

## ANALIZA NAPREZANJA UZ OTVOR PODZEMNE PROSTORIJE

Krešimir TOR, Lidija FRGIĆ i Antonia JAGULJNJK-LAZAREVIĆ

Rudarsko-geološko-naftni fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Pierottijeva 6, HR-10000 Zagreb, Hrvatska

E-mail: ktor@rudar.rgn.hr

lfrgic@rudar.rgn.hr

**Cljučne riječi:** Podzemna prostorija, Metoda konačnih elemenata, Kriterij loma

Iskopom otvora u stjenskom masivu dolazi do koncentracije napreznja uz otvor. U radu su prikazane promjene napreznja i deformacija u neposrednoj okolini eliptičnog otvora i utjecaj otvora na okolinu. Teoretsko rješenje korišteno je za određivanje veličine područja u kojem postojanje otvora izaziva promjene u stanju napreznja u odnosu na primarno stanje unutar prihvatljivih granica. Dana je usporedba rezultata numeričkih proračuna metodom konačnih elemenata s rezultatima po teoriji elastičnosti.

Numerički proračuni provedeni su za slučajeve zadavanja rubnih uvjeta: silama i pomacima. Zadavanje rubnih uvjeta pomacima daje bolju aproksimaciju stanja napreznja i deformacija.

Koncentracija napreznja uz otvor i pojava zona plastifikacija obradena je na primjeru iskopa cestovnog tunela. Proračun je proveden metodom konačnih elemenata uz Hoek-Brownov kriterij loma. Rezultati analize stabilnosti ukazuju na područja u kojima možemo očekivati slom stjenskog materijala odnosno mjesta na kojima treba poduzeti mjere osiguranja.

Od posebnog je značaja usporedba rezultata numeričkih modeliranja i samih opažanja na terenu prilikom iskopa.

### Uvod

Kod projektiranja podzemnih prostorija jedan od važnih faktora je koncentracija napreznja uz njihove otvore. Otvaranjem cijelog profila podzemne prostorije dolazi do promjene stanja napreznja u neposrednoj okolini otvora. Iskopom otvora primarno stanje napreznja u masivu prelazi u sekundarno stanje napreznja i deformacija, ovisno o brzini napredovanja iskopa i podgrađivanja, te drugim okolnostima u području čela iskopa. Pri tome dolazi na rubu otvora do koncentracije obodnih normalnih napreznja dok posmična i radijalna napreznja isčezavaju. Utjecaj otvora na nekoj udaljenosti potpuno isčezava, pa se masiv izvan zone utjecaja nalazi u primarnom stanju napreznja.

Dio stijene koji je neposredno iskopan nije moguće istovremeno podgraditi. Proračun stanja napreznja i deformacija za takvu nepodgrađenu dionicu provodi se za ravninsko stanje deformacija što odgovara stanju napreznja na nekoj udaljenosti od samog čela iskopa.

Metode projektiranja podgradnih sustava ovise o lokalnim okolnostima, svojstvima masiva te primijenjenim postupcima iskopa i podgrađivanja. Modeliranjem stvarnog stanja može se predvidjeti ponašanje podzemne prostorije tijekom iskopa.

Nastanak prirodnih materijala, kao što su stijena ili tlo, u složenim geološkim procesima uvjetuje vrlo široki raspon fizikalno-mehaničkih parametara (npr. jednoosijalna tlačna čvrstoća, modul deformacije, kut trenja, kohezija i drugo) i prostornu heterogenost.

Stabilnost i sigurnost otvora ovise i o mehaničkim svojstvima stijene odnosno tla, pa je za opisivanje elastičnih, plastičnih i viskozničkih svojstva masiva potrebno poznavati veći broj materijalnih karakteristika. Kako se karakteristike mogu ustanoviti obično tek kad se iskopom dođe do određene lokacije te kako one vrijede samo za ograničeno područje, pretpostavljaju se na osnovu iskustva, pri čemu je potrebno usvojiti

**Key-words:** Underground room, Finite Element Method, Failure Criterion

By excavation of opening in the rock, a stress concentration around the opening occurs. The state of stresses and strains around an opening is analysed by theory of elasticity and by Finite Element Method (FEM). The aim of the paper is to determine the dimension of the FEM model for the stress and strain analysis around an elliptical opening in rock massif.

The numerical calculation have been performed for two different boundary conditions: with forces or with displacements. Boundary conditions given by displacements give better approximation in the state of stress and strains.

An example of the excavation of a road tunnel is used to represent stress concentration at the opening and the places where the plastic zones occur. The computation has been done after FEM comprising the Hoek-Brown criterion of failure. The results of stability analysis point to the zones where failure of the rock material may be anticipated. This is important when planning and designing the primary supports.

The comparison of the results of numerical modelling and field recording during excavation is of particular significance.

moгуće vrijednosti. Svu složenost problema nemoguće je obuhvatiti pa je nužno usvojiti čitav niz pojednostavljenja.

Kriteriji za određivanje sigurnosti mogu se temeljiti na:

- pomacima i relativnim deformacijama
- napreznjima u brdskom masivu/tlu, primarnoj podgradi i oblozi i stupnju iskorištenja plastičnog ponašanja
- nosivosti u smislu teorije graničnog stanja.

Faktori sigurnosti za svaki od navedenih slučajeva mogu biti različiti.

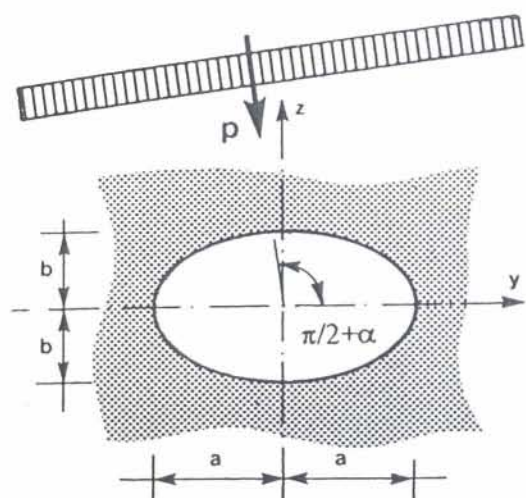
### Teoretska analiza ravninskog stanja deformacija

Proračun napreznja proveden za ravninsko stanje deformacija po teoriji elastičnosti daje prvu informaciju o zbivanju uz otvor. Teoretsko rješenje korišteno je za određivanje veličine područja u kojem postojanje otvora izaziva promjene u stanju napreznja u odnosu na primarno stanje unutar prihvatljivih granica pri primjeni numeričkih metoda, metode konačnih razlika, metode konačnih elemenata ili metode rubnih elemenata.

Podzemnu prostoriju na određenoj dubini promatramo kao otvor u beskonačnoj ploči. Ovdje će biti prikazano rješenje (Pöschl, 1921) za eliptični otvor. Veličina je otvora zadana poluosima elipse  $a$  i  $b$ . Opterećenje  $p$  zatvara s većom poluosu elipse  $a$  kut  $\Pi/2 + \alpha$  (sl. 1).

