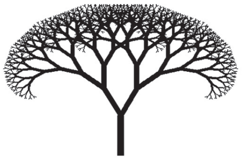
TROKUT SIERPIŃSKOG

Jakov Šikić, XV. gimnazija, Zagreb

Trokut Sierpińskog zasigurno je jedan od najjednostavnijih primjera fraktala, ali zato najpoznatijih i najprepoznatljivijih. Toliko je prisutan da ste ga sigurno vidjeli u nekom obliku, ali možda ne znate da je to trokut Sierpińskog. Može se reći da je trokut Sierpińskog postao simbolom fraktala. Trokut Sierpińskog može se dobiti na različite načine, ali najjednostavniji je da se uzme jednakostraničan trokut te da se unutar njega napravi novi trokut čiji su vrhovi u polovištima stranica prvobitnog trokuta. Dobiveni trokut izbacimo pa nastanu nova tri. To se pravilo ponavlja beskonačno mnogo puta pa se tako dođe do trokuta Sierpińskog.

Što su fraktali?

Fraktali su beskonačni složeni uzorci koji su samoslični kroz različite korake. Drugim riječima, fraktale bismo najjednostavnije objasnili kao sliku koja je beskonačna. Koliko god povećavali sliku, uvijek ćemo dolaziti do istih oblika, i baš to nam kazuje da su fraktali samoslični kroz različite korake. Za primjer možemo uzeti trokut Sierpińskog. Dakle, povećavamo li recimo zadnju sliku u gornjem nizu sve više i više, doći ćemo do sličnog, u ovom slučaju jednakostraničnog trokuta. Fraktali su kao oblici presloženi da bi se mogli opisati običnom Euklidovom geometrijom pa se radi njih počela razvijati potpuno nova grana u geometriji, nazvana *fraktalna geometrija*. Povod za razvoj fraktalne geometrije i proučavanje fraktala bila je činjenica da se mnoge stvari u prirodi ne mogu opisati običnom geometrijom. Mnoge stvari u prirodi zapravo su fraktali, npr. biljke, građa živih bića...



Fraktalna geometrija započela je svoj razvoj u 20. st., no odmah na početku nije bila priznata u matematičkom svijetu. Danas je fraktalna geometrija ravnopravna grana matematike koja je dovela do mnogobrojnih znanstvenih otkrića koja su imala velike primjene u životu čovjeka. Najbolji primjer za to su antene u mobitelima. Budući da mobitel mora komunicirati s raznim uređajima, trebalo bi mu više običnih antena jer sa svim uređajima ne može komunicirati na istoj frekvenciji. Tada su znanstvenici otkrili zapanjujuću stvar: kada se antena napravi u obliku fraktala, ona može primati veliki raspon frekvencija pa mobitel može normalno funkcioniratiti samo s jednom antenom.

Opseg i površina trokuta Sierpińskog

Zadatak 1. Koliko trokuta ima u pojedinom koraku?

korak	1	2	3	4	5
broj preostalih (crnih) trokuta	1	3			

- Izračunajte broj trokuta u desetom, petnaestom i dvadesetom koraku.
- Pronađite vezu između uzastopnog množenja broja 3 i broja trokuta u pojedinom koraku.

Zadatak 2. Duljina stranice početnog trokuta je 1 cm. Izračunajte duljine stranica crnih trokuta, opseg pojedinog trokuta i zbroj opsega svih zajedno u pojedinom koraku.

korak	1	2	3	4	5
duljina stranice crnih trokuta	1 cm	$\frac{1}{2}$ cm			
opseg pojedinog crnog trokuta	3 cm	$\frac{3}{2}$ cm			
zbroj opsega svih crnih trokuta	3 cm	$\frac{9}{2}$ cm			

- Promotrite brojeve koje ste dobili u posljednjem redu tablice. Koliko se puta u brojniku razlomka pojavljuje broj 3 u pojedinom koraku? Koliko se puta u pojedinom koraku u nazivniku razlomka pojavljuje broj 2?

- Napišite razlomak koji predstavlja zbroj opsega svih crnih trokuta u osmom koraku.

Zadatak 3. Prisjetimo se da površinu jednakostraničnog trokuta čija je stranica duljine a računamo po formuli $p = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Duljina stranice početnog trokuta je 1 cm. Izračunajte površinu crnih trokuta u pojedinom koraku.

korak	1	2	3	4	5
duljina stranice	1 cm	$\frac{1}{2}$ cm			
površina	$\frac{\sqrt{3}}{4}$ cm^2	$\frac{3\sqrt{3}}{16}$ cm^2			

- Opišite koliko se puta u pojedinom koraku u brojniku razlomka kao faktor pojavljuje broj 3, a koliko se puta u nazivniku razlomka kao faktor pojavljuje broj 4?
- Napišite razlomak koji predstavlja površinu u osmom koraku.

Opće formule za opseg i površinu

U formuli za opseg u n-tom se koraku u brojniku broj 3 kao faktor pojavljuje n puta, a u nazivniku se broj 2 kao faktor pojavljuje $n - 1$ puta. To možemo zapisati ovako:

$$o = \frac{3^n}{2^{n-1}} = 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

U formuli za površinu u n-tom se koraku u brojniku broj 3 kao faktor pojavljuje $n - 1$ puta, a u nazivniku se broj 4 kao faktor pojavljuje n puta. To možemo zapisati ovako:

$$p = \frac{3^{n-1}\sqrt{3}}{4^n} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

Možemo uočiti da u formuli za opseg imamo broj $\frac{3}{2}$ koji je veći od 1 pa ćemo njegovim samoumnožavanjem dobivati sve veći i veći broj. Za razliku od opsega, u formuli za površinu imamo broj $\frac{3}{4}$ koji je manji od jedan, te ćemo njegovim samoumnožavanjem dobivati sve manji i manji broj. Zbog toga će se opseg u svakom koraku povećavati, a površina će postajati sve manja i manja. Zato je površina trokuta Sierpińskog nula, a opseg beskonačno velik.

Rješenja zadataka provjerite na str. 70.