELJI NELINEARNE DINAMIKE

Da bi se izbjegla konfuzija, valja imati na umu da nelinearna dinamička teorija sustava nije teorija fizikalnih pojava, nego matematička teorija čije su komponente i tehnike primjenjive na širok skup pojava. Isto vrijedi i za teoriju kaosa i teoriju fraktala, važne grane dinamičke sustavne teorije. Nova je matematika, kako tvrdi Fritjof Capra (Capra, 1996), matematika odnosa i obrazaca. Ona je više kvalitativna no kvantitativna i utjelovljuje pomak fokusa koji je karakterističan za sustavno mišljenje – od objekta prema odnosu, od kvantitete ka kvaliteti, od tvari ka obrascu. Razvoj vrlo brzih računala imao je presudnu ulogu u novom ovladavanju kompleksnošću. Uz pomoć tih računala znanstvenici sad mogu riješiti složene, ranije nerješive jednadžbe i grafički prikazati rješenja krivuljama. Tako su otkrili nove kvalitativne obrasce ponašanja kompleksnih sustava, novu razinu reda koji postoji u prividnom kaosu. No, temeljno pitanje koje se logički nameće kaosolozima jest: može li se kaos mjeriti? Postoje li pouzdani kvantifikatori za mjerenje kaosa?

Odgovor na ova pitanja zahtijeva opširniju raspravu koja seže u povijest matematike. Naime, da bi se ispravno vrednovala inovativnost »nove matematike«, dobro je usporediti ju s matematikom klasične znanosti. Znanost u modernom smislu riječi počela je krajem XVI. stoljeća s Galileom Galileijem, koji je prvi radio sustavne eksperimente i upotrebljavao matematički jezik da bi formulirao prirodne zakone. U to se doba znanost još uvijek zvala »prirodnom filozofijom«, pa je Galilei pod »matematikom« mislio na geometriju. Taj nazor Galilei duguje filozofima antičke Grčke, koji su težili geometrizaciji svih matematičkih problema i u njihovom rješavanju posezali za geometrijskim likovima. Nakon nekoliko stoljeća islamski filozofi u Perziji, koji su to naučili od indijskih matematičara, razvili su algebru – potpuno različit pristup u rješavanju matematičkih problema. Riječ je nastala od arapske riječi *aljabr* (»spajati zajedno«) i odnosi se na proces smanjivanja broja nepoznatih veličina međusobno ih povezujući u jednadžbama. Elementarna algebra uljučuje jednadžbe u kojima slova zamjenjuju različite konstantne brojeve. U Galileijevo doba postojala su, dakle, dva različita pristupa rješavanju matematičkih problema, geometrija i algebra, koja su došla iz različitih kultura. Ujedinio ih je Rene Descartes. Metoda, danas poznata kao analitička geometrija, uključuje kartezijanske koordinate – koordinatni sustav koji je izmislio Descartes i koji je po njemu dobio ime. S novom Descartesovom metodom, zakoni mehanike koje je otkrio Galilei mogu se izraziti ili u algebarskom obliku kao jednadžbe ili u geometrijskom obliku kao vizualni oblici. Međutim, glavni matematički problem, koji nisu mogli riješiti ni Descartes ni Galilei bio je – kako prikazati jednadžbu koja opisuje gibanje tijela neujednačene brzine koje se ubrzava ili usporava. To je stoljeće kasnije uspio Isaac Newton, a negdje u isto vrijeme i njemački matematičar i filozof Gottfried Wilhelm Leibnitz. Da bi riješili taj problem koji je mučio matematičare i prirodne filozofe stoljećima, Newton i Leibniz su neovisno jedan o drugome stvorili novu matematičku metodu poznatu kao **diferencijalni račun** koja se smatra vratima u »višu matematiku«. Jednadžbe koje uključuju »diferencijale« zovu se diferencijalne jednadžbe. Za znanost je izum diferencijalnog računa bio golem korak. Prvi put u povijesti čovječanstva koncept beskonačnog dobio je točnu matematičku definiciju što je otvorilo bezbrojne mogućnosti analize prirodnih pojava. U osamnaestom i devetnaestom stoljeću neki od najvećih umova u povijesti matematike oblikovali su Newtonove jednadžbe gibanja u općenitije, apstraktnije i elegantnije oblike. Reformulacije koje su učinili Pierre Laplace i William Hamilton nisu izmijenile sadržaj Newtonovih jednadžbi, nego su povećanjem sofisticiranosti mogle analizirati širi opseg prirodnih pojava. Tako su Newtonove diferencijalne jednadžbe postale matematički temelj mehanicističke paradigme. Newtonov svjetski ustroj bio je potpuno kauzalan i determinističan. Sve što se događa ima jasan uzrok i posljedicu, a budućnost bilo kojeg sustava može se predvidjeti apsolutnom točnošću. U praksi su, naravno, ubrzo postala vidljiva ograničenja opisivanja prirode pomoću Newtonovih jednadžbi. Točna rješenja bila su ograničena na nekoliko jednostavnih i uobičajenih pojava, dok su široka područja prirode izbjegavala bilo kakav mehanicistički model. Ograničenja determinističkih modela riješio je James Clerk Maxwell uvodeći uporabu statističkih metoda i teorije vjerojatnosti u područje klasične mehanike. Kombinacija statističkih metoda i Newtonove mehanike rezultirala je novom znanstvenom granom, nazvanom »statistička mehanika«, koja je postala teoretskim temeljem termodinamike (teorije topline).

Na taj način, krajem devetnaestog stoljeća, znanstvenici su razvili različita matematička sredstva za opisivanje prirodnih pojava – egzaktne determinističke jednadžbe gibanja za jednostavne sustave i jednadžbe termodinamike, temeljene na statističkim analizama srednjih vrijednosti za složene sustave. Iako su te dvije tehnike bile različite, one su u osnovi koristile iste linearne jednadžbe. Presudna promjena u posljednja tri desetljeća bila je spoznaja duboke nelinearnosti prirodnih i društvenih procesa. Istraživanje nelinearnih sustava u zadnjim desetljećima duboko je utjecalo na znanost kao cjelinu, i prisililo nas je da reformuliramo neka osnovna stajališta o odnosima između matematičkih veličina. Jedan od tih stavova tiče se našeg poimanja jednostavnosti i složenosti. U svijetu linearnih jednadžbi mislili smo da se sustavi opisani jednostavnim jednadžbama ponašaju jednostavno, dok se oni opisani složenim jednadžbama ponašaju složeno. U nelinearnom svijetu, jednostavne determinističke jednadžbe mogu proizvesti neočekivano bogatstvo i raznolikost ponašanja. S druge strane, složeno i naizgled kaotično ponašanje može stvoriti uređene strukture, suptilne i prekrasne obrasce. U stvari, u teoriji kaosa, pojam »kaos« dobio je novo tehničko značenje. Ponašanje kaotičnog sustava nije slučajno nego pokazuje dublju razinu reda uobličenog obrascima. Kao što ćemo kasnije vidjeti, nove matematičke tehnike omogućavaju prikazivanje tih obrazaca.