Funkcija napreznja izražena eliptičnim koordinatama  $\xi$  i  $\eta$  oblika:

$$\Phi = \frac{p \cdot (a^2 - b^2)}{8} \left\{ \operatorname{sh} 2\xi - \cos 2\alpha \cdot e^{-2(\xi - \xi_0)} - 2(\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\alpha) \cdot \xi + [\operatorname{ch} 2(\xi - \xi_0) - 1] \cdot e^{2\xi_0} \cdot \cos 2(\eta - \alpha) \right\} \quad (1)$$



Sl. 1. Eliptični otvor u stijeni  
Fig. 1 Elliptical opening in rock

zadovoljava Maxwellovu diferencijalnu jednačbu:

$$\nabla^4 \Phi = 0 \quad (2)$$

i rubne uvjete za (sl. 2):

$$\begin{aligned} \xi = \xi_0 & \quad \sigma_{\xi\xi} = 0 & \quad \sigma_{\xi\eta} = 0 \\ \xi = \infty & \quad \sigma_y = p_h & \quad \sigma_z = p_v \end{aligned} \quad (3)$$

Komponente naprezanja izražene eliptičnim koordinatama glase:

$$\sigma_{\xi\xi} = \frac{1}{h^2} \frac{\delta^2 \Phi}{\delta \eta^2} + \frac{1}{h^3} \frac{\delta h}{\delta \xi} \frac{\delta \Phi}{\delta \xi} - \frac{1}{h^3} \frac{\delta h}{\delta \eta} \frac{\delta \Phi}{\delta \eta} \quad (4)$$

$$\sigma_{\eta\eta} = \frac{1}{h^2} \frac{\delta^2 \Phi}{\delta \xi^2} - \frac{1}{h^3} \frac{\delta h}{\delta \xi} \frac{\delta \Phi}{\delta \xi} + \frac{1}{h^3} \frac{\delta h}{\delta \eta} \frac{\delta \Phi}{\delta \eta} \quad (5)$$

$$\tau_{\xi\eta} = \frac{1}{h^2} \frac{\delta^2 \Phi}{\delta \xi \delta \eta} + \frac{1}{h^3} \frac{\delta h}{\delta \eta} \frac{\delta \Phi}{\delta \xi} + \frac{1}{h^3} \frac{\delta h}{\delta \xi} \frac{\delta \Phi}{\delta \eta} \quad (6)$$

$$h^2 = \frac{a^2 - b^2}{2} (ch2\xi - \cos 2\eta) \quad (7)$$

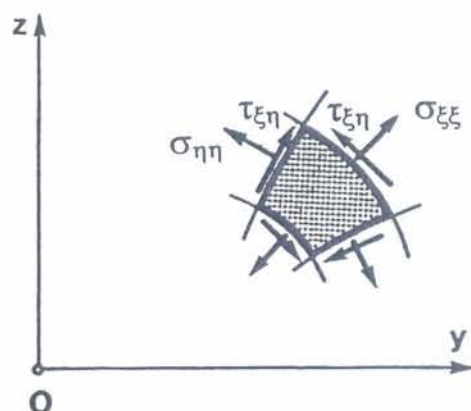
Za proračun sekundarnog stanja naprezanja sastavljen je program koji na osnovu ulaznih podataka (poluosi elipse  $a$ ,  $b$  i opterećenja  $p_v$  i  $p_h$ ) izračunava naprezanja u pojedinim točkama.

Analičko rješenje po teoriji elastičnosti korišteno je za definiranje potrebnog obuhvatnog područja u analizi naprezanja i deformacija metodom konačnih elemenata (mke).

### Numerička analiza naprezanja uz otvor

Složenije probleme mehanike kontinuuma npr. nepravilnu geometriju otvora nije moguće riješiti matematičkom formulacijom tj. dobiti rješenje u zatvorenom obliku. Numeričkim metodama proračuna dobivamo približna rješenja odnosno rješenja odgovarajućih diskretnih sustava. U numeričkoj analizi postoji nekoliko različitih pristupa rješavanju problema s neograničenim područjem.

Koristeći metodu konačnih elemenata najčešći je inženjerski pristup ograničavanje odnosno kraćenje područja, gdje se iz promatranog beskonačnog područja



Sl. 2. Rubni uvjeti

Fig. 2. Boundary conditions

izdvaja konačni dio tako da se konačne granice s odgovarajućim rubnim uvjetima postave dovoljno daleko od područja interesa. Kod ovakvog pristupa osnovni je problem koliko daleko od ruba otvora treba postaviti vanjske granice da bi se dobilo zadovoljavajuće rješenje. Granice se najčešće postavljaju proizvoljno na osnovu iskustva ili intuicije. U tu svrhu uveden je proračun za različite odnose poluosi elipsa  $b/a$  i opterećenja  $p_h/p_v$ . Precjecišta konfokalnih elipsa  $\xi = \text{konst.}$  i konfokalnih hiperbola  $\eta = \text{konst.}$  odabrana su kao čvorne točke koje definiraju elemente. Usvojena je mreža kvadrilateralnih elemenata. Dimenzije elementa idući prema vanjskom rubu se povećavaju uz konstantan korak. To ne uzrokuje slabiju aproksimaciju, budući da se na vanjskom rubu konture stanje naprezanja približava homogenom i to sa sve manjim gradijentima deformacija i naprezanja. Vanjska kontura pretpostavljena je u obliku elipse koja je konfokalna s otvorom i vrlo približno odgovara kružnici. Simetrija pomaka i opterećenja osigurana je vertikalno i horizontalno pomičnim osloncima u osi simetrije.

Rubni uvjeti na vanjskoj konturi zadani su na dva načina:

- zadavanjem opterećenja – sila u točkama konture mke-S
- zadavanjem pomaka u točkama konture mke-P.

