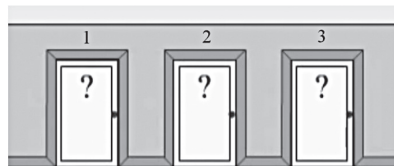
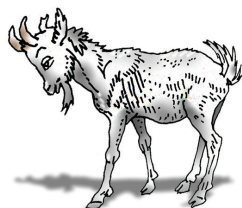


## MONTY HALL PROBLEM

Marina Čičak, Vrpolje

Dragi Matkači, u Matki broj 80 (lipanj 2012.) mogli ste čitati o igri na sreću u kojoj vam je dano da birate između triju vrata. Kada odaberete jedna vrata, osvajate ono što je iza njih. Prisjetimo se: poznato je da je iza jednih vrata moderni automobil, a iza preostalih dvaju vrata nalazi se po jedna koza. Naravno, ne znate iza kojih se vrata što nalazi. Vi ste odabrali jedna vrata, recimo vrata broj 3. Voditelj tada otvara jedna od preostalih vrata, i to ona iza kojih se nalazi koza; neka to budu npr. vrata broj 1 (voditelj, naravno, zna iza kojih se vrata krije automobil). Zatim vam daje mogućnost da se predomislite: „Želite li ostati pri prvom izboru ili ćete ipak izabrati vrata broj 2?”



U spomenutom članku dani su rezultati ove igre prikupljeni na više od 16 000 000 odigranih igara na internetskoj stranici <http://www.betweenwaters.com/probab/monty/montmainD.html>, iz kojih je vidljivo da se vjerojatnost osvajanja automobila dvostruko povećava ukoliko promijenimo izbor vrata. Intuicija nam kaže da promjena vrata neće povećati šanse za osvajanje automobila. Naime, iza jednih preostalih vrata je koza, a iza drugih automobil, pa su šanse da svaka od vrata kriju automobil jednake 50%. Svojim znanjem matematike mi ćemo to potvrditi ili opovrgnuti, ne ulazeći previše u teoriju vjerojatnosti.

Vratimo se u povijest. Odakle uopće ovo pitanje? U američkom časopisu *Parade* svojevremeno je postojala kolumna *Pitajte Marilyn*. U njoj je Marilyn vos Savant (rođena 11. kolovoza 1946.) odgovarala na matematičko – logička pitanja svojih čitatelja. Za Marilyn to nije bio problem jer je ona žena s najviše ikada postignutih bodova na IQ testu (uključujući i muškarce i žene). Godine 1990. postavljeno joj je isto pitanje koje je postavljeno i vama, a proizašlo je iz stvarne TV-igre koju je vodio Monty Hall.

Marilyn je svojim čitateljima savjetovala da svakako prihvate ponudu i promijene vrata prije konačnog otvaranja. Objasnila im je da se time šansa za dobitak s  $\frac{1}{3}$  povećava na  $\frac{2}{3}$ , odnosno udvostručuje se.

Marilynin odgovor čitateljima izazvao je burne reakcije šire javnosti, ali i tadašnjih matematičara i znanstvenika. U većini pisama u vezi s *Monty Hall problemom* pokušavali su joj objasniti da je pogriješila.



Evo nekih njihovih reakcija:

*Već je dovoljno matematičke nepismenosti u ovoj zemlji i ne treba nam da je najveći IQ i dalje povećava. Sramota!*, dr. S. Smith, Sveučilište Florida

*Šokiran sam da i nakon što su vas tri matematičara ispravila, još uvijek ne vidite svoju pogrešku.*, K. Ford, Državno Sveučilište Dickinson

*Siguran sam da ćete primiti mnoga pisma srednjoškolaca i studenata. Zadržite neke adrese, možda vam pomognu oko sljedećih kolumni.*, dr. W. R. Smith, Državno Sveučilište Georgia

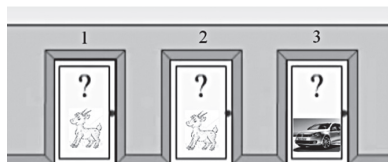
*Kada bi svi ovi doktori znanosti bili u krivu, nacija bi bila u ozbiljnim problemima. Priznajte svoju grešku.*, dr. E. Harman, Istraživački Institut Vojske SAD-a

Pokušajmo utvrditi tko je bio u pravu. Napraviti ćemo mali eksperiment da vidimo kolika je vjerojatnost da osvojite automobil u slučaju da:

1. ostanete pri prvom izboru,
2. zamijenite vrata.

