IGRAJMO SE KOCKICAMA

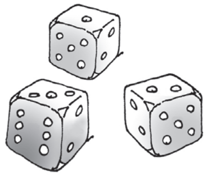
Željko Brčić, Vinkovci

Danijel i njegov mlađi brat Ivan dobili su vrećicu bombona. Umjesto da ih međusobno podijele na jednake dijelove, odlučili su se zabaviti nekom igrom. Onaj tko bude bolji u igri, pojest će i više bombona.

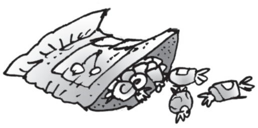
7	9	18	4
13	14	12	6
3	11	16	10
15	8	5	17

Slika 1.

Dječaci su uzeli tri kockice kakvima se obično igra „Čovječe, ne ljuti se”. Primijetili su da zbrajanjem brojeva na trima kockama mogu dobiti točno šesnaest rezultata: od najmanjeg 3 (kada sve tri kockice pokazuju 1) do najvećeg 18 (sa svim šesticama). Stoga su na komadu papira nacrtali kvadrat, podijelili ga na šesnaest jednakih dijelova i svaki drugi kvadratić obojili, poput šahovske ploče. U kvadratiće su nasumce upisali po jedan broj od 3 do 18, te su tako dobili igraću ploču prikazanu na slici 1.



Danijelova i Ivanova igra sastojala se u tome da dječaci naizmjenično bace tri kocke i da svaki put zbroje brojeve koje kocke pokazuju. Dogovor je bio da ako se dobiveni zbroj nalazi na bijelome polju – pobjednik bude Danijel (i on smije pojesti jedan bombon), a ako je na crnome polju – pobjednik je Ivan (i bombon pripada njemu). Igra će biti gotova kada budu pojedeni svi bomboni.

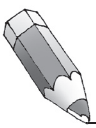


Dogodilo se da je od prvih pet bombona Danijel pojeo četiri, a Ivan jedan. Braća su se zapitala je li se to dogodilo slučajno ili je igra više naklonjena Danijelu? Može li Ivan u nastavku igre sustići brata ili će se Danijelova prednost sve više povećavati?

Najprije su shvatili da to što su pravedno raspodijelili 16 mogućih zbrojeva na dva jednaka dijela nije jamstvo pravednosti same igre. Primjerice, zbroj 3 može se ostvariti samo ako sve tri kockice pokažu jedinicu, dakle 1 + 1 + 1, dok se zbroj 5 može dobiti na 6 načina, kao 1 + 1 + 3, 1 + 3 + 1, 3 + 1 + 1, 1 + 2 + 2, 2 + 1 + 2 i 2 + 2 + 1. Ako je jedan igrač izabrao broj 3, a drugi broj 5, očito je drugi igrač u prednosti jer će se njegov zbroj pojavljivati šest puta češće.

Kao što su raspisali sve mogućnosti za dobivanje zbrojeva 3 i 5, isto su napravili i za sve ostale moguće rezultate. Izbrojili su na koliko se načina može pojaviti pojedini zbroj i sve prikazali u tablici (broj u drugom redu pokazuje na koliko se načina može dobiti zbroj iznad njega):

3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1



Matka 89.indd 2 9.9.2014. 19:36:06

Četvrti stupac u tablici, primjerice, pokazuje da se pri bacanju triju igraćih kocki zbroj 6 može ostvariti na 10 različitih načina: 4 + 1 + 1, 3 + 2 + 1, 3 + 1 + 2, 2 + 3 + 1, 2 + 2 + 2, 2 + 1 + 3, 1 + 4 + 1, 1 + 3 + 2, 1 + 2 + 3 i 1 + 1 + 4. Ukupan broj različitih rasporeda brojeva na trima kockama je 216. Naime, svaki se broj na jednoj kocki može kombinirati sa svakim od brojeva na preostalim dvjema kockama, a kako svaka kocka ima šest strana (brojeva), ukupan broj mogućnosti dobije se množenjem $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$. Kada se zbroje svi brojevi upisani u drugom redu tablice, dobije se upravo 216, što znači da nije izostavljena niti jedna moguća kombinacija brojeva.

Nakon što su proučili početni, nasumce odabrani raspored brojeva (prikazan na slici 1.), utvrdili su da taj raspored zaista pogoduje Danijelu i da njegovo početno vodstvo u igri nije stvar slučajnosti. Njegovih 8 brojeva (na bijelim poljima) može se ostvariti na 144 načina, dok se Ivanovi brojevi (na crnim poljima) mogu dobiti na samo 72 načina. Dakle, vjerojatnost da pri svakom pojedinom bacanju dobijemo zbroj na bijelom polju dvostruko je veća od one druge mogućnosti. Stoga je za očekivati da će i broj bombona koji će pripasti Danijelu biti dvostruko veći od broja Ivanovih bombona. U idealnom slučaju, omjer broja Danijelovih i Ivanovih bombona trebao bi biti 2 : 1, pa bi od primjerice 30 bombona iz vrećice, 20 trebalo pripasti Danijelu, a Ivanu samo 10.

Vjerojatnost pobjede jednog i drugog brata pri jednom bacanju triju kocaka može se iskazati i brojčano. Vjerojatnost da će bombon osvojiti Danijel je $144 : 216 = 0.66 = 66.7\ \%$, dok je za Ivana vjerojatnost $72 : 216 = 0.33 = 33.3\ \%$.

Kada su sve shvatili, Danijel i Ivan odlučili su promijeniti nasumce odabrani raspored mogućih zbrojeva pri bacanju triju igraćih kocki te napraviti dvije nove verzije. Jednu pravednu – u kojoj će obojica imati iste šanse, po 50 %, i drugu koja će maksimalno ići u korist jednom igraču i kojom će se poslužiti kada s tatom budu odlučivali tko će prati posuđe nakon ručka.

7	5	10	18
12	6	4	13
3	14	9	15
11	16	8	17

Slika 2.

Kao što se vidi iz tablice, brojevi u donjem redu simetrično su raspoređeni pa je vrlo jednostavno napraviti pravedan izbor brojeva. Danijel, primjerice, može uzeti sve zbrojeve od 3 do 10, a Ivan od 11 do 18. Ili, Danijel može odabrati sve parne, a Ivan sve neparne brojeve. Braća su se odlučila na kombinaciju navedenih načina te su tako došli do „pravedne ploče” prikazane na slici 2.

4	10	15	12
13	18	7	6
16	14	3	9
8	5	11	17

Slika 3.

Napravili su zatim i „nepravednu ploču” (slika 3.) tako da su na crnim poljima tati dali one zbrojeve koji se pojavljuju najmanji broj puta (3, 4, 5, 6, 15, 16, 17 i 18), a ostalih osam brojeva ostavili su sebi (na bijelim poljima). Ujedno su izračunali da je vjerojatnost njihove pobjede u ovakvoj „igri” $176 : 216 = 0.815 = 81.5\ \%$, a vjerojatnost tatine pobjede samo $40 : 216 = 0.185 = 18.5\ \%$. Ako sve bude kako su zamislili, tata će morati prati posuđe četiri puta češće nego njih dvojica. Naravno, još im samo ostaje smisliti kako osigurati da brojevi na bijelim poljima uvijek pripadnu njima.