Vertikalna i horizontalna sila za točke vanjske konture određene su pomoću trapeznog pravila (sl. 3):

$$p_{v,n} = \frac{\Delta y_{n-1}}{6} (p_{v,n-1} + 2p_{v,n}) + \frac{\Delta y_n}{6} (2p_{v,n} + p_{v,n+1}) \quad (8)$$

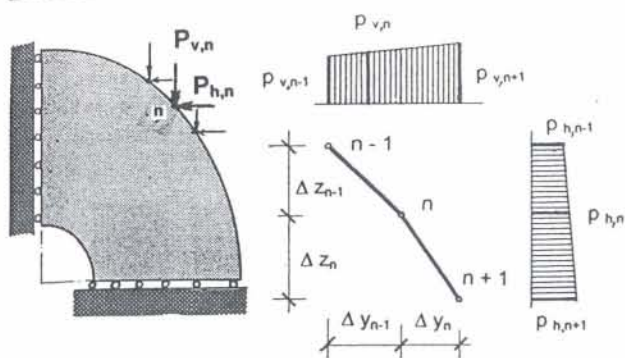
$$p_{h,n} = \frac{\Delta z_{n-1}}{6} (p_{h,n-1} + 2p_{h,n}) + \frac{\Delta z_n}{6} (2p_{h,n} + p_{h,n+1}) \quad (9)$$

Pomaci konturnih točaka dobiveni su integracijom komponenta deformacija:

$$v = \int \varepsilon_{yy} dy = -\frac{p_v(1-\nu^2)}{E} \left( 1 - K \frac{\nu}{1-\nu} \right) y \quad (10)$$

$$w = \int \varepsilon_{zz} dz = -\frac{p_v(1-\nu^2)}{E} \left( 1 - K \frac{\nu}{1-\nu} \right) z \quad (11)$$

Za eliptičan otvor s odnosom poluosi  $b/a = 1/2$  usvojena je mreža od 72 kvadrilateralna elementa (sl. 4).



Sl. 3. Čvorne sile  
Fig. 3. Nodal forces

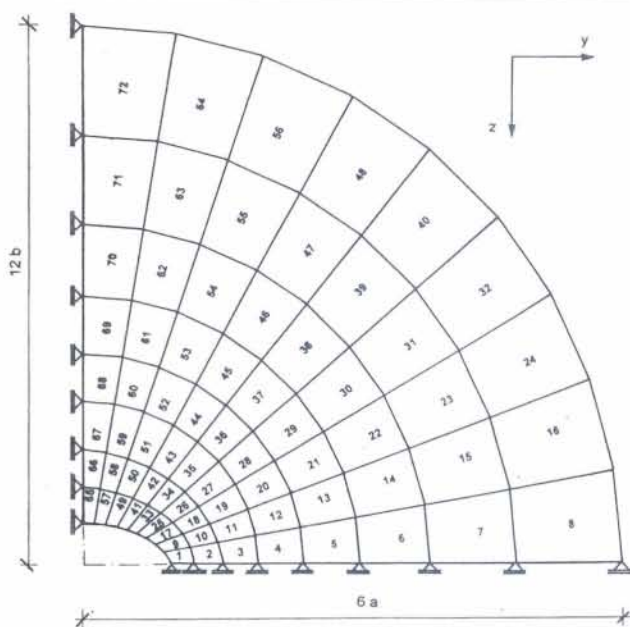
Tablica 1. Veličine napreznja  $\sigma_y$  i  $\sigma_z$  uzduž osi  $y_z$  za eliptični otvor odnosa poluosi  $b/a = 1/2$  i vertikalno opterećenje  $p_v = 1,00$   
Table 1. Values of stresses  $\sigma_y$  and  $\sigma_z$  along the axis  $y$  for elliptical opening with half-axis ratio  $b/a = 1/2$  and vertical load  $p_v = 1,00$

y/a	$p_h = 0,00$		$p_h = 0,50$		$p_h = 1,00$	
	$\sigma_z$	$\sigma_y$	$\sigma_z$	$\sigma_y$	$\sigma_z$	$\sigma_y$
1,00	5,000	0,000	4,500	0,000	4,000	0,000
1,41	1,505	0,553	1,511	0,782	1,517	1,011
2,00	1,170	0,266	1,182	0,645	1,194	1,024
2,83	1,072	0,129	1,079	0,571	1,086	1,014
4,00	1,033	0,063	1,037	0,535	1,041	1,007
5,66	1,016	0,031	1,018	0,517	1,020	1,003
8,00	1,007	0,015	1,008	0,508	1,009	1,001
11,31	1,003	0,007	1,004	0,504	1,004	1,000
16,00	1,001	0,003	1,002	0,502	1,002	1,000

Tablica 2. Veličine napreznja  $\sigma_y$  i  $\sigma_z$  uzduž osi  $z$  za eliptični otvor odnosa poluosi  $b/a = 1/2$  i vertikalno opterećenje  $p_v = 1,00$   
Table 2. Values of stresses  $\sigma_y$  and  $\sigma_z$  along the axis  $z$  for elliptical opening with half-axis ratio  $b/a = 1/2$  and vertical load  $p_v = 1,00$

z/a	$b/a = 1/2 \quad p_v = 1,00$					
	$p_h = 0,00$		$p_h = 0,50$		$p_h = 1,00$	
	$\sigma_z$	$\sigma_y$	$\sigma_z$	$\sigma_y$	$\sigma_z$	$\sigma_y$
0,50	0,000	-1,000	0,000	0,000	0,000	1,000
1,18	0,209	-0,047	0,302	0,569	0,395	1,185
1,80	0,549	0,056	0,612	0,591	0,676	1,126
2,69	0,762	0,045	0,794	0,558	0,832	1,070
3,91	0,877	0,027	0,896	0,532	0,915	1,037
5,59	0,938	0,014	0,947	0,516	0,957	1,019
7,95	0,968	0,007	0,973	0,508	0,978	1,009
11,28	0,984	0,003	0,986	0,504	0,989	1,004
15,98	0,992	0,001	0,993	0,502	0,995	1,002

Raspodjela napreznja  $\sigma_y$  i  $\sigma_z$  uzduž osi  $y$  prikazana je u tablici 1, dok su vrijednosti napreznja  $\sigma_y$  i  $\sigma_z$  uzduž osi  $z$  za isti slučaj dane u tablici 2. Dobivene vrijednosti napreznja  $\sigma_y$  i  $\sigma_z$  uzduž osi  $y$  i  $z$  usporedene su s vrijednostima napreznja za primarno stanje, uzduž osi  $y$  od-



Sl. 4. Mreža elemenata za proračun metodom konačnih elemenata  
Fig. 4. Network of elements for using the Finite elements method  
a)  $m = 3,5$  b)  $m = 0,5$

Tablica 3. Razlike napreznja u odnosu na primarno stanje uzduž osi  $y$  i  $z$   
Table 3. Differences in stresses related to primary stress along  $y$  and  $z$  axis

$\Delta$	10,0%	5,0%	2,5%	0,5%
y/a	2,7	3,7	5,3	11,2
z/b	4,1	5,9	7,7	20,1

Tablica 4. Usporedba napreznja  $\sigma_y$  u težištima elemenata uz otvor  
Table 4. Comparison of stresses  $\sigma_y$  in centroids of elements along the opening

Elem.	Teorija elastičnosti Theory of elasticity	mke-S	$\Delta$ (%)	mke-P	$\Delta$ (%)
1	0,500	0,448	5,2	0,444	5,6
9	0,416	0,394	2,2	0,371	4,5
17	0,295	0,296	0,1	0,285	1,0
25	0,186	0,202	1,6	0,202	1,6
33	0,110	0,126	1,6	0,134	2,4
41	0,068	0,083	1,5	0,096	2,8
49	0,059	0,067	0,8	0,080	2,1
57	0,054	0,071	1,7	0,080	2,6
65	0,063	0,085	2,2	0,087	2,4
		$\Delta_{\text{prosječno}}$ $\Delta_{\text{average}}$	1,9	$\Delta_{\text{prosječno}}$ $\Delta_{\text{average}}$	2,8

nosno uzduž osi  $z$  za slučaj opterećenja  $p_h/p_v = 0,5$  za navedeni otvor. Razlike između stanja napreznja za slučaj otvora u odnosu na primarno stanje napreznja, izražene u postocima, prikazane su u tablici 3. Vidljivo je da su razlike u napreznjima uzduž osi  $y$  gotovo dva puta manje nego uzduž osi  $z$ .