### 1. Pretpostavimo da ste ostali pri prvom izboru.

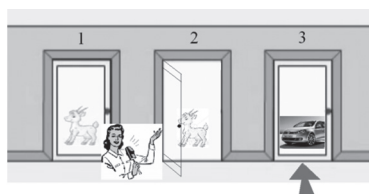
Na početku igre izabrali ste vrata. Budući da su vrata troja, a iza samo jednih je automobil, vjerojatnost da je iza odabranih vrata automobil jednaka je  $\frac{1}{3}$ . Budući da dvojica vrata skrivaju koze, vjerojatnost da ste izabrali kozu jednaka je  $\frac{2}{3}$ .



Ako ostanete pri svom izboru vrata, svejedno vam je što će voditelj otvoriti jedna od preostalih vrata da vam pokaže gdje se nalazi koza jer se vjerojatnosti za osvajanje pojedine nagrade nisu promijenile: vjerojatnost osvajanja automobila ostaje  $\frac{1}{3}$ , a vjerojatnost da ste osvojili kozu ostaje  $\frac{2}{3}$ .

### 2. Pretpostavimo sada da ste zamijenili vrata nakon što vam je voditelj dao izbor.

Ako ste prvi put odabrali vrata iza kojih je automobil, iza obiju preostalih vrata nalaze se koze, a voditelj će vam otvoriti jedna od njih.

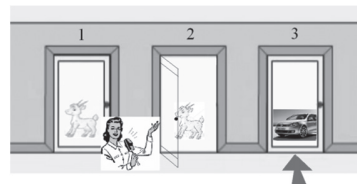
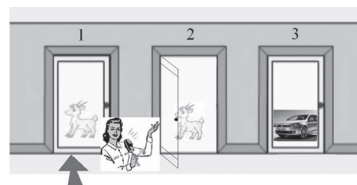
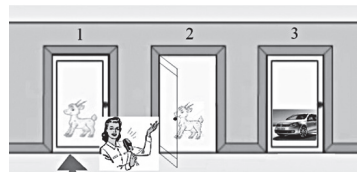


Budući da ste odlučili zamijeniti svoj prvi izbor, promjenom vrata osvajate kozu (barem ne idete kući praznih ruku).

Primijetimo, ovo vrijedi samo u slučaju da smo u prvom izboru odabrali automobil, a vjerojatnost da se to dogodilo jednaka je  $\frac{1}{3}$ .

No, što ako ste prvi put odabrali vrata iza kojih je koza? Vjerojatnost tog slučaja jednaka je  $\frac{2}{3}$ . Iza jednih preostalih vrata je koza, a iza drugih je automobil.

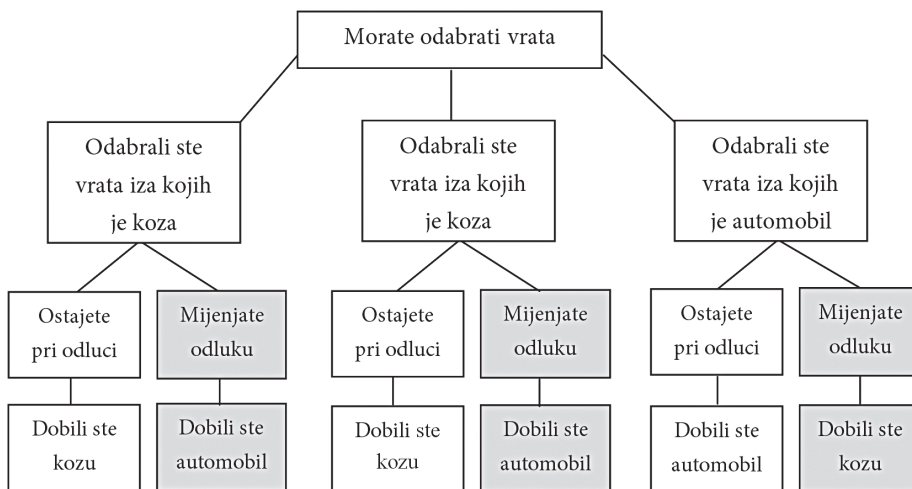
To znači da postoje samo jedna vrata koja vođitelj može otvoriti da vam pokaže kozu, a vi promjenom izbora na preostala vrata osvajate automobil.