Druga bitna karakteristika nelinearnih jednadžbi koja je uznemiravala znanstvenike je spoznaja da je često nemoguće točno predviđanje, iako su jednadžbe striktno determinističke. Ova istaknuta osobina nelinearnosti donijela je značajan pomak fokusa s kvantitativne ka kvalitativnoj analizi.

Treća bitna značajka nelinearnih sustava uzrokovana je čestim samopojačavajućim *feedback* procesima. U linearnim sustavima male promjene proizvode male posljedice, a veliki efekti nastaju zbog velikih promjena. U nelinearnim sustavima male promjene imaju dramatične efekte jer se mogu pojačavati *feedbackom*. Takvi nelinearni *feedback* procesi osnova su nestabilnosti i iznenadnih pojava novih oblika reda karakterističnih za samoorganizaciju. Matematički *feedback* luk odgovara posebnoj vrsti nelinearnih procesa poznatih kao iteracije, u kojem funkcija ponavlja izračunavanje same sebe. Ta funkcija naziva se »iterativna funkcija« ili »populacijska (logistička) jednadžba«.

Iako je znanost o nelinearnoj dinamici (tzv. »nova matematika«) koja je omogućila dovođenje reda u kaos razvijena nedavno, temelje joj je na prijelazu stoljeća postavio jedan od najvećih suvremenih matematičara, Jules Henri Poincare. Ono što je bio najveći Poincareov doprinos je uvođenje nove geometrije koja se naziva topologija ili geometrija u kojoj se voljno mogu iskriviti duljine, kutovi i područja. Suvremene matematičke tehnike koje su omogućile istraživačima otkriće fenomena kaosa utemeljene su na Poincareovu topološkom pristupu. Poincare je koristio topološke koncepte u analizi kvalitativnih obilježja složenih dinamičkih problema i tako postavio temelje matematike komplesnih brojeva koja će se razviti stoljeće kasnije. Pokazavši da jednostavne determinističke jednadžbe kretanja mogu proizvesti nevjerojatnu složenost koja onemogućuje sve pokušaje predviđanja, Poincare je poljuljao sam temelj Newtonove klasične mehanike. Međutim, znanstvenici na prijelazu stoljeća nisu prihvatili taj izazov jer su u fokus znanstvenih interesa došle nove paradigme vezane uz kvantnu fiziku i teoriju relativnosti. Tek 1960–ih znanstvenici su ponovo ušli u složenost kaosa.

Ključno pitanje koje se sada postavlja jest: Može li se znanost o nelinearnoj dinamici i teorija kaosa primijeniti na područje društvenih znanosti? Odgovor je svakako pozitivan jer teorija kaosa omogućuje istraživanje i razumijevanje socijalnih fenomena koji se upravljaju po nelinearnoj dinamici. Do primjene teorije kaosa na područje društvenih znanosti nije došlo slučajno jer su fenomeni nelinearnosti, nestabilnosti i neizvjesnosti prisutni u gotovo svim realnim socijalnim sustavima. Po Stewartu, priroda je »nemilosrdno nelinearna«, a Forester je zapisao da »živimo u visokonelinearnom svijetu«. Društvena je stvarnost doista nelinearna i njoj su imanentni fenomeni nestabilnosti i nepredvidivosti. Odnosi uzroka i posljedica u zagonetnoj su konstelaciji, a očigledna činjenica da su socijalni sustavi povijesno i vremenski određeni još više ističe potrebu primjene teorije kaosa na područje društvenih znanosti. Istraživači iz različitih disciplinarnih područja trude se povećati matematičku rigoroznost u proučavanju socijalnih sustava. Mnoge analitičke procedure koje su već razvijene u matematici i fizici prilagođavaju se i uvode u područje društvenih znanosti. Kaosološka metodologija sve više se koristi u području ekonomskih i političkih znanosti. U području sociologije, teorija kaosa uvodi se više metaforički i metafizički, i to u sklopu postmodernizma i poststrukturalizma. U svakom slučaju, potrebno je, na razini društvenih znanosti, konstituirati jednu jedinstvenu i integrativnu **socijalnu teoriju kaosa** koja će se upravljati po sistemskoj paradigmi i biti u stanju razviti prikladne **strateške modele i metode** za proučavanje nelinearne dinamike i kaosa u svim područjima društvenog života gdje se taj fenomen može pojaviti.

4. MJERENJE KAOSA

Jedno od ključnih metodoloških pitanja koje se postavlje glasi: Zašto je potrebno kvantificirati tako složene oblike ponašanja koji su produkt kaotične dinamike? Jedan od odgovora leži u nastojanjima kvantitativne specifikacije genuinog kaotičnog ponašanja. Kao što ćemo vidjeti kaos proizvodi jednu vrstu »slučajnog« gubitka informacija u inicijalnoj fazi (osjetljivost na početne uvjete), čime možemo objasniti kompleksno ponašanje realnih sustava. Upravo iz tog razloga želimo raspolagati kvantitativnim metodama visokog stupnja matematičke i statističke formalizacije koje će pouzdano moći diferencirati kaotično od tzv. »ergodičnog« (stihijskog) ponašanja. Kvantitativne metode koje ćemo spomenuti u ovom kontekstu mogu jasno identificirati i procijeniti broj aktivnih stupnjeva slobode sustava. Treći razlog kvantificiranja kaotične dinamike leži u mogućnosti anticipiranja univerzalnog scenarija kaosa odnosno njegove geneze i metamorfoze iz regularnog ponašanja. Prema tome, glavni argumenti koji opravdavaju mjerenje kaosa leže u slijedećim činjenicama: 1. Kvantifikacija može pomoći u diferencijaciji kaotičnog od ostalih nelinearnih oblika ponašanja nekog sustava; 2. Kvantifikacija može pomoći u identifikaciji aktivnog broja varijabli koje su uključene u dinamiku sustava; 3. Kvantifikacija može pomoći u izradi tzv. »kaosoloških« taksonomija; 4. Kvantifikacija može ukazati na postojanje povezanosti između parametarskih promjena i transformacija čitavog dinamičkog sustava varijabli.