Tablica 5. Usporedba naprezanja  $\sigma_z$  u težištima elemenata uz otvor  
 Table 5. Comparison of stresses  $\sigma_z$  in centroids of elements along the opening

Elem.	Teorija elastičnosti <i>Theory of elasticity</i>	mke-S	$\Delta$ (%)	mke-P	$\Delta$ (%)
1	2,292	2,747	45,5	2,315	2,3
9	2,148	2,321	17,3	2,138	1,0
17	1,890	1,999	10,9	1,855	4,5
25	1,563	1,617	5,4	1,519	4,4
33	1,230	1,235	0,5	1,183	4,7
41	0,933	0,907	2,6	0,895	3,8
49	0,696	0,649	4,7	0,669	2,7
57	0,527	0,465	6,2	0,511	1,6
65	0,437	0,363	7,4	0,427	1,0
		$\Delta_{\text{prosječno}}$ $\Delta_{\text{average}}$	11,2	$\Delta_{\text{prosječno}}$ $\Delta_{\text{average}}$	2,9

Slični rezultati dobiveni su i za odnos poluosi  $b/a = 2/3$  uz  $p_h/p_v = 0; 0,5$  i  $1$ , pa se za veličinu obuhvaćenog

Tablica 6. Usporedba naprezanja  $\sigma_y$  u težištima elemenata vanjske konture  
 Table 6 Comparison of stresses  $\sigma_y$  in centroids of outer contour elements

Elem.	Teorija elastičnosti <i>Theory of elasticity</i>	mke-S	$\Delta$ (%)	mke-P	$\Delta$ (%)
8	0,515	0,507	0,8	0,517	0,2
16	0,507	0,503	0,4	0,508	0,1
24	0,495	0,499	0,4	0,494	0,1
32	0,484	0,500	1,6	0,481	0,3
40	0,480	0,509	2,9	0,472	0,8
48	0,484	0,527	4,3	0,471	1,3
56	0,495	0,550	5,5	0,477	1,8
64	0,509	0,573	6,4	0,486	2,3
72	0,518	0,588	7,0	0,493	2,5
		$\Delta_{\text{prosječno}}$ $\Delta_{\text{average}}$	3,3	$\Delta_{\text{prosječno}}$ $\Delta_{\text{average}}$	1,0

Tablica 8. Usporedba naprezanja  $\sigma_z$  i  $\sigma_y$  uzduž osi y u polovištima stanica elemenata  
 Table 8. Comparison of stresses  $\sigma_z$  and  $\sigma_y$  along axis y in midpoints of elements' sides

Elem.	Naprezanje Stress $\sigma_z$					Naprezanje Stress $\sigma_y$				
	Teorija elastičnosti <i>Theory of elasticity</i>	mke-S	$\Delta$ (%)	mke-P	$\Delta$ (%)	Teorija elastičnosti <i>Theory of elasticity</i>	mke-S	$\Delta$ (%)	mke-P	$\Delta$ (%)
1	2,310	2,726	41,6	2,305	0,5	0,496	0,400	9,6	0,401	9,5
2	1,546	1,602	5,6	1,486	6,0	0,654	0,665	1,1	0,631	2,3
3	1,276	1,319	4,3	1,230	4,6	0,631	0,636	0,5	0,616	1,5
4	1,159	1,186	2,7	1,113	4,6	0,586	0,587	0,1	0,579	0,7
5	1,090	1,115	2,5	1,056	3,4	0,562	0,552	1,0	0,552	1,0
6	1,054	1,069	1,5	1,029	2,5	0,540	0,528	1,2	0,533	0,7
7	1,033	1,029	0,4	1,016	1,7	0,526	0,510	1,6	0,520	0,6
8	1,021	0,988	3,3	1,016	0,5	0,516	0,500	1,6	0,512	0,4
		$\Delta_{\text{prosječno}}$ $\Delta_{\text{average}}$	7,7	$\Delta_{\text{prosječno}}$ $\Delta_{\text{average}}$	3,0		$\Delta_{\text{prosječno}}$ $\Delta_{\text{average}}$	2,1	$\Delta_{\text{prosječno}}$ $\Delta_{\text{average}}$	2,1

Tablica 7. Usporedba naprezanja  $\sigma_z$  u težištima elemenata vanjske konture  
 Table 7. Comparison of stresses  $\sigma_z$  in centroids of outer contour elements

Elem.	Teorija elastičnosti <i>Theory of elasticity</i>	mke-S	$\Delta$ (%)	mke-P	$\Delta$ (%)
8	1,022	0,999	2,3	1,027	0,5
16	1,025	1,008	1,7	1,028	0,3
24	1,029	1,021	0,8	1,028	0,1
32	1,028	1,032	0,4	1,022	0,6
40	1,019	1,038	1,9	1,009	0,1
48	1,001	1,035	3,4	0,900	1,3
56	0,979	1,023	4,4	0,963	1,6
64	0,957	1,009	5,2	0,940	1,7
72	0,943	1,000	5,7	0,926	1,7
		$\Delta_{\text{prosječno}}$ $\Delta_{\text{average}}$	2,9	$\Delta_{\text{prosječno}}$ $\Delta_{\text{average}}$	0,9

područja preporuča šesterostruka vrijednost veće poluosi.

Usvajanje većeg područja iziskivalo bi znatno veći broj čvornih točaka i elemenata, te veći opseg numeričkog proračuna, pri čemu veća točnost u zadovoljavanju rubnih uvjeta nebi ujedno povećala točnost numeričkog rješenja. Za matematsko modeliranje podzemnih prostorija to ne bi imalo smisla, jer su moguće mnogo veće pogreške u procjeni fizikalno-mehaničkih karakteristika masiva.

Za eliptični otvor s odnosom poluosi  $b/a = 2/3$ , jer je to otprilike granični slučaj koji se javlja u praksi izrade podzemne prostorije, te odnos horizontalnog i vertikalnog pritiska  $K = 0,5$  uspoređena su naprezanja u težištima elemenata uz otvor (tablice 4 i 5), težištima elemenata vanjske konture (tablice, 6 i 7), u polovištima stranica elemenata uzduž osi y (tablica 8) i u polovištima uzduž osi z (tablica 9) za oba načina zadavanja rubnih uvjeta: silama (mke-S) i pomacima (mke-P).