Zaključujemo da je vjerojatnost osvajanja automobila, ako zamijenimo vrata nakon što nam vođitelj dao tu mogućnost, jednaka  $\frac{2}{3}$ , tj. dvostruko veća nego da ste ostali pri prvom izboru.

Čini se da je Marilyn, suprotno mišljenju mnogih, ipak bila u pravu! Jedino ostaje pitanje jeste li stvarno htjeli automobil ili pak kozu... ☺

Ima li onih kojima još uvijek nije jasno? Napravimo stablo svih mogućih ishoda:



Uočite da, ako promijenite prvi izbor vrata, u 2 od 3 slučaja osvajate automobil. Ako pak ostanete pri prvom izboru, osvojiti ćete automobil samo u jednom od tri slučaja.

Sada sami odgovorite na sličan problem koji slijedi.

**Zadatak.** Tri zatvorenika, osuđena na smrt, smještena su u zatvoru u odvojenim ćelijama. Guverner je na slučajnan način odabrao jednoga od njih da bude pomilovan. Čuvar zatvora zna koji je zatvorenik odabran, ali im to ne smije reći. Zatvorenik A, u želji da što prije dozna svoju sudbinu, zamolio je čuvara da mu na sljedeći način kaže tko će od njih trojice biti pomilovan: „Ako će C biti pomilovan, reci mi B-ovo ime. Ako će B biti pomilovan, reci mi C-ovo ime. Ako sam ja taj koji će biti pomilovan, na slučajnan način odaberi jednog od ostalih i reci mi njegovo ime.” Čuvar mu je tada šapnuo: „B” i otišao.

Zatvorenik B će sigurno biti smaknut. Jedan od preostale dvojice zatvorenika također će biti smaknut, a jedan pomilovan. Zatvorenik A ovim odgovorom bio poprilično zadovoljan – ostao je izbor između njega i zatvorenika C. On smatra da mu je mogućnost za pomilovanje upravo porasla s  $\frac{1}{3}$  na  $\frac{1}{2}$ . Sav sretan, A je došapnuo tu vijest zatvoreniku C. No, C je sada zadovoljniji od zatvorenika A jer smatra da je A-ova šansa za slobodu još uvijek  $\frac{1}{3}$ , dok je vjerojatnost da on sam bude pomilovan upravo porasla na  $\frac{2}{3}$ . Samo jedan od zatvorenika ima pravo.

- Možete li procijeniti ishod ovog problema?
- Uočite vezu s Monty Hall problemom.
- Odgovorite na pitanje: Tko je od zatvorenika u pravu?

Kratka uputa: Zatvorenike podijelite na dva osuđena i jednog pomilovanog. Krenite od toga da odredite kolika je vjerojatnost da je zatvorenik A, koji je postavio pitanje čuvaru, osuđen (ili pomilovan). Zatim promatrajte mogućnost za pomilovanje preostale dvojice zatvorenika nakon što doznaju da zatvorenik B nije pomilovan.

- Grafički prikažite stablo svih mogućih ishoda za pomilovanje.

#### Literatura:

- I. Budimir, *Jedna igra na sreću ili kako osvojiti auto*, Matka 80 (2012.)
- M. Haddon, *Neobičan događaj sa psom u noći*, Izvori, Zagreb, 2003.
- Monty Hall, Z. Šikić, <http://sivic.wordpress.com/2012/09/07/monty-hall/>, (30.09.2013.)
- Bertrand, tri zatvorenika i Monty Hall, S. Žunar, [http://web.studenti.math.pmf.unizg.hr/~szunar/Monty\\_Hall\\_i\\_prijatelj.html](http://web.studenti.math.pmf.unizg.hr/~szunar/Monty_Hall_i_prijatelj.html), (30.09.2013.)