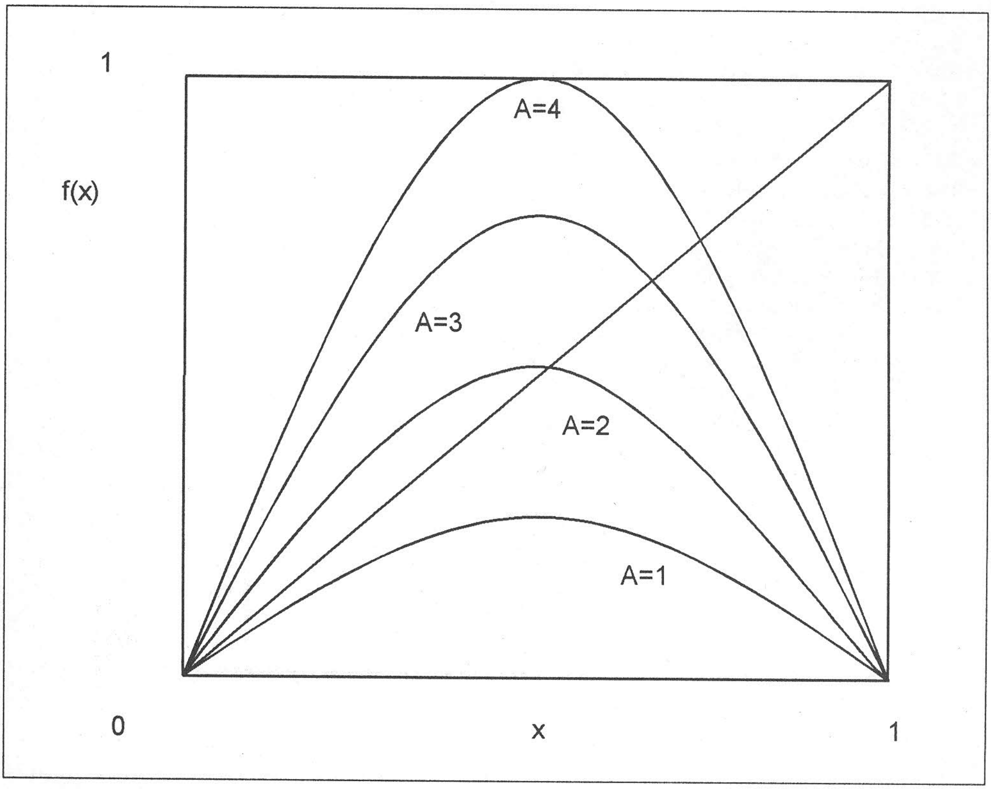
4.1 Logistička ili populacijska jednadžba

Matematičke temelje teorije kaosa i jedinstvene značajke te nove znanosti otkrili su istraživači koji su se u prošlosti bavili proučavanjem dinamike nelinearnih sustava. Nova znanost je dala i vlastiti jezik, elegantni žargon pun fraktala i bifurkacija, atraktora, ovisnosti o inicijalnim uvjetima, prekida i periodičnosti. Ti termini postali su uobičajeni u društvenim znanostima. Suvremena kompjutorska tehnologija i novi grafički programi mogu pomoći u još boljem razumjevanju i istraživanju matematike dinamičkih sustava. Ti moderni programi omogućuju vizualno prikazivanje značenja nelinearne dinamike i tako olakšavaju grafičku i spektralnu analizu kaosa. Grafički prikazi daju nam uvid u strukturu i dinamiku nelinearnih vremenskih serija, pri čemu je potrebno minimalno znanje iz deskriptivne statistike. Grafičkim prikazivanjem fenomena kaosa moguće je istražiti kako se jednostavni deterministički sustavi transformiraju u vrlo složene što ima posebnu važnost za shvaćanje dinamike društvenih sustava koji od jednostavnih struktura napreduju do vrlo kompleksnih. Tijekom svoje geneze, nelinearni sustavi mogu razviti širok dijapazon ponašanja koje Kiel i Elliott (1997) svrstavaju u tri odvojena entiteta: 1. Stabilno stanje u sklopu kojega sustav konvergira prema ekvilibrijumu; 2. Periodično ponašanje ili stanje stabilnih cikličkih oscilacija; i 3. Kaotično ponašanje ili nestabilno stanje. Najčešće korištena matematička metoda za istraživanje ova tri biheviolralna režima je diferencijalna jednadžba koja se naziva **logističkom ili populacijskom jednadžbom** danom u ovom obliku (Planinić, 2001):

$$\mathbf{x_{n+1} = kx_n(1 - x_n).} \qquad \mathbf{(4.1)}$$

Ova jednadžba pokazuje svojstva nelinearne funkcije, koja su onda i opća obilježja kaosa; primjerice, kaotičnom režimu (ponašanju) pripada funkcija mape koja mora imati maksimum ili minimum. Navedena jednadžba prvi put je primijenjena u ekologiji (gdje onda x_n označava gustoću populacije u n–toj godini promatranja, a x_{n+1} gustoću populacije godinu dana poslije, dok je k kontrolni parametar koji opisuje količinu prirodnih resursa npr. hrane). Općenito, parametar k može poprimiti vrijednosti između 0 i 4, kada je varijabla x normalizirana i pokazuje relativne vrijednosti s obzirom na najveću vrijednost promatrane veličine, te je $0 < x_n < 1$. Iteracija logističke jednadžbe počinje nekom početnom vrijednošću x_0 iz čega se stvara orbita (niz vrijednosti od x) sukcesivno, kao: $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$ itd. ... Osobita vrijednost varijable x^*, za koju vrijedi: $x^* = f(x^*)$, naziva se fiksnom ili ravnotežnom točkom, što je, dakle, vrijednost varijable za koju funkcija ima jednaku vrijednost kao i varijabla x. Ponavljanje postupka ili iteracija daje istu vrijednost x^*. Ako se orbita približava fiksnoj točci, kada $n \to \infty$, kažemo da je x^* stabilna fiksna točka ili atraktor; kada se orbita udaljuje, onda je x^* odbojna ili nestabilna fiksna točka. Te se okolnosti mogu istražiti pomoću derivacije funkcije mape: ako je $(df/dx)_{x^*}<1$, x^* je atraktor; za $(df/dx)_{x^*}>1$, fiksna točka x^* je nestabilna. Postavlja se pitanje što će se desiti s vrijednostima populacijske frakcije (omjera) *x* nakon nekoliko sezona ovisno o promjenama parametra *k*. Naš način jednostavnog linearnog rezoniranja navodi nas na primjenu linearnog modela tj. pretpostavku da će vrijednosti *x* rasti zajedno s povećanjem parametra *k*. Međutim, situacija je sasvim drugačija ako započnemo iteracije s nekom vrijednosti $x_0 ... x_n$, tada x_1 = fk (x_0); x_2 = fk (x_1), x_3 = fk (x_2) ... itd. To se naziva tzv. sekvencijalna iteracija. Funkcija fk (x) naziva se, dakle, **iteracijska funkcija**, a prikazuje se na **logističkoj mapi**.