Razlike naprezanja između teoretskog i numeričkog rješenja prikazane su u postocima od osnovnog vertikalnog opterećenja  $p_v = 1,0$ . U tablicama su prikazane srednje vrijednosti razlika naprezanja  $\Delta_{\text{prosječno}}$  (%). Najveća odstupanja pojavljuju se na mjestima najvećih koncentracija naprezanja.

Tablica 9. Usporedba naprežanja  $\sigma_z$  i  $\sigma_y$  uzduž osi z u polovištima stanica elemenata  
 Table 9. Comparison of stresses  $\sigma_z$  and  $\sigma_y$ , along axis z in midpoints of elements' sides

Elem.	Naprežanje Stress $\sigma_z$					Naprežanje Stress $\sigma_y$				
	Teorija elastičnosti Theory of elasticity	mke-S	$\Delta$ (%)	mke-P	$\Delta$ (%)	Teorija elastičnosti Theory of elasticity	mke-S	$\Delta$ (%)	mke-P	$\Delta$ (%)
65	0,431	0,367	6,4	0,429	0,2	0,064	0,088	2,4	0,089	2,5
66	0,603	0,605	0,2	0,618	1,5	0,294	0,276	1,8	0,270	2,4
67	0,621	0,683	6,2	0,668	4,7	0,506	0,450	5,6	0,439	6,7
68	0,677	0,768	9,1	0,723	4,6	0,589	0,516	7,3	0,508	8,1
69	0,786	0,863	7,7	0,804	1,8	0,566	0,524	4,2	0,511	5,5
70	0,860	0,933	7,3	0,865	0,5	0,545	0,524	2,1	0,497	4,8
71	0,910	0,982	7,2	0,908	0,2	0,530	0,531	0,1	0,480	5,0
72	0,942	1,017	7,5	0,937	0,5	0,520	0,552	3,2	0,461	5,9
		$\Delta_{\text{prosječno}}$ $\Delta_{\text{average}}$	6,5	$\Delta_{\text{prosječno}}$ $\Delta_{\text{average}}$	1,8		$\Delta_{\text{prosječno}}$ $\Delta_{\text{average}}$	3,3	$\Delta_{\text{prosječno}}$ $\Delta_{\text{average}}$	5,1

tracija naprežanja kod zadavanja rubnih uvjeta silama (mke-S).

Zadavanje rubnih uvjeta pomacima (mke-P) daje točnija naprežanja i uz otvor i na vanjskoj konturi, te da je pogreška u naprežanjima 4,3% manja.

Posebno je interesantna usporedba pomaka  $v$  i  $w$  čvornih točaka vanjske konture. Za rubne uvjete zadane pomacima (mke-P) potrebno je zadati u svakom čvoru konture po dva rubna elementa. Mke-P reproducira pomake koji su unaprijed zadani kao rubni uvjeti. Znatna odstupanja od teoretskog rješenja dobivamo u slučaju zadavanja rubnih uvjeta silama u vanjskim konturnim točkama (mke-S). U tablici 10 su odstupanja izražena u postocima od teoretske vrijednosti. Pogreške u pomacima na vanjskoj konturi pri zadavanju rubnih uvjeta silama (mke-S) iznose cca 11% od teoretske vrijednosti.

### Kriterij loma

Za analizu stabilnosti podzemne prostorije prilikom iskopa potrebno je definirati kriterij loma tj. stanje naprežanja pri kojem deformacije postaju neograničene. Za koherentna i nekoherentna tla pogodan je Mohr-

Coulombov kriterij loma, koji izražen intenzitetima glavnih naprežanja  $\sigma_1$  i  $\sigma_3$  glasi:

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin \varphi = c \cos \varphi \quad (12)$$

pri čemu je:  $c$  – kohezija [kN/m<sup>2</sup>]  
 $\varphi$  – kut unutarnjeg trenja [°]

U mehanici stijena za stjenjski masiv koristimo Hoek-Brownov kriterij loma oblika:

$$\sigma_1 = \sigma_3 + \sqrt{m\sigma_c\sigma_3 + s\sigma_c^2} \quad (13)$$

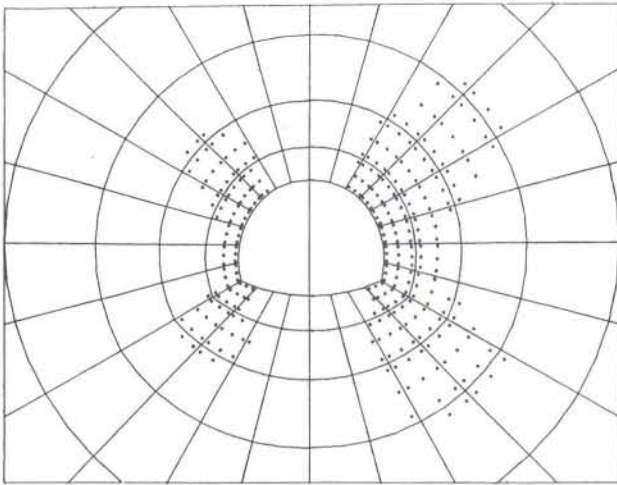
pri čemu je:

$\sigma_1$  – kritično tlačno naprežanje [kN/m<sup>2</sup>]  
 $\sigma_3$  – minimalno tlačno naprežanje [kN/m<sup>2</sup>]  
 $\sigma_c$  – jednoaksijalna tlačna čvrstoća stijene [kN/m<sup>2</sup>].

Konstante  $m$  i  $s$  kojima se definira lom stjenjskog masiva ovise o njegovoj raspucalosti. Za realne uvjete vrijednosti koeficijenta  $m$  kreću su u granicama od 0,5 do 5,0 a koeficijenta  $s$  od nula do jedan. Primjena ovog kriterija omogućava očučavanje područja u kojima dolazi do vlačnog loma odnosno klizanja.