Grafički prikaz 4.1 – **Logistička mapa iteracijske funkcije $f_k(x)$ za različite vrijednosti k**



Sekvencije x–vrijednosti koje nastaju na temelju tog iteracijskog modela nazivaju se trajektorije ili orbite (analogno kretanju planeta ili satelita koje se zbiva u sukcesivnim vremenskim intervalima). Prvih nekoliko točaka trajektorija ovise o startnoj vrijednosti varijable x. Ishodišna točka x=0 naziva se atraktor za danu trajektoriju (orbitu), a cijeli interval 0<x<1, naziva se atraktorni luk. Kod kompleksnijih sustava postoji više od jednog atraktora za datu parametarsku vrijednost.

a) Stabilni ekvilibrijum – Fascinirajući aspekt logističke mape je da se svaki bihevioralni režim zbiva unutar matematički definiranih granica. Tako, primjerice, vrijednost parametra *k* između 0 i 3 konvergira prema ekvilibrijumu. U slijedećoj tablici prikazane su numeričke iteracije stabilnog ekvilibrijuma iz logističke mape s istim inicijalnim uvjetima $(x_0=0.97)$ ali s različitim vrijednostima parametarske konstante *k*.

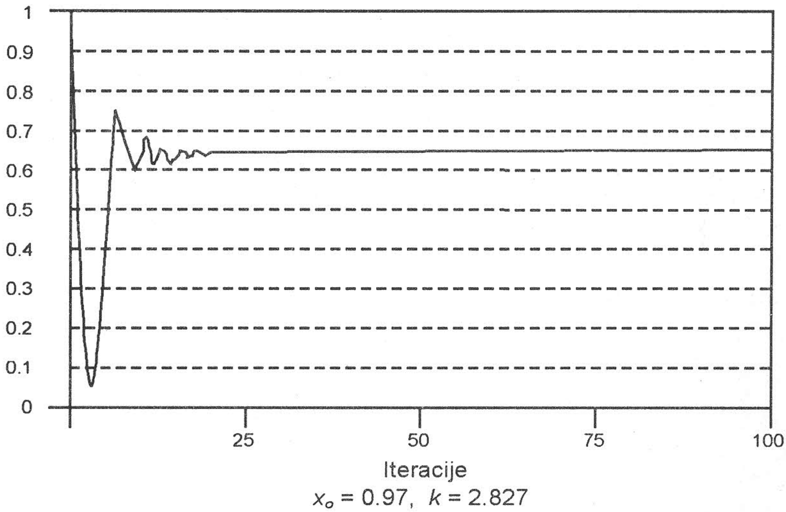
Tablica 4.1 – **Numeričke iteracije stabilnog ekvilibrijuma iz logističke mape**

k = 1.95	k = 2.35	k = 2.65	k = 1.95	k = 2.35	k = 2.65
0.97	0.97	0.97	0.48717949	0.57446809	0.62264174
0.056745	0.068385	0.077115	0.48717949	0.57446809	0.62264136
0.10437376	0.14971496	0.18859593	0.48717949	0.57446809	0.62264161
0.18228576	0.29915591	0.40552289	0.48717949	0.57446809	0.62264145
0.29066244	0.49270488	0.6388463	0.48717949	0.57446809	0.62264155
0.40204669	0.58737494	0.61141252	0.48717949	0.57446809	0.62264148
0.46879004	0.56955921	0.62960622	0.48717949	0.57446809	0.62264153
0.48560058	0.57612956	0.61798591	0.48717949	0.57446809	0.6226415
0.48709568	0.57388008	0.62561021	0.48717949	0.57446809	0.62264152
0.48717528	0.57467307	0.6206885	0.48717949	0.57446809	0.6226415
0.48717928	0.57439624	0.62390086	0.48717949	0.57446809	0.62264151
0.48717948	0.57449322	0.62181873	0.48717949	0.57446809	0.62264151
0.48717949	0.57445929	0.62317452	0.48717949	0.57446809	0.62264151
0.48717949	0.57447116	0.6222943	0.48717949	0.57446809	0.62264151
0.48717949	0.57446701	0.62286688	0.48717949	0.57446809	0.62264151
0.48717949	0.57446848	0.62249489	0.48717949	0.57446809	0.62264151
0.48717949	0.57446795	0.62273676	0.48717949	0.57446809	0.62264151
0.48717949	0.57446813	0.62257957	0.48717949	0.57446809	0.62264151
0.48717949	0.57446807	0.62268176	0.48717949	0.57446809	0.62264151
0.48717949	0.57446809	0.62261534	0.48717949	0.57446809	0.62264151
0.48717949	0.57446808	0.62265852	0.48717949	0.57446809	0.62264151
0.48717949	0.57446809	0.62263045	0.48717949	0.57446809	0.62264151
0.48717949	0.57446808	0.62264869	0.48717949	0.57446809	0.62264151
0.48717949	0.57446809	0.62263684	0.48717949	0.57446809	0.62264151
0.48717949	0.57446809	0.62264455	0.48717949	0.57446809	0.62264151
0.48717949	0.57446809	0.62263954	0.48717949	0.57446809	0.62264151
0.48717949	0.57446809	0.62264279	0.48717949	0.57446809	0.62264151
0.48717949	0.57446809	0.62264068	0.48717949	0.57446809	0.62264151
0.48717949	0.57446809	0.62264205	0.48717949	0.57446809	0.62264151
0.48717949	0.57446809	0.62264116	0.48717949	0.57446809	0.62264151

Kao što se vidi (Tablica 4.1), iteracije rapidno konvergiraju prema stabilnom stanju i ne napuštaju tu točku čak i onda kada je konvergencija postignuta. Potrebno je napomenuti da se konvergencija k stabilnosti dešava nakon više uzastopnih iteracija. Tako se konstantna vrijednost k = 2.827 dobiva kod 100 iteracija. Ovu situaciju zorno prikazuje grafički prikaz 4.2.

b) Periodička ponašanja – Slijedeći bihevioralni režim je periodičko ponašanje. To je cikličko ili oscilatorno ponašanje koje se ponavlja u vrlo prepoznatljivim uzorcima. Periodička, ciklička kretanja započinju kod vrijednosti k>3. Režim početne nestabilnosti traje dok podaci ne počinju oscilirati. Promjene u kvalitativnom ponašanju vremenskih serija pripisuju se fenomenu **bifurkacije** ili »grananja« ponašanja u nove režime. To se može jasno uočiti u prvom stupcu tabele 4.2 koji predstavlja dva periodička ciklusa u kojima vrijednost x, nakon početnih nestabilnosti, oscilira u pravilnim vremenskim razmacima između dvije granične vrijednosri. Proces cikličkog ponavljanja brojeva naziva se periodom »dupliciranja« što znači da sustav postupno ulazi u zonu kaosa. To se zorno vidi iz grafičkog prikaza 4.3, koji je nastao na temelju tablice 4.2.

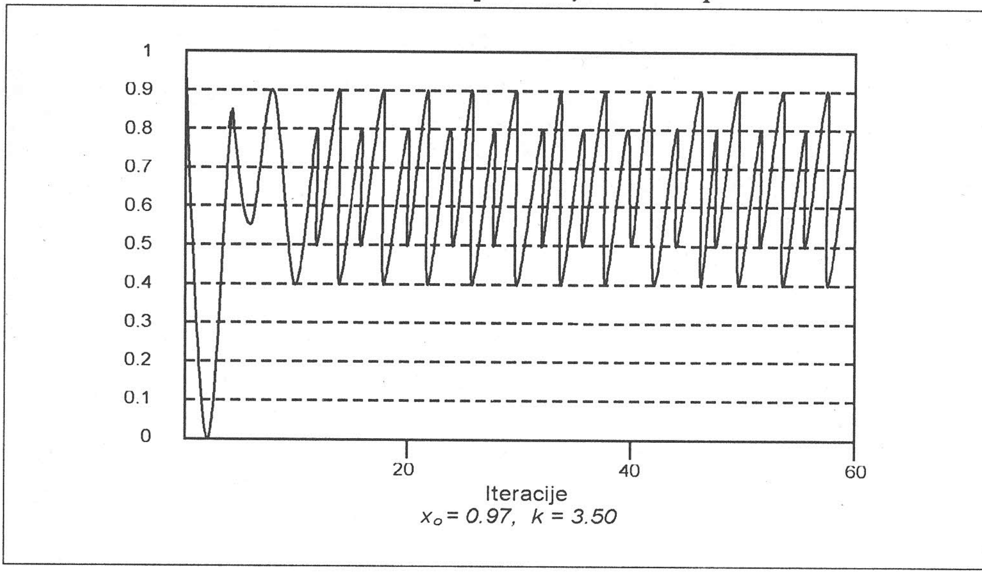
Grafički prikaz 4.2 — **Stabilni ekvilibrijum**



Tablica 4.2 — **Numeričke iteracije periodičnog ponašanja iz logističke mape**

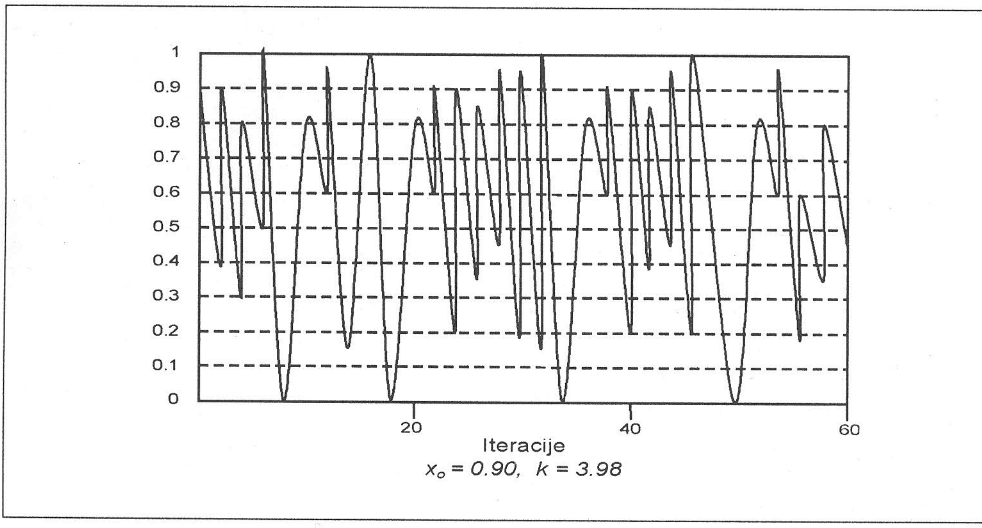
k = 3.25	k =3.5	k = 3.567	k = 3.25	k = 3.5	k = 3.567
0.97	0.97	0.97	0.49526517	0.8269407	0.81057266
0.094575	0.0.10185	0.1037997	0.81242714	0.50088422	0.54769367
0.27829935	0.32016802	0.33182132	0.49526517	0.87499726	0.8836362
0.65275867	0.76181161	0.79086073	0.81242714	0.38281968	0.3667706
0.73666056	0.63509139	0.58998192	0.49526517	0.82694071	0.82843549
0.63047328	0.81112611	0.86286891	0.81242714	0.50088421	0.50697817
0.75717435	0.5362019	0.4220694	0.49526517	0.87499726	0.89157631
0.5975494	0.87041298	0.87008697	0.81242714	0.38281968	0.34481474
0.78157337	0.39477979	0.4031981	0.49526517	0.82694071	0.80584785
0.55482842	0.83625048	0.85832504	0.81242714	0.50088421	0.55808244
0.80273	0.47927466	0.43375848	0.49526517	0.87499726	0.87971647
0.51465229	0.87349661	0.87609822	0.81242714	0.38281968	0.37744353
0.81180226	0.38675099	0.3871983	0.49526517	0.82694071	0.83817334
0.49653289	0.83011131	0.8463627	0.81242714	0.50088421	0.48382357
0.81246093	0.49359283	0.46382729	0.49526517	0.87499726	0.8908166
0.49519654	0.87485632	0.88708271	0.81242714	0.38281968	0.34693493
0.81242501	0.38318959	0.35729561	0.49526517	0.82694071	0.80817906
0.49526949	0.82724365	0.81910968	0.81242714	0.50088421	0.55297655
0.81242727	0.50019058	0.52851887	0.49526517	0.87499726	0.88173916
0.4952649	0.87499987	0.88884887	0.81242714	0.38281968	0.37194968
0.81242713	0.38281283	0.35240733	0.49526517	0.82694071	0.83326232
0.49526519	0.82693509	0.81404791	0.81242714	0.50088421	0.49558553
0.81242714	0.50089707	0.53995074	0.49526517	0.87499726	0.89168049
0.49526517	0.87499718	0.88605685	0.81242714	0.38281968	0.34452367
0.81242714	0.38281989	0.36012471	0.49526517	0.82694071	0.80552531
0.49526517	0.82694088	0.8219613	0.81242714	0.50088421	0.55878584
0.81242714	0.50088382	0.52199806	0.49526517	0.87499726	0.87942325
0.49526517	0.87499727	0.89002388	0.81242714	0.38281968	0.37823754
0.81242714	0.38281968	0.34914287	0.49526517	0.82694071	0.83886531

Grafički prikaz 4.3 – **Periodičko ponašanje za četiri periodička ciklusa**



c) Kaos – Kaotično ponašanje počinje se zbivati kada se parametar k nalazi između 3.8 i 4 granične vrijednosti. Ovaj matematički režim predstavlja drugu jasnu bifurkaciju kvalitativnih promjena u ponašanju sustava. U tablici 4.3 prikazane su tri odvojene stupčane vrijednosti *k* kako bi vidjeli kakve sve diverzifikacijske oblike kaotično ponašanje može manifestirati. Grafički prikaz otkriva da se kaotične serije zbivaju kada parametar *k* zauzme granične vrijednosti (k = 3.98 i xo = 0.90). Ono što razlikuje kaotične obrasce od ostalih režima ponašanja je odsutnost pravilnih uzoraka ponašanja u longitudinalnoj seriji podataka. Kaotično ponašanje nikada se ne ponavlja i stoga se naziva aperiodičnim, što dokazuje pažljivo istraživanje decimala vrijednosti parametra k. Međutim, kaotično ponašanje ostaje u granicama definiranih parametara.