Tablica 10. Usporedba pomaka  $v$  i  $w$  čvornih točaka vanjske konture  
 Tabl 10. Comparison of displacements  $v$  and  $w$  of outer contour nodal points

Čvor Node	Pomak Displacement $v$			Pomak Displacement $w$		
	Teorija elastičnosti Theory of elasticity	mke-S	$\Delta$ (%)	Teorija elastičnosti Theory of elasticity	mke-S	$\Delta$ (%)
9	-0,001439	-0,001284	10,8	0,000000	0,000000	0,0*
18	-0,001418	-0,001286	9,3	0,000893	0,000848	5,0
27	-0,001353	-0,001287	4,9	0,001759	0,001691	3,7
36	-0,001247	-0,001271	1,9	0,002571	0,002522	1,9
45	-0,001103	-0,001216	10,2	0,003306	0,003319	0,4
54	-0,000926	-0,001102	19,0	0,003940	0,004054	2,9
63	-0,000720	-0,000917	27,4	0,004454	0,004687	5,2
72	-0,000493	-0,000660	33,9	0,004833	0,005177	7,1
81	-0,000250	-0,000346	38,4	0,005065	0,005489	8,4
90	0,000000	0,000000	0,0	0,005143	0,005970	16,1
		$\Delta_{\text{prosječno}}$ $\Delta_{\text{average}}$	17,3		$\Delta_{\text{prosječno}}$ $\Delta_{\text{average}}$	5,6



Sl. 5. Prikaz zona plastifikacija dobiven varijacijom koeficijenta  $m$  za slučaj  $\sigma_c = 12.500 \text{ kN/m}^2$  i  $s = 0,5$

a)  $m=3,5$       b)  $m=0,5$

Fig. 5 Plastic zones obtained by variation of failure coefficient  $m$  for the case  $\sigma_c = 12,500 \text{ kN/m}^2$  i  $s = 0.5$

Odnos kritičnog i proračunskog naprežanja predstavlja prividni koeficijent sigurnosti. Da bi se utvrdilo postojanje ili nepostojanje plastične deformacije potrebno je stupanj efektivnog naprežanja promatrane točke usporediti s ekvivalentnim naprežanjem popuštanja. Pojava i način razvoja zone plastifikacije oko otvora tunela proveden je metodom konačnih elemenata. U tu svrhu je u program konačnih elemenata s elastičnim modelom ponašanja materijala implementiran Hoek-Brownov kriterij loma materijala koji najviše odgovara ponašanju stijena u slučaju iskopa tunela. Programom »Plast« utvrđuju se Gausove točke koje se plastificiraju prema ovom kriteriju. Rezultati i proračuni spremljeni u file.rez posebnim fortranskim programom konvertiraju se u script zapis pogodan za crtanje u AutoCAD-u. Kružićem su označene Gausove točke u kojima je došlo do pojave plastifikacije. Drugi način prikaza masiva u stanju tečenja je graničnom linijom, koja je u konačnom prikazu zaobljena opcijom »fit line«.

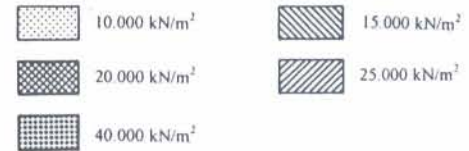
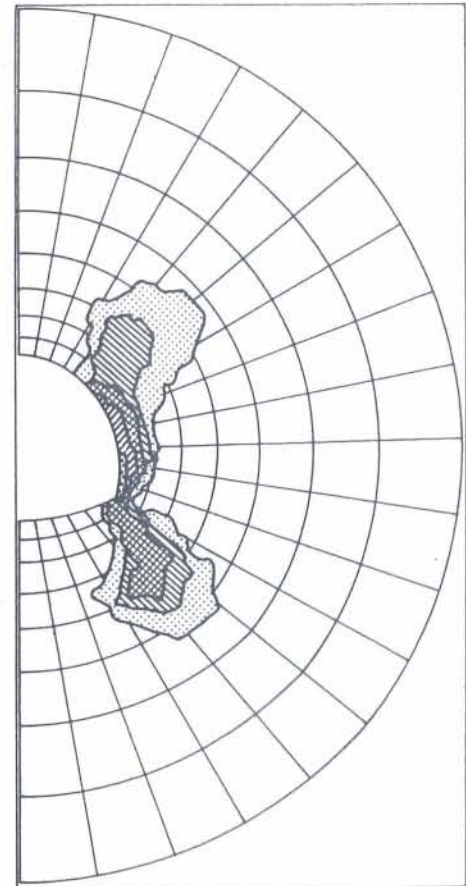
Kao primjer navodimo proračun stanja naprežanja i deformacija prilikom iskopa cestovnog tunela i to otvaranjem cijelog profila. Odabir potrebnog broja, oblika i dimenzija elemenata zasnovan je na prethodno provedenim upoređenjima.

Mreža konačnih elemenata je generirana i sastoji se od 144 elemenata. U ovom slučaju korišteni su serendipity elementi s 3x3 Gausove točke. S obzirom na vertikalnu os simetrije promatrana je samo polovina profila čime je pojednostavljeno zadavanje. Veličina promatranog područja usvojena je kao šesterostruka vrijednost veće dimenzije otvora. Stanje naprežanja na vanjskoj konturi, koja je kružnica, može se smatrati približno homogenim. Prema vanjskoj konturi usvojen je konstantan korak povećanja dimenzija elemenata, zbog sve manjih gradijenata deformacija i naprežanja. Vertikalno pomičnim osloncima u osi simetrija ostvarena je i simetrija pomaka. Kao opterećenje uzeta je težina nadsloja, tj. pritisak masiva koji odgovara primarnim naprežanjima:

$$p_v = \rho \times g \times z \quad (14)$$

$$p_h = k \times p_v \quad (15)$$

Djelovanje gravitacijskog opterećenja elemenata modelirano je konceptom početnih naprežanja u



Sl. 6. Prikaz graničnih linija za slučaj  $m = 3,5$ ;  $s = 0,35$  uz različite vrijednosti jednoaksijalne čvrstoće  $\sigma_c$

Fig. 6. Plastic zones represented by contour lines for the cases  $m = 3,5$ ;  $s = 0,35$  and various values of uniaxial strength  $\sigma_c$

Gausovima točkama bez pojave slijeganja, koji je jedino prihvatljiv u analizi mehanike stijena i tla. Pretpostavljena je visina nadsloja 100 m.

U proračunu su usvojene slijedeće vrijednosti stjen-skog masiva:

gustoća stijene	$\rho = 2,70 \text{ t/m}^3$
modul elastičnosti	$E = 5000 \text{ MN/m}^2$
Poissonov koeficijent	$\nu = 0,3$
odnos horizontalnog i vertikalnog pritiska $K = p_h/p_v = 0,5$	
jednoaksijalna čvrstoća	$\sigma_c = 10\,000 - 40\,000 \text{ kN/m}^2$
koeficijent	$m = 0,5 - 5$
koeficijent	$s = 0,1 - 1$

Zone plastifikacije za različite vrijednosti parametra stjen-skog masiva  $m$  uz  $\sigma_c = 12500 \text{ kN/m}^2$  i  $s = 0,5$  prikazane su na slici 5. Zbog simetrije, zone plastifikacije su iscrtane samo za polovinu presjeka tunela. Na slici 6 dan je prikaz graničnih linija u ACAD-u za slučaj  $m = 3,5$  i  $s = 0,35$  uz različite vrijednosti jednoaksijalne čvrstoće  $\sigma_c$ . Svaka linija u stvari predstavlja određeni koeficijent sigurnosti prema Hoek-Brownovom kriteriju loma.