Grafički prikaz 4.4 – **Kaotično ponašanje**

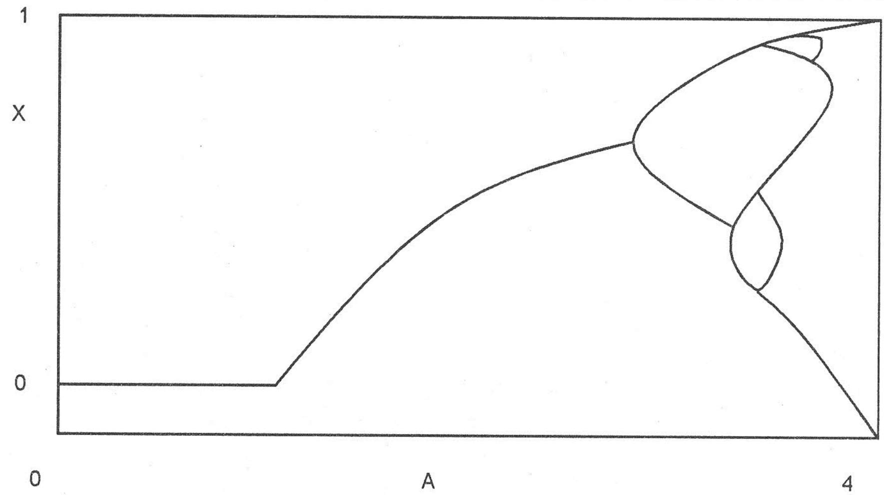


Tablica 4.3 – **Numeričke iteracuje kaotičnog ponašanja iz logističke mape**

k = 3.8	k = 3.89	k = 3.98	k = 3.8	k = 3.89	k = 3.98
0.9	0.9	0.9	0.18600293	0.88477839	0.18185933
0.342	0.3501	0.3582	0.57534218	0.39656834	0.59217033
0.8551368	0.88509166	0.91497318	0.92842951	0.93088436	0.96118843
0.47073584	0.39563016	0.30963308	0.25250299	0.25027741	0.14847484
0.94674571	0.93012599	0.85076653	0.71723187	0.72991427	0.50319163
0.19158941	0.25281746	0.5053121	0.77067919	0.76687238	0.99495946
0.58855506	0.73482408	0.99488769	0.67158454	0.69545082	0.01996024
0.92020041	0.75799626	0.02024297	0.83812323	0.82389802	0.07785607
0.27904015	0.71357355	0.07893611	0.51555619	0.56440038	0.28574213
0.76447163	0.79506285	0.2893667	0.94908042	0.95636658	0.81229239
0.68420808	0.63382848	0.81842177	0.18364175	0.16232792	0-60684438
0.82105605	0.90282986	0.59145814	0.56968635	0.52895274	0.94956543
0.55830744	0.34126233	0.96170892	0.93154649	0.96923916	0.19060589
0.93708092	0.87448115	0.14656298	0.24231699	0.11597882	0.61401563
0.22404903	0.42698145	0.49782745	0.69767797	0.39883289	0.94326173
0.66063403	0.95175965	0.99498121	0.801509	0.93268669	0.21300576
0.8519475	0.17860241	0.01987452	0.60455083	0.24422287	0.66718455
0.47930525	0.57067696	0.07752849	0.90846267	0.71800866	0.88375632
0.94837256	0.95306855	0.28464095	0.31600134	0.78761696	0.40886972
0.18605577	0.17399539	0.81040951	0.82134908	0.65070553	0.96194719
0.57546828	0.55907466	0.61151083	0.55759212	0.88414971	0.1456871
0.92835725	0.95892462	0.94551003	0.93739596	0.39844881	0.49536021
0.25273825	0.15322008	0.20505283	0.22300214	0.93238381	0.99491432
0.71767419	0.50470295	0.64876454	0.6584343	0.24524209	0.02013807
0.7699482	0.97241396	0.90691907	0.85461458	0.7200328	0.07853545
0.67308629	0.10434944	0.33597916	0.47214431	0.78416786	0.28802318
0.83615632	0.36356186	0.88792671	0.94705143	0.65837716	0.81616199
0.52059592	0.90008623	0.39606122	0.19055107	0.87492586	0.59716556
0.94838807	0.34983162	0.95200299	0.85611717	0.42568503	0.95742424

Kao što vidimo iz prethodnih grafičkih prikaza, naš bifurkacijski dijagram prikazuje zbivanja u faznom (dvodimenzionalnom) prostoru kod vrijednosti parametara x_0 = 0.90, i k = 3.98. Postavlja se pitanje što se zbiva u logističkoj mapi kada trajektorije prelaze graničnu vrijednost k>4? Je li kaotično ponašanje koje se vidi na logističkoj mapi 4.5 uistinu kaos ili neki numerički artefakt izazvan iteracijskim procedurama? Povećanjem parametra k (brzina rasta) i ponašanje (populacije) sustava je u porastu. Kada je, primjerice, parametar k = 2.7, x = 0.6292. Iznenada, kada je parametar k prešao graničnu vrijednost 4, crta se raspada u dvije regije (populacija ili ponašanje jednog sustava prelazi iz jednogodišnjeg u dvogodišnji ciklus). Kako parametar i dalje raste, broj se točaka uvijek nanovo podvostručava. Ponašanje je kompleksno, a opet pravilno. Iza točke 4, graf postaje sasvim kaotičan (potpuno tamna polja), a opet, usred zone kaosa, nakon daljnjeg povećanja parametra, stabilni se ciklusi ponovno vraćaju.

Grafički prikaz 4.5 – **Bifurkacijski dijagram za logističku funkciju (k = 4)**



4.2 Ljapunovljevi eksponenti

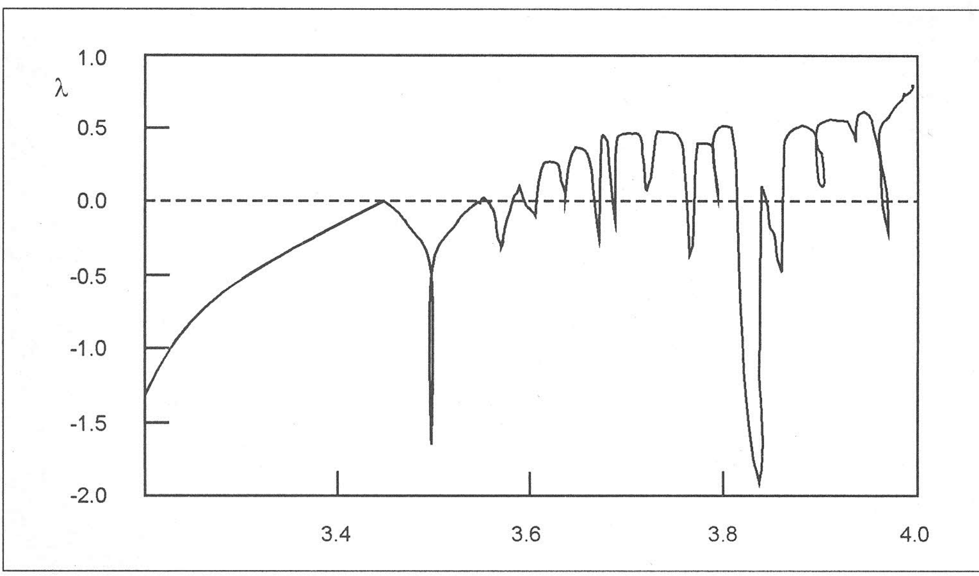
Još jedna od ključnih metoda za kvantifikaciju kaotičnog ponašanja je uvođenje tzv. Ljapunovljevih eksponenata. Uvođenje ove metode prate dva razloga. Prvo, želimo razviti moćan i pouzdan kvantitativni test za verifikaciju kaotične dinamike u faznom prostoru koji će moći distingvirati genuino, kaotično, od bilo kojeg drugog oblika stihijskog ili ergodičkog ponašanja. Drugo, potrebna nam je kvantitativna mjera za određivanje stupnja kaotičnosti nekog realnog sustava, tako da je moguće pratiti kretanje kaosa i njegove promjene u skladu s promjenama dinamičkih varijabli i parametara danog sustava. Ljapunovljevi eksponenti su jedna od reprezentativnih tehnika za kvantitativno promatranje kaotičnog ponašanja sustava pomoću koje istraživač može razlikovati kaos od »šuma« koji nastaje zbog nasumičnih vanjskih utjecaja kako bi onda mogao odrediti i stupanj kaotičnosti nekog realnog (disipativnog) sustava. Kao što je poznato, kaos pokazuje veliku osjetljivost na početne uvjete, pa se i mala razlika između početnih vrijednosti varijable (pogreške u mjerenju), povećava eksponencijalno, tako da se razlika između početnih vrijednosti (do) ili udaljenost između dviju polaznih točaka u faznom prostoru, nakon nekog vremena t, povećava eksponencijalno kako slijedi (Planinić, 2001):

$$\mathbf{d(t) = d_0\, e\lambda t,} \qquad (4.2)$$

gdje je λ Ljapunovljev eksponent, koji za kaotičnu dinamiku ima pozitivnu vrijednost (za $\lambda>0$, d se povećava u vremenu, dakle promatrane putanje divergiraju; za $\lambda<0$ gibanje je regularno; za $\lambda=0$, promjene u dinamičkom sustavu su periodične). Ako, dakle, promatramo vremenske serije dinamičkih varijabli u jednodimenzionalnom prostoru, tada je Ljapunovljev eksponent za područje tog prostora, blizu fiksne točke, karakteristična ili svojstvena vrijednost te točke. Ljapunovljev eksponent je mjera procjene privlačenja (atrakcije) ili odbijanja (repulzije) neke vrijednosti od fiksne točke u nekom vektorskom prostoru varijabli i izražava se pomoću ove formule:

$$\lambda = \mathbf{df_{(x)}/d_x \,|\, x0.} \qquad (4.3)$$

Dakle, u nekom području jednodimenzionalnog faznog prostora u blizini fiksne točke Ljapunovljev eksponent λ je karakteristična vrijednost te fiksne točke. Za $\lambda>0$ dvije putanje divergiraju, dok za $\lambda<0$ putanje konvergiraju. Za dvodimenzionalni fazni prostor, jedan oblik atraktora je granični ciklus i uz dvije diferencijalne jednadžbe pojavljuju se dva Ljapunovljeva eksponenta $\lambda 1$ i $\lambda 2$. U praksi, derivacije variraju, stoga valja odrediti srednju vrijednost Ljapunevljevog eksponenta za neki tijek ili genezu putanje. Tako u faznom prostoru s tri dimenzije (tri funkcije s tri varijabli) postoje tri Ljapunovljeva eksponenta: $\lambda 1 = df1/dx1$, $\lambda 2 = df2/dx2$ i $\lambda 3 = df3/dx3$, a kaotični sustav ima najmanje jedan (od triju navedenih) pozitivan prosječni Ljapunovljev eksponent. Praktično je na semilogaritamskom papiru naznačiti točke (kako rastu n i dn/do) i ako one određuju neki pravac regresije koji se može odrediti metodom najmanjih kvadrata, njegov nagib daje vrijednost λ. Inače, potrebno je odrediti više vrijednosti od λx_i (barem 30 ili 40) i izračunati aritmetičku sredinu za N vrijednosti. Uz takvu prosječnu vrijednost treba navesti i pripadajuću standardnu devijaciju radi određenja intervala procjene za λ, uz uobičajenu statističku pouzdanost. Planinić (2001) navodi da se poteškoće u razlučivanju determinističkog kaosa od šuma za vremenski niz mjerenja u nekom eksperimentu mogu rješavati traženjem najvećeg Ljapunovljeva eksponenta u jedinici vremena: ako je on konačan broj ($\lambda < \propto$), onda je sustav, koji je proizveo spomenuti niz vremenskih podataka, podložan determinističkim kaosu, a u protivnom ($\lambda \rightarrow \propto$) ponašanje sustava je nasumično ili stohastičko. Ljapunovljev karakteristični eksponent može se i grafički prikazati:



5. ZAKLJUČAK

Brojne studije koje su napisane o teoriji determinističkog kaosa čine uvjerljivim tezu da se, doista, radi o novoj disciplini unutar znanosti o nelinearnoj dinamici koju mnogi autori nazivaju »kaosologija«. U svakom slučaju na pomolu je još jedna revolucija u znanosti. Sigurna je skora pojava novog pogleda na svijet – pogleda koji će konačno zamijeniti njutnovski svjetski stroj kao povijesni okvir uređenja svijeta. Mnoge prirodne i društvene znanosti već se nalaze u »post–post« razdoblju bilo da se radi o postmodernizmu ili poststrukturalizmu. U tom smislu doći će do novog snažnog vala kritike i dekonstrukcije vladajuće paradigme. Prvi val dekonstrukcije tradicionalne njutnovske paradigme zbio se na početku prošlog stoljeća otkrićem kvantne teorije i teorije relativiteta. Drugi val kritike i dekonstrukcije nastupa upravo sada na početku novog milenija razvojem teorije determinističkog kaosa i uvođenjem zakona entropije kao vrhovnog zakona prirode koji upravlja svime (Rifkin, 2000). Albert Einstein je rekao da je on najvažniji znanstveni zakon koji će kao vladajuća paradigma dominirati sljedećim povijesnim razdobljem. Stoga je važno da istraživači znaju upravljati tim drugim zakonom termodinamike. Da bi to mogli moraju pravilno razumjeti nelinearnu dinamiku prirode i društva u kojem žive. Analiza nelinearne dinamike i metode mjerenja kaosa pružaju taj moćni instrumentarij kojim je moguće dijagnosticirati i evaluirati kaotične procese koji se zbivaju u disipativnim sustavima. Što prije ljudi ovladaju tim novim zakonitostima, lakše će se suočavati s nepredvidivom i zagonetnom prirodom nekih prirodnih i socijalnih fenomena. Ljudi moraju postati svjesni da je determinizam već odavno mrtav, pitanje je da li je uopće ikada i postojao? Ljudskom je umu teško prihvatiti novi način rezoniranja, međutim, što prije ljudi usvoje nelinearan način razmišljanja i počnu se ponašati u skladu s drevnim zakonima, prije će se ponovno uklopiti u mrežu života kojoj su oduvijek pripadali.

LITERATURA

Capra, F. (1996). Mreža života. Novo znanstveno razumijevanje živih sustava. Zagreb: M.A.K. Golden.

Čoh, Ć. (2000). Kaotičnost kao pretpostavka smislenog poretka. **Filozofska istraživanja**, 20(2–3):77–78.

Gleick, J. (1996). **Kaos. Stvaranje nove znanosti**. Zagreb: Izvori.

Hilborn, C. R. (1994). **Chaos and Nonlinear Dynamics**. New York, Oxford: Oxford University Press.

Kiel, D., Elliot, E. (1997). **Chaos Theory in the Social Sciences. Foundations and Applications**. The University of Michigan Press. Michigan.

Planinić, J. (2001). **Kaos i kozmos. Nebeska dinamika i deterministički kaos**. Zagreb: Algoritam.

Rifkin, J. (2002). **Entropija. Nov pogled na svijet**. Zagreb: MISL.

ANALYSIS OF NON-LINEAR DYNAMICS AND METHODS OF THE IDENTIFICATION OF CHAOS WITHIN DETERMINISTIC SOCIETAL SYSTEMS

Aleksandar Halmi, Anita Laslavić

Faculty of Law, University of Zagreb; Study Centre of Social Work

Summary

One of the most interesting topics within the discourse of modern natural sciences, especially that of mathematics and physics, has become 'The Theory of Chaos'. This topic has not only become interesting but also a very significant within the context of modern theoretical debates. It has been more and more dispersed from the field of physics and mathematics towards different fields of applied social sciences, and so has become one of most recognizable facets of interdisciplinary dialogues at the start of the new millennium. The theory of chaos, in a way, has become a new science that postulates some 'new regularities', and this then becomes the subject of different analyses from the standpoint of 'natural' and 'social sciences and humanities'. At the present time numerous theoretical disciplines of this orientation deal with the theory of chaos: philosophy, theology, sociology, political science, economics, medicine, theory of communication and new technologies, theory of literature and art, and social work as an applied social science. The theory of chaos so becomes a sort of a paradigm in contemplating about modernity, as well as about civilisation diversity, incorporated within the multicultural modern world. Within this different discourses, in other words linguistic games of post-structuralism and postmodernism, with which we are confronted in the epoch of the dissolution of traditional idea of the world as a rationally arranged žcosmic' space, the theoretical language of philosophy manifests itself as equally appropriate for the reflexion on the theory of chaos.

Key words: *deterministic chaos, non-linear dynamics, dissipative systems, complex numbers, theory of bifurcation.*

DIE ANALYSE DER NICHT-LINEAREN DYNAMIK UND EINIGER METHODEN ZUR ENTDECKUNG DES CHAOS IN DETERMINISTISCHEN SOZIALSYSTEMEN

Aleksandar Halmi, Anita Laslavić

Juridische Fakultät der Univesität Zagreb; Studienzentrum für Sozialarbeit

Zusammenfassung

Im zeitgenössischen naturwissenschaftlichen Diskurs, vor allem im mathematischen und physikalischen, ist die Chaostheorie zu einem der interessantesten Themen geworden. Dieses Thema erwies sich jedoch nicht nur interessant, sondern auch sehr wichtig im Kontext der theoretischen Diskussionen der Gegenwart. Von dem Gebiet der Mathematik und Physik aus verbreitet es sich immer mehr auf verschiedene Gebiete angwandter Sozialwissenschaften, so dass es zu einer der am meisten erkennbaren Facetten des interdisziplinären Dialogs an der Schwelle des neuen Jahrtausends wird. Die Chaostheorie wird auf eine gewisse Art zu einer neuen Wissenschaft, die einige 'neue Gesetzmäßigkeiten' postuliert, was wiederum zum Gegenstand unterschiedlichster Denkansätze sowohl in den Natur- als auch in den Geistes- und Sozialwissenschaften wird. Zur Zeit thematisieren viele theoretische Disziplinen dieser Art die Chaostheorie: so z. B. Philosophie, Theologie, Soziologie, Politikwissenschaft, Ökonomie, Medizin, Medientheorie und neue Technologien, Literatur- und Kunstheorie sowie die Sozialarbeit als angewandte Sozialwissenschaft. Die Chaostheorie wird dadurch zu einem Paradigma im Denken über die Gegenwart, die, zivilisatorisch zergliedert, in der multikulturellen Welt der heutigen Zeit verkörpert wird. In einer Vielzahl unterschiedlicher Diskurse bzw. Vielzahl der Sprachspiele des Poststrukturalismus und des Postmodernismus, mit denen wir im Zeitalter des Verfalls der traditionellen Auffassung der Welt als eines rational geordneten 'kosmischen' Raums konfrontiert sind, erweist sich auch die Sprache der Philosophie ein angemessenes Mittel im Denken über die Chaostheorie.

Grundausdrücke: *deterministisches Chaos, nicht-lineare Dynamik, dissipative Systeme, komplexe Zahlen, Bifurkationstheorie*