## Zaključak

Provedena je analiza stanja naprezanja i deformacija uz otvor po metodi konačnih elemenata (mke). Prema rješenjima teorije elastičnosti kao optimalna veličina i obuhvatnog područja preporuča se šesterostruka vrijednost veće poluosi. Usporedba rezultata numeričkih proračuna s teoretskim rješenjem ukazuje na to da zadavanje rubnih uvjeta pomacima (mke-P) daje bolju aproksimaciju stanja naprezanja i deformacija od zadavanja rubnih uvjeta silama (mke-S).

Za proračun stanja naprezanja i deformacija uz otvor tunelskog profila usvojen je Hoek-Brownov kriterij loma. Implementiranjem Hoek-Brownov kriterija loma u program konačnih elemenata za elastičan kontinuum poboljšana je analiza stabilnosti otvora prilikom iskopa tunela. Proračuni stabilnosti otvora provedeni su varijacijom fizikalno-mehaničkih karakteristika masiva. Mjesta na kojima se pojavljuju i način na koji se proširuju zone plastifikacije prikazani su grafički.

Za mehaničke karakteristike stijene/tla treba uzeti u obzir moguća odstupanja od prosječnih vrijednosti. In-situ mjerenjima na probnim dionicama treba provjeriti pretpostavke proračuna i koristiti ih za poboljšanje računskog modela.

Primljeno: 2000-05-10

Prihvaćeno: 2000-09-21

## LITERATURA

- Aliabadi, M. H. and Rooke, D. P. (1991): Numerical Fracture Mechanics, Kluwer Academic Publications, 276 pp, London.
- Desai, C. S. and Christian, J. T. (1977): Numerical Methods in Geotechnical Engineering, McGraw-Hill, New York
- Frgić, L., Magerle, M. and Tor, K. (1997): Influence of Boundary Conditions on Stress and Strain Results near Underground Rooms, Proceedings of the 2<sup>nd</sup> Congress of Croatian Society of Mechanics, 157-164, Supetar.
- Gudehus, G. (1977): Finite Elements in Geomechanics, John Wiley & Sons, London.
- Hoek, E. (1999): Rock Engineering, cours notes, Author/Internet, Vancouver.
- Hoek, E. and Brown E. T. (1980): Underground excavation in rock, Institution of mining and metallurgy, 527 pp, London
- Mang, H. and Kropik, C. (1995): Computational Mechanics of the Excavation of Tunnels, NATM, IACS, Wien.
- Hudec, M. (1985): Neka razmišljanja o matematičkim modelima u mehanici stijena i geomehanici, VI. Simpozij Jugoslavenskog društva za mehaniku hribin i podzemna dela, Zbornik radova, knjiga 2, 39-44, Velenje.
- Hudec, M. (1983): Mehanika stijena - Temeljenje - Podzemni radovi, Statika obloga podzemnih prostorija, Liber, 905-998, Zagreb.
- Naylor, D. J., Pande, G. N., Simpson, B. and Tabb, R. (1991): Finite elements in geotechnical engineering, Pitman Press Limited, Swanse.
- Pöschl, T. (1921): Über eine partikuläre Lösung des biharmonischen Problems für den Aussenraum der Ellipse, Zeitschr. f. Math.
- Savin, G. N. (1961): Stress Concentration around Holes, Pergamon Press.
- Zienkiewicz, O. C. (1977): The Finite Element Method, McGraw-Hill Book Co., U.K.
- Zienkiewicz, O. C. and Cheung, Y. K. (1967): The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics, McGraw-Hill Book Co., U.K.

## Stress and Strain Analysis around Underground Room

K Tor, L. Frgić and A. Jaguljnjak-Lazarević

One of the important factor in underground room planning is stress analysis around underground room. By the profile opening of underground room the massif turns from the initial state of stress into the new secondary. Thereby the concentration of normal circular stresses occurs, while shearing and normal radial stresses disappear at the inner boundary. The calculation of stress and strain surrounding the underground room is based on the fact that the influence of the opening on certain distance disappears completely. The massif outside the influence zone is in the primary stress condition.

The secondary stress and strain state depending upon the rate of excavation and support work progress as well as upon some other conditions in the zone of the excavation face. The section of the rock that has been just excavated cannot be simultaneously supported. The computation of stress and strain condition for such unsupported section is done for the plane state of strain.

The design method of primary supports depends upon the local conditions, rock properties and the procedures applied in excavation and support. By modelling the actual condition the behaviour of the underground room during excavation may be predicted.

The occurrence of natural materials i.e rock and/or soil, in the complex geological processes result in a very wide range of physical-mechanical parameters and in a heterogeneity of the area. In order to compute the stress and strain conditions in direct surrounding of the opening and the impact of the opening on the surroundings, there is necessary to know bigger number of material characteristics of the rock, which define mechanical elastic, plastic and viscous properties. The characteristics can be established only, when particular location is reached by excavation. Unfortunately they are valid for only one limited massif area, so generally they have to be assumed on the experience basis.

It is not possible, however, to cover the entire complexity of the problem and therefore series of simplifications need to be adopted.

The criteria required for the safety determination can be based on:

- Displacements and relative deformations
- Stresses in rock/soil, primary support and lining, degree of plastic behaviour utilization and
- Ultimate bearing capacity.

The safety factors for each of the mentioned cases can be different.

However, the first information about the occurrence around the opening can be determined for an elastic case. To compute the strains and stress around the opening, an area around the opening is to be considered.

Underground room at particular depth is observed as an opening in infinite plate.

The solution of stress condition for infinite plate with elliptical opening was established Poeschl (1921). The opening size is given by half-axis of ellipse  $a$  and  $b$ . Uniform load  $p$  closes with bigger half-axis of ellipse  $a$ , angle  $\pi/2 + \alpha$  (Fig 1). The stress function  $\Phi$  by expression (1) is the function of elliptic coordinates  $\xi$  and  $\eta$ . It satisfying Maxwell's differential equation (2) and boundary conditions by expression (3) on the Fig 2. The stress components in elliptic coordinates are given by expression (4, 5, 6 and 7).

For the calculation of secondary stress condition the program is composed. Program calculates stresses in particular points on the basis of input data (half-axis of the ellipse  $a$ ,  $b$ , load  $p$  and angle  $\alpha$ ).

Theoretical solution is fined to determine dimensions of the area in which the opening existence provokes certain alterations in the stress condition related to the primary condition.

The calculation is performed for different ratio of ellipse half-axis  $b/a$  and ratio of horizontal and vertical load  $p_H/p_V$ . Intersection of confocal ellipses  $\xi = \text{constant}$  and confocal hyperbolas  $\eta = \text{constant}$  are chosen as nodal points, defining the elements. The network of quadrilateral elements is accepted. Element dimensions are increased with constant step toward outer boundary. This does not cause a slighter approximation, since the state of stress on the outer contour boundary approximates the homogenous one, with smaller gradients. The outer contour has form of an ellipse - confocal with an opening and very approximately corresponding to the circle. The symmetry of displacement and load is provided with movable supports in the axis of symmetry.

The boundary conditions on the outer contour are given in two ways:

- a) Giving the forces in the points of contour (mke-S)
- b) Giving the displacements in the points of contour (mke-P).

The forces for the points of the outer contour are determined by trapezoidal rule by expression (8) and (9) and on Fig. 3. The displacements of contour points are obtained by integration of deformation components by expression (10) and (11).

For an elliptical opening with the ratio of half-axis  $b/a = 1/2$  the network with 72 quadrilateral elements is accepted (Fig 4). The values of stress  $\sigma_y$  and  $\sigma_z$  along the axis's  $y$  and  $z$  are given in Table 1 and 2. The differences between the state of stress for the case of opening and the primary state without opening (expressed in percentage) illustrates Table 3. Similar results are obtained also for other relations of the half-axis  $a/b$  and loads  $p_h/p_v$ , so for the value of covered area a six times value of the greater half-axis is recommended.

Certain area around the opening must be included in the FEM model. Better results can be expected with a larger area, but this would require a considerably bigger number of nodal points and elements, as well as of the scope of numerical calculation itself. This would not have any much sense for mathematical modelling of underground rooms, because much bigger errors are possible in load estimation as well as by the assuming mechanical characteristics.

Stresses  $\sigma_y$  and  $\sigma_z$  in centroids of elements along the opening and of the outer contour for the ratio half-axis  $b/a = 2/3$  and load  $p_h/p_v = 0.5$  are compared with the theoretical results (Tables 4-7). The differences in stress between the theoretical and the numerical solution are presented in percentages of basic vertical load  $p_v = 1, 0$ . The Table illustrates the mean values of stress differences  $\Delta_{\text{average}} (\%)$  as well. The most expressive is concentration of stress along the axis  $y$  or  $z$ . Comparison of stresses  $\sigma_z$  and  $\sigma_y$  in centroids of elements along the axis  $y$  and  $z$  in midpoints of elements' sides and differences according to mke-S and mke-P are given in Tables 8 and 9.

For the boundary conditions given by displacements (mke-P) it was necessary to assign boundary elements.

Noticeable is the comparison of the nodal point's displacements of the outer contour. Mke-P reproduces the displacements, which are given as boundary conditions in advance. Considerable differences from theoretical solution are obtained in case of the boundary conditions given by the forces in outer contour points (mke-S). In Table 10 deviations are expressed in percentages of theoretical values. The error in displacements on the outer contour in giving boundary conditions with forces (mke-S) are in average 11 % theoretical value. For the stability analysis of an underground room during excavation the failure criterion is to be defined i.e. the stress at which deformations become unlimited. For cohesive and non-cohesive soils the Mohr-Coulomb criterion of failure is applicable by expression (12). In rock mechanics the Hoek-Brown failure criterion is used for rock by expression (13). The constants  $m$  and  $s$  by which the rock failure is defined are dependent on the rock fissuring. For the real conditions depending on the degree of rock fissuring the value of coefficient  $m$  is ranging from 0.5 to 5 and coefficient  $s$  from zero to one.

The relationship between the critical and design stress represents an apparent coefficient of safety. In order to establish the occurrence or non-occurrence of plastic deformation the degree of effective stress of the point under consideration should be compared to the equivalent stress relaxation.

The occurrence and the progress of the plastic zone at the tunnel opening has been determined by the finite element method. For that purpose into the finite element programme with the elastic model of material behaviour the Hoek-Brown criterion of material failure has been introduced being the most appropriate for the case of rock behaviour during tunnel excavation. The Gauss points plastified after the above criterion are established by the »Plast« programme. The Gauss points in which plastic deformation has taken place are designated by dots. The other representation of the rock/soil in the state of

flow is given by contour line. In the final representation the contour line is curved by the ACAD »fit line« option.

The computation of stress and strain during the excavation of road tunnel by opening the overall cross-section is illustrated.

The finite element network has been generated consisting of 144 serendipity elements. Considering vertical axis of symmetry solely half cross-section is considered. The size of the area under consideration has been adopted as a six time value of the greater opening dimension. The choice is based on the previously comparisons. The stress condition at the outer contour which is a circle may be considered about homogeneous. Towards the outer contour a constant ratio of the increase of element dimensions has been adopted because the stress and strain gradients become more and more reduced. By vertical movable supports in the axes of symmetry also the symmetry of displacements has been achieved. The acting of the elements gravity loading has been modelled after the concept of initial stresses in Gauss points without the occurrence of settlement. The weight of overburden i.e. the rock/soil pressure corresponding to the initial stresses has been taken as load by expression (14) and (15). In the analysis are adopted an overburden height of  $h = 100$  m and the following values of the rock parameters:

Density	$\rho = 2.7 \text{ t/m}^3$
Modulus of elasticity	$D = 5,000 \text{ MN/m}^2$
Poisson's ratio	$\nu = 0.30$
Uniaxial strength	$\sigma_c = 10,000 - 40,000 \text{ kN/m}^2$
Coefficient	$m = 0.5 - 5$
Coefficient	$s = 0.1 - 1$

The plastic zones obtained by variation of failure coefficient  $m$ , for case  $\sigma_c = 12,500 \text{ kN/m}^2$  and  $s = 0.5$  are illustrated in Fig. 5. For the purpose of symmetry the plastic zones are drawn for half tunnel cross-section. In Fig. 6 the representation of the contour lines the cases  $m = 3.5$ ;  $s = 0.35$  and for various values of uniaxial strength  $\sigma_c$ . In fact, every line represents a certain coefficient of safety after the Hoek-Brown failure criterion.

The state of stresses and strains around an opening is analysed by Finite Element Method (FEM). Theoretical solution is fined to determine dimensions of the area in which the opening existence provokes certain alterations in the stress condition related to the primary condition. Comparison of the results according to the theory of elasticity with the results of numerical analysis indicates, that boundary conditions given by displacements (mke-P) results with more accurate stresses both on the outer contour and around the opening. The error in stresses is 4.3% smaller. The greatest differences occur on the places of the greatest stress concentration, when the boundary conditions are given by forces (mke-S).

The error in displacements on the outer contour in giving boundary conditions with forces (mke-S) are in average 11% theoretical value. Boundary conditions given by displacements are resulting with better approximation in the state of stress and strains.

The analysis of stress and strain conditions at the opening of the tunnel cross-section was carried out after FEM. The Hoek-Brown failure criterion was adopted as the most appropriate for the respective problem. By introducing the Hoek-Brown failure criterion into the finite element programme applied to elastic continuum the stability analysis of opening during tunnel excavation has been improved. The results of the opening stability analysis are given by graphs showing the places where the plastic zones occur, the way of their extending and the places where the failure of rock material may be expected.

At the rock/soil mechanical properties the possible deviation from the mean values is to be observed. By in-situ measurements carried out at test sections the computation assumptions shall be checked and then used to improve design